Forelesning 13: Automatisk bevissøk IV – matriser og koblingskalkyle

Bjarne Holen - 28. april 2008

1 Automatisk bevissøk IV

1.1 Introduksjon

Bevissøk med koblinger

- Vi har til nå sett på forskjellige varianter av sekventkalkyle:
  - LK for *klassisk utsagnslogikk*,
  - LJ for *intuisjonistisk utsagnslogikk*,
  - ensidig sekventkalkyle,
  - grunn LK og
  - fri-variabel LK for *klassisk førsteordens logikk*.
- Alle disse kalkylene har to svakheter når de skal implementeres med en automatisk søkealgoritme:
  - *Redundans* – gjennom formelkopiering kan vi få mange forekomster av én og samme formel.
  - *Ingen relevanssjekk* – siden det kun tas hensyn til toppkonnektiv ved formelanalyse kan vi risikere å utvide formler som ikke er relevante for å lukke utledningen.
- Vi skal i denne forelesningen se på koblingskalkylen, som ikke har disse problemene.

Redundans i LK-utledninger

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\times\\ Q_2 \to R_1, P_2 \vdash R_2, P_1\end{array}}{Q_2 \to R_1 \vdash P_1, P_2 \to R_2} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\times\\ Q_1 \vdash Q_2, P_2 \to R_2\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\times\\ Q_1, R_1, P_2 \vdash R_2\end{array}}{Q_1, R_1 \vdash P_2 \to R_2}}{Q_2 \to R_1, Q_1 \vdash P_2 \to R_2}}{P_1 \to Q_1, Q_2 \to R_1 \vdash P_2 \to R_2}$$

- I rotsekventen forekommer både P, Q og R to ganger. Vi bruker $_1$ og $_2$ til å skille forekomstene fra hverandre.
- Siden P_2 og P_1 i venstre løvsekvent er forekomster av P, kan vi lukke med disse. Tilsvarende for de andre løvsekventene.
- En LK-utledning kan inneholde mange kopier av en (del)formel i rotsekventen. I utledningen over: 3 kopier av $Q_2 \to R_1$, 4 kopier av $P_2 \to R_2$, 2 kopier av P_1, 6 kopier av P_2, osv.
- Vi har derfor *redundans* i LK-utledninger.

Ingen relevanssjekk

$$\dfrac{\overset{\times}{(Q \to R) \lor (R \to Q), P \vdash P} \qquad \overset{\times}{(Q \to R) \lor (R \to Q), P \vdash P}}{(Q \to R) \lor (R \to Q), P \lor P \vdash P}$$

- I rotsekventen over er det to muligheter for utvidelse: $(Q \to R) \lor (R \to Q)$ eller $P \lor P$
  - Hvis vi velger $(Q \to R) \lor (R \to Q)$, vil vi gjøre (en eller flere) utvidelser som ikke bidrar til å lukke løvsekventene.
  - Velger vi derimot $P \lor P$, vil vi kunne lukke direkte.
- Det er de *atomære delformlene* til en formel som er med på å lukke løvsekventene.
- I sekventkalkyle ser vi imidlertid kun på *toppkonnektivene* for å velge hvilken formel vi skal utvide.
- Vi kan derfor risikere å utvide formler som er *irrelevante* m.h.p. å lukke utledningen.

Matriser og koblingskalkyle

- Bevisbarhet av en formel kan defineres som en egenskap ved formelen direkte, istedenfor via utledninger som i sekventkalkyle.
  - Vi kan representere en formel todimensjonalt ved en *matrise* bestående av de atomære delformlene.
  - Gyldighet defineres så som en egenskap ved stiene gjennom matrisen.
  - Hver sti må inneholde et komplementært par av atomer – kalt en *kobling*.
- *Koblingskalkyle* er basert på matrisekarakteristikken av gyldighet og utnytter at samme kobling kan forekomme på flere stier gjennom en matrise.
- Vi skal begrense oss til å se på koblingskalkyle for utsagnslogikk i disjunktiv normalform.
- Koblingskalkyle er imidlertid ikke begrenset til normalform, og finnes for mange forskjellige logikker – inkludert de vi har sett på i kurset.

1.2 Matriser

Disjunktiv normalform

- I ukeoppgavene har vi sett på normalformer.
- En *literal* er en atomær formel eller negasjonen av en atomær formel:
  - $P, Q, R, \ldots$ er *positive* literaler og $\neg P, \neg Q, \neg R, \ldots$ er *negative* literaler.
- En *generalisert konjunksjon* er en formel på formen $(\varphi_1 \land \ldots \land \varphi_n)$ der hver φ_i er en formel.
- En *generalisert disjunksjon* er en formel på formen $(\varphi_1 \lor \ldots \lor \varphi_n)$ der hver φ_i er en formel.

Definisjon 1.1 (Disjunktiv normalform)**.** *En formel er på* disjunktiv normalform *(DNF) hvis den er en (generalisert) disjunksjon av en eller flere (generaliserte) konjunksjoner av en eller flere literaler.*

Disjunktiv normalform

Hvilke formler er på DNF?

- $P \quad \surd$
- $P \lor Q \quad \surd$
- $(P \lor Q) \land R$ Nei, venstre konjunkt er en disjunksjon.
- $(\neg P \land Q) \lor (\neg Q \land P) \quad \surd$
- $(P \to Q) \lor Q \lor \neg P$ Nei, venstre konjunkt er en implikasjon.
- $(\neg P \land Q) \lor R \lor (\neg R \land P) \lor (\neg P \land Q \land \neg R) \quad \surd$
- $\neg P \land Q \land \neg R \quad \surd$

- Enhver literal er på DNF.
- Enhver disjunksjon av literaler er på DNF.
- Enhver konjunksjon av literaler er på DNF.

Transformasjon til DNF

- Vi har i ukeoppgavene sett at enhver utsagnslogisk formel kan transformeres til en *ekvivalent* formel på DNF.
- Husk: to formler er *ekvivalente* hvis de oppfylles av nøyaktig de samme valuasjonene/modellene.
- Eksempel:

$$\begin{aligned}(P \land (P \to Q)) \to Q &\Leftrightarrow \neg(P \land (P \to Q)) \lor Q \\ &\Leftrightarrow \neg P \lor \neg(P \to Q) \lor Q \\ &\Leftrightarrow \neg P \lor \neg(\neg P \lor Q) \lor Q \\ &\Leftrightarrow \neg P \lor (\neg\neg P \land \neg Q) \lor Q \\ &\Leftrightarrow \neg P \lor (P \land \neg Q) \lor Q\end{aligned}$$

Transformasjon fra DNF til KNF

- Vi har sett at alle DNF formler kan transformeres til *ekvivalente* KNF formler ved gjentagende bruk av

$$A \lor (B \land C) \Leftrightarrow (A \lor B) \land (A \lor C)$$

- Hva er problemet med en slik transformasjon?

- Hvorfor vil vi ha formler på KNF?

$$\begin{aligned}(P \wedge (P \to Q)) \to Q &\Leftrightarrow \neg P \vee (P \wedge \neg Q) \vee Q \\ &\Leftrightarrow (\neg P \vee (P \wedge \neg Q)) \vee Q \\ &\Leftrightarrow ((\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee \neg Q)) \vee Q \\ &\Leftrightarrow ((\neg P \vee P) \vee Q) \wedge ((\neg P \vee \neg Q) \vee Q) \\ &\Leftrightarrow (\neg P \vee P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee Q)\end{aligned}$$

- Falsifikasjon av 1 klausul falsifiserer formelen

Sammenheng mellom DNF og KNF

- Enkelt å konvertere formel til DNF
- Vi er mest interessert i KNF
- Finnes det en enkel måte å få KNF fra DNF representasjon?
- Anta at vi har en formel på DNF

$$(A_1 \wedge A_2 \ldots \wedge A_n) \vee (B_1 \wedge B_2 \ldots \wedge B_m) \cdots \vee (P_1 \wedge P_2 \ldots \wedge P_s)$$

- Ved gjentatte anvendelser av regelen

$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

- ser vi at klausulene i KNF representasjonen blir slik

$$(A_i \vee B_j \ldots \vee P_k)$$

$$1 < i < n \quad 1 < j < m \quad \ldots \quad 1 < k < s$$

- Merk at KNF klausulene får 1 element fra hver DNF klausul!

Overblikk over Matrise-søk

- For å vise at en sekvent er gyldig

$$P, (P \to Q) \vdash Q$$

- Bytt ut meta-symbol med objekt-symbol

$$(P \wedge (P \to Q)) \to Q$$

- Konverter til DNF

$$\neg P \vee (P \wedge \neg Q) \vee Q$$

- Elementene i DNF klausulene utgjør søylene i matrisen

$$\left|\begin{array}{ccc} & P & Q \\ \neg P & \neg Q & \end{array}\right|$$

Overblikk over Matrise-søk

- Vi har sett at ved å plukke 1 element fra hver DNF klausul
- (søylene i matrisen) får vi KNF klausulene.
- Dersom enhver KNF klausul har en kobling (¬ A, A)
- vil matrisen representere enn IKKE-falsifiserbar formel (gyldig)
- En matrise er en kompakt representasjon av formelen
- Vi bruker denne til å søke igjennom alle KNF klausuler
- Vi søker målrettet og leter etter koblinger

Definisjon 1.2 (Matrise)**.**

- *En klausul er en endelig mengde literaler. (metasymbol , := $\wedge$)*
- *En matrise er en endelig mengde klausuler. (metasymbol , := $\vee$)*

Eksempel (klausuler):

- $\{P\}$
- $\{P, \neg P, Q\}$
- $\{\neg Q, R, P\}$
- $\{\}$

Eksempel (matriser):

- $\{\{P\}, \{\neg P\}\}$
- $\{\{Q\}, \{\neg P, R\}, \{\neg R, P, \neg Q\}\}$
- $\{\}$
- $\{\{\}\}$

- En klausul er
  - *positiv* hvis den bare inneholder positive literaler, og
  - *negativ* hvis den bare inneholder negative literaler.

Definisjon 1.3 (Semantikk for matriser)**.** *La v være en boolsk valuasjon.*

- *For klausuler: $v \models \{L_1, \ldots, L_n\}$ hvis og bare hvis $v \models L_i$ for alle L_i.*
- *For matriser: $v \models \{K_1, \ldots, K_n\}$ hvis og bare hvis $v \models K_i$ for en K_i.*

Eksempel. *La v være slik at $v \models P$, $v \not\models Q$ og $v \models R$.*

- $v \models \{\{P\}, \{\neg P\}\}$? $\surd$
- $v \models \{\{Q\}, \{\neg P, R\}, \{\neg R, P, \neg Q\}\}$? *Nei, v oppfyller ingen klausuler.*
- $v \models \{\}$ *der* $\{\}$ *er en tom matrise?* *Nei, v oppfyller ingen klausuler i $\{\}$.*
- $v \models \{\{\}\}$ *(matrisen som kun inneholder en tom klausul)?* $\surd$
  ($v \models \{\} \in \{\{\}\}$ siden alle valuasjon oppfyller en tom klausul.)

Falsifiserbarhet av matriser

v	$M = \{K_1, \ldots, K_n\}$	$K = \{L_1, \ldots, L_m\}$
oppfyller	$v \models K_i$ for *en* K_i	$v \models L_i$ for *alle* L_i
falsifiserer	$v \not\models K_i$ for *alle* K_i	$v \not\models L_i$ for *en* L_i

- En boolsk valuasjon v *falsifiserer*
  - en klausul i M hvis v falsifiserer en av literalene i klausulen
  - alle klausulene i M hvis v falsifiserer en literal i hver klausul
- For hver klausul K_i har vi $|K_i|$ valg av literaler å falsifisere.
- Vi får maksimalt $|K_1| \times \ldots \times |K_n|$ måter å falsifisere M på.

DNF-formler som matriser

- En formel på DNF kan sees på som en matrise der klausulene tilsvarer disjunktene i formelen.
- Eksempel: formelen
$$\neg P \vee (P \wedge \neg Q) \vee Q$$
  tilsvarer matrisen
$$\{\{\neg P\}, \{P, \neg Q\}, \{Q\}\}$$
  tilsvarer KNF representasjonen
$$(\neg P \vee P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee Q)$$

Stier

Definisjon 1.4 (Sti)**.** *La M være en matrise.*

- *En* sti *gjennom M er en mengde som inneholder nøyaktig én literal fra hver klausul i M.*
- *En sti gjennom M er* partiell *hvis den mangler literaler fra én eller flere klausuler i M.*

Eksempel.

$$\left|\begin{array}{ccc} & P & Q \\ \neg P & \neg Q & \end{array}\right|$$

- *Stier:* $\{\neg P, P, Q\}$ *og* $\{\neg P, \neg Q, Q\}$.
- *Partieller stier:* $\{\neg P\}$, $\{\neg P, P\}$, $\{\neg P, \neg Q\}$, $\{P\}$, $\{P, Q\}$, $\{Q\}$, $\{Q, \neg Q\}$ *og* $\{Q, \neg P\}$.

Hver sti gjennom en matrise representerer en mulig falsifikasjon!

Koblinger

Definisjon 1.5 (Koblinger)**.** *La M være en matrise. En* [kobling] *i M er en partiell sti gjennom M på formen $\{A, \neg A\}$ der A er en atomær formel.*

Eksempel.

$$\left|\begin{array}{ccc} & P & Q \\ \neg P & \neg Q & \end{array}\right|$$

- *Koblinger: $\{\neg P, P\}$ og $\{\neg Q, Q\}$.*
- *Vi markerer sammenkoblede literaler med en bue i den grafiske matrisenotasjonen.*

Åpne og lukkede stier

- En kobling $\{P, \neg P\}$ er *ikke* falsifiserbar:
  - en boolsk valuasjon kan ikke falsifisere både P og $\neg P$ samtidig!
- Derfor vil en sti som inneholder en kobling, *ikke* være falsifiserbar.
- Dersom alle stiene gjennom en matrise inneholder en kobling, vil matrisen ikke være falsifiserbar – og dermed må formelen den representerer være gyldig.
- Vi sier at en (partiell) sti i en matrise er
  - *åpen* hvis den *ikke* inneholder noen kobling, og
  - *lukket* hvis den inneholder en kobling.

Matriser vs. LK-utledninger

- Stiene gjennom matrisen til en formel F tilsvarer løvsekventene vi får hvis vi gjør en *maksimal* LK-utledning for sekventen $\vdash F$:
  - Negative literaler er antecedentformler, og
  - positive literaler er succedentformler.

$$\left|\begin{array}{ccc} & P & Q \\ \neg P & \neg Q & \end{array}\right|$$

$$\dfrac{\dfrac{P \vdash P, Q \qquad \dfrac{P, Q \vdash Q}{P \vdash \neg Q, Q}}{P \vdash P \land \neg Q, Q}}{\vdash \neg P, P \land \neg Q, Q}$$

- Lukkede stier gjennom matriser tilsvarer aksiomer i LK-utledninger.

Matrisekarakterisering av gyldighet

Teorem 1.1. *En formel F på DNF er gyldig hvis og bare hvis enhver sti gjennom matrisen til F inneholder en kobling.*

Eksempel.

- *Formelen* $(P \land (P \to Q) \land (Q \to R)) \to R$ *er gyldig.*
- *På DNF får vi formelen* $\neg P \lor (P \land \neg Q) \lor (Q \land \neg R) \lor R$.

$$\left|\begin{array}{cccc} & P & Q & R \\ \neg P & \neg Q & \neg R & \end{array}\right|$$

Koblinger: $\{\neg P, P\}$, $\{\neg Q, Q\}$ *og* $\{\neg R, R\}$.

Stier: $\{\neg P, P, Q, R\}$, $\{\neg P, P, \neg R, R\}$, $\{\neg P, \neg Q, Q, R\}$ *og* $\{\neg P, \neg Q, \neg R, R\}$.

- *Alle stiene inneholder en kobling.*

1.3 Koblingskalkyle

- Matrisekarakteriseringen av gyldighet gir oss muligheten til å avgjøre bevisbarhet ved å sjekke at alle stier inneholder en kobling.
- En første tilnærming vil være å liste opp alle stiene gjennom en matrise og sjekke hver av dem for koblinger.
- Det er imidlertid slik at én kobling kan forekomme på flere stier gjennom en matrise.

Eksempel.

$$\left|\begin{array}{cccc} M_1 & P & \neg P & M_2 \end{array}\right|$$

Uansett hvordan M_1 og M_2 ser ut vil enhver sti gå gjennom koblingen $\{P, \neg P\}$.

- Det er derfor en god idé å fokusere på koblinger istedenfor stier.
- Vi skal vise grunnidéene i koblingskalkylen ved et eksempel.

Startsteget

$$\left|\begin{array}{cccc} & \neg P & \neg Q & \\ P & Q & \neg P & R \\ {\scriptstyle\nearrow}\ {\scriptstyle\uparrow} & & & \end{array}\right|$$

- Vi starter med å velge en *startklausul*.
- Vi velger $\{P\}$ og markerer denne med $\uparrow$ under klausulen, og markerer alle literalene i startklausulen med $\nearrow$.

Utvidelsessteget I

$$\left|\begin{array}{cccc} & \neg P & \neg Q & \\ \boxed{P} & Q & \neg P & R \\ \uparrow & & & \end{array}\right|$$

- Vi kaller klausulen som er markert med $\uparrow$, for *aktiv klausul*.
- Hvis en literal i aktiv klausul er markert med $\nearrow$ må vi sjekke alle stier som inneholder literalen.
- I dette tilfellet har vi bare ett valg: P.
- Vi markerer P med en ramme for å indikere at literalen er en del av den stien vi for øyeblikket undersøker – den *aktive stien*.
- Samtidig fjerner vi $\nearrow$-symbolet fra P.

Utvidelsessteget II

$$\left|\begin{array}{cccc} & \neg P. & \neg Q & \\ \boxed{P} & Q & \neg P & R \\ & {}^{\nearrow}\ \uparrow & & \end{array}\right|$$

- Vi utvider den aktive stien ved å koble P med en komplementær literal i en av de andre klausulene.
- Vi har tre valg: $\{\neg P, Q\}$, $\{\neg Q, \neg P\}$ og $\{R\}$
- Vi velger den første klausulen og markerer de sammenkoblede literalene med en bue.
- Alle stier som springer ut fra den sammenkoblede $\neg P$ vil være lukkede på grunn av koblingen $\{P, \neg P\}$. Dette markeres med '.' etter $\neg P$.
- Den sammenkoblede klausulen settes aktiv og de resterende literalene på den markeres med $\nearrow$.

Utvidelsessteget – oppsummering

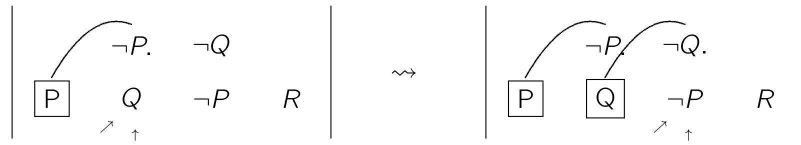
$$\left|\begin{array}{cccc} & \neg P & \neg Q & \\ P & Q & \neg P & R \\ {}^{\nearrow}\ \uparrow & & & \end{array}\right| \rightsquigarrow \left|\begin{array}{cccc} & \neg P. & \neg Q & \\ \boxed{P} & Q & \neg P & R \\ & {}^{\nearrow}\ \uparrow & & \end{array}\right|$$

$\uparrow$ markerer aktiv klausul . markerer lukkede partielle stier

$\boxed{L}$ markerer literaler på den aktive stien $\nearrow$ markerer literaler i åpne partielle stier

1. Velg en literal L markert med $\nearrow$ i den aktive klausulen.
2. Bytt ut $\nearrow$ med en boks rundt L. Velg en L-kobling.
   - Hvis det er flere alternativer, ta vare på dem.
3. Marker den koblede literalen med '.'
4. Marker de resterende literalene i den koblede klausulen med $\nearrow$.
5. Flytt $\uparrow$ til den sammenkoblede klausulen.

Vi foretar nok et utvidelsessteg



$\uparrow$ markerer aktiv klausul

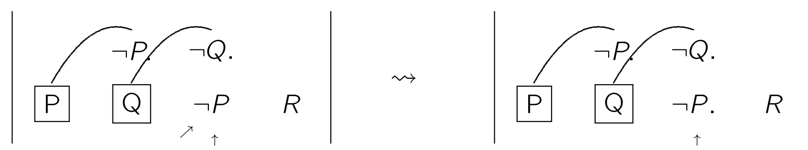
$\boxed{L}$ markerer literaler på den aktive stien

. markerer lukkede partielle stier

$\nearrow$ markerer literaler i åpne partielle stier

1. Vi velger literalen Q i den aktive klausulen.
2. Vi bytter ut $\nearrow$ med en boks rundt Q. Vi har bare ett alternativ til kobling: $\neg Q$.
3. Markerer den koblede literalen med '.'
4. Markerer de resterende literalene i den koblede klausulen med $\nearrow$.
5. Flytt $\uparrow$ til den sammenkoblede klausulen.

Reduksjonssteget



$\uparrow$ markerer aktiv klausul

$\boxed{L}$ markerer literaler på den aktive stien

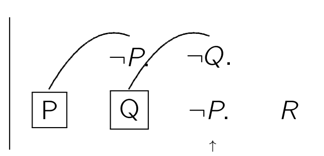
. markerer lukkede partielle stier

$\nearrow$ markerer literaler i åpne partielle stier

- I situasjonen til venstre finnes det ingen literaler å koble $\neg P$ med.
- Det finnes imidlertid en komplementær literal i den aktive stien: P.
- Vi kan derfor foreta et *reduksjonssteg*:

1. Blant literalene som er merket med $\nearrow$ i den aktive klausulen, velg en L som er komplementær med en literal på den aktive stien.
2. Fjern $\nearrow$ fra L og marker den med '.'

Fullført søk – suksess



- I situasjonen over er alle literaler i aktiv klausul markert med '.', dvs. at alle stier som fortsetter ut fra denne klausulen inneholder koblinger.
- I tillegg er ingen literaler i klausuler på den aktive stien merket med $\nearrow$, dvs. at vi ikke har noen partielle åpne stier igjen å sjekke.
- Tilstanden er et vitne på at søket er *fullført med suksess* – alle stier gjennom matrisen inneholder koblinger.

Kalkyle vs. søkealgoritme

- Koblingskalkylen består av reglene *start*, *utvidelse* og *reduksjon*.
- Reglene definerer et sett *stisjekkingstilstander*.
- I tillegg har vi en beskrivelse av hvilke tilstander som representerer *suksess* i stisjekkingen.
- En søkealgoritme for koblingskalkylen må spesifisere en *rekkefølge* å gjøre reglene i.
- Vi skal nøye oss med å presentere noen viktige poenger m.h.p. implementasjon av en søkealgoritme.
- Til slutt skal vi ta en titt på en Prolog-implementasjon av koblingskalkylen.

Sjekke alle åpne partielle stier

$$\left|\begin{array}{cccc} \boxed{P} & \neg P & \neg Q. & \\ R & \boxed{Q} & \neg P. & R \\ \nearrow & & \uparrow & \end{array}\right|$$

- Vi ser på suksesstilstanden med matrisen fra eksempelet, men legger til R i første klausul. Den nye matrisen inneholder flere stier uten koblinger, f.eks. $\{R, Q, \neg P, R\}$.
- Tilstanden over er *ikke* en suksesstilstand, siden vi har en partiell åpen sti: den nye literalen R er merket med $\nearrow$.
- Vi må gå tilbake og se hva som skjer hvis vi velger R som del av den aktive stien istedenfor P i venstre klausul.
- Vi får en låst tilstand, siden R ikke kan kobles med noen literaler i matrisen.
- Vi må altså sjekke alle åpne partielle stier (literaler merket med $\nearrow$) før vi kan konludere med suksess.

Implementasjon i Prolog – leanCoP

```
prove(Mat) :-
  append(MatA,[Cla|MatB],Mat), append(MatA,MatB,Mat1),
  \+member(-_,Cla), prove(Cla,Mat1,[]).
prove([],_,_).
prove([Lit|Cla],Mat,Path) :-
  (-NegLit=Lit;-NegLit\=Lit,-Lit=NegLit),
   ( member(NegLit,Path); append(MatA,[Cla1|MatB],Mat),
     append(MatA,MatB,Mat1), append(ClaA,[NegLit|ClaB],Cla1),
     append(ClaA,ClaB,Cla3), prove(Cla3,Mat1,[Lit|Path])
   ), prove(Cla,Mat,Path).
```

- leanCoP er en elegant Prolog-implementasjon av koblingskalkylen for klassisk logikk i normalform.
- Utviklet av Jens Otten ved Universitetet i Potsdam utenfor Berlin.
- Utnytter Prologs innebygde unifikasjon og backtracking.
- For mer info: `http://www.leancop.de/`