

# INF3170 – Logikk

Forelesning 0: Mengdelære, Induksjon

Martin Giese

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

23. januar 2008



# Dagens plan

- 1 Mengdelære
- 2 Induktive definisjoner og bevis

## 1 Mengdelære

- Mengder
- Relasjoner
- Funksjoner
- Operatorer
- Multimengder
- Kardinalitet
- Tellbart vs. overtellbart

## 2 Induktive definisjoner og bevis

# Mengder

## Definisjon

- En *mengde* er en endelig eller uendelig samling objekter der innbyrdes rekkefølge og antall forekomster av hvert objekt ignoreres.

# Mengder

## Definisjon

- En *mengde* er en endelig eller uendelig samling objekter der innbyrdes rekkefølge og antall forekomster av hvert objekt ignoreres.
- Objektene i en mengde kalles *elementer*.

# Mengder

## Definisjon

- En *mengde* er en endelig eller uendelig samling objekter der innbyrdes rekkefølge og antall forekomster av hvert objekt ignoreres.
- Objektene i en mengde kalles *elementer*.
- Hvis  $a$  er element i mengden  $S$ , skriver vi  $a \in S$ . Hvis  $a$  ikke er element i  $S$ , skriver vi  $a \notin S$ .

# Mengder

## Definisjon

- En **mengde** er en endelig eller uendelig samling objekter der innbyrdes rekkefølge og antall forekomster av hvert objekt ignoreres.
- Objektene i en mengde kalles **elementer**.
- Hvis  $a$  er element i mengden  $S$ , skriver vi  $a \in S$ . Hvis  $a$  ikke er element i  $S$ , skriver vi  $a \notin S$ .
- To mengder  $S$  og  $T$  er **like**,  $S = T$ , hvis de inneholder de samme elementene.

# Mengder

## Definisjon

- En **mengde** er en endelig eller uendelig samling objekter der innbyrdes rekkefølge og antall forekomster av hvert objekt ignoreres.
- Objektene i en mengde kalles **elementer**.
- Hvis  $a$  er element i mengden  $S$ , skriver vi  $a \in S$ . Hvis  $a$  ikke er element i  $S$ , skriver vi  $a \notin S$ .
- To mengder  $S$  og  $T$  er **like**,  $S = T$ , hvis de inneholder de samme elementene.

## Notasjon

Mengden med elementene  $a$ ,  $b$ ,  $c$  og  $d$  skrives ofte  $\{a, b, c, d\}$ .



# Mengder

## Definisjon

- En **mengde** er en endelig eller uendelig samling objekter der innbyrdes rekkefølge og antall forekomster av hvert objekt ignoreres.
- Objektene i en mengde kalles **elementer**.
- Hvis  $a$  er element i mengden  $S$ , skriver vi  $a \in S$ . Hvis  $a$  ikke er element i  $S$ , skriver vi  $a \notin S$ .
- To mengder  $S$  og  $T$  er **like**,  $S = T$ , hvis de inneholder de samme elementene.

## Notasjon

Mengden med elementene  $a$ ,  $b$ ,  $c$  og  $d$  skrives ofte  $\{a, b, c, d\}$ .

Spørsmål: Hvor mange elementer har  $\{a, b, c, d\}$ ?

# Mengder

Antagelse:  $a, b, c, d, 1, 2, \gamma, \Phi$  er alle forskjellige

# Mengder

Antagelse:  $a, b, c, d, 1, 2, \gamma, \Phi$  er alle forskjellige

## Eksempel

- $a \in \{a, b, c\}$

# Mengder

Antagelse:  $a, b, c, d, 1, 2, \gamma, \Phi$  er alle forskjellige

## Eksempel

- $a \in \{a, b, c\}$
- $d \notin \{a, b, c\}$

# Mengder

Antagelse:  $a, b, c, d, 1, 2, \gamma, \Phi$  er alle forskjellige

## Eksempel

- $a \in \{a, b, c\}$
- $d \notin \{a, b, c\}$
- $1 \in \{a, 1, \gamma, \Phi\}$

# Mengder

Antagelse:  $a, b, c, d, 1, 2, \gamma, \Phi$  er alle forskjellige

## Eksempel

- $a \in \{a, b, c\}$
- $d \notin \{a, b, c\}$
- $1 \in \{a, 1, \gamma, \Phi\}$
- $2 \notin \{a, 1, \gamma, \Phi\}$

# Mengder

Antagelse:  $a, b, c, d, 1, 2, \gamma, \Phi$  er alle forskjellige

## Eksempel

- $a \in \{a, b, c\}$
- $d \notin \{a, b, c\}$
- $1 \in \{a, 1, \gamma, \Phi\}$
- $2 \notin \{a, 1, \gamma, \Phi\}$
- $\{a, b\} = \{b, a\}$

# Mengder

Antagelse:  $a, b, c, d, 1, 2, \gamma, \Phi$  er alle forskjellige

## Eksempel

- $a \in \{a, b, c\}$
- $d \notin \{a, b, c\}$
- $1 \in \{a, 1, \gamma, \Phi\}$
- $2 \notin \{a, 1, \gamma, \Phi\}$
- $\{a, b\} = \{b, a\}$
- $\{a, a, b\} = \{a, b\}$



# Mengder

Antagelse:  $a, b, c, d, 1, 2, \gamma, \Phi$  er alle forskjellige

## Eksempel

- $a \in \{a, b, c\}$
- $d \notin \{a, b, c\}$
- $1 \in \{a, 1, \gamma, \Phi\}$
- $2 \notin \{a, 1, \gamma, \Phi\}$
- $\{a, b\} = \{b, a\}$
- $\{a, a, b\} = \{a, b\}$
- $\{a, b\} \neq \{b, c\}$  (mengdene er *ulike*)

# Noen spesielle mengder

## Definisjon (Den tomme mengden)

- Den *tomme mengden* er mengden som ikke inneholder noen elementer.

# Noen spesielle mengder

## Definisjon (Den tomme mengden)

- Den *tomme mengden* er mengden som ikke inneholder noen elementer.
- Skrives ofte  $\{\}$  eller  $\emptyset$ .

# Noen spesielle mengder

## Definisjon (Den tomme mengden)

- Den *tomme mengden* er mengden som ikke inneholder noen elementer.
- Skrives ofte  $\{\}$  eller  $\emptyset$ .

## Definisjon (Singletonmengde)

En *singletonmengde* er en mengde som har nøyaktig ett element.

# Noen spesielle mengder

## Definisjon (Den tomme mengden)

- Den *tomme mengden* er mengden som ikke inneholder noen elementer.
- Skrives ofte  $\{\}$  eller  $\emptyset$ .

## Definisjon (Singletonmengde)

En *singletonmengde* er en mengde som har nøyaktig ett element.

## Eksempel

Både  $\{a\}$ ,  $\{b\}$  og  $\{b, b\}$  er singletonmengder.

# Union – slå sammen mengder

## Definisjon (Union)

- *Unionen* av to mengder  $S$  og  $T$  er den mengden som inneholder alle objekter som er element i  $S$  eller  $T$ .

# Union – slå sammen mengder

## Definisjon (Union)

- *Unionen* av to mengder  $S$  og  $T$  er den mengden som inneholder alle objekter som er element i  $S$  eller  $T$ .
- Unionen av  $S$  og  $T$  skrives ofte  $S \cup T$ .

# Union – slå sammen mengder

## Definisjon (Union)

- *Unionen* av to mengder  $S$  og  $T$  er den mengden som inneholder alle objekter som er element i  $S$  eller  $T$ .
- Unionen av  $S$  og  $T$  skrives ofte  $S \cup T$ .

## Eksempel

- $\{a, b\} \cup \{c, d\} =$



# Union – slå sammen mengder

## Definisjon (Union)

- *Unionen* av to mengder  $S$  og  $T$  er den mengden som inneholder alle objekter som er element i  $S$  eller  $T$ .
- Unionen av  $S$  og  $T$  skrives ofte  $S \cup T$ .

## Eksempel

- $\{a, b\} \cup \{c, d\} = \{a, b, c, d\}$

# Union – slå sammen mengder

## Definisjon (Union)

- *Unionen* av to mengder  $S$  og  $T$  er den mengden som inneholder alle objekter som er element i  $S$  eller  $T$ .
- Unionen av  $S$  og  $T$  skrives ofte  $S \cup T$ .

## Eksempel

- $\{a, b\} \cup \{c, d\} = \{a, b, c, d\}$
- $\{a, b\} \cup \{b, c\} =$

# Union – slå sammen mengder

## Definisjon (Union)

- *Unionen* av to mengder  $S$  og  $T$  er den mengden som inneholder alle objekter som er element i  $S$  eller  $T$ .
- Unionen av  $S$  og  $T$  skrives ofte  $S \cup T$ .

## Eksempel

- $\{a, b\} \cup \{c, d\} = \{a, b, c, d\}$
- $\{a, b\} \cup \{b, c\} = \{a, b, c\}$

# Union – slå sammen mengder

## Definisjon (Union)

- *Unionen* av to mengder  $S$  og  $T$  er den mengden som inneholder alle objekter som er element i  $S$  eller  $T$ .
- Unionen av  $S$  og  $T$  skrives ofte  $S \cup T$ .

## Eksempel

- $\{a, b\} \cup \{c, d\} = \{a, b, c, d\}$
- $\{a, b\} \cup \{b, c\} = \{a, b, c\}$
- $\{1, 2, 3\} \cup \emptyset =$

# Union – slå sammen mengder

## Definisjon (Union)

- *Unionen* av to mengder  $S$  og  $T$  er den mengden som inneholder alle objekter som er element i  $S$  eller  $T$ .
- Unionen av  $S$  og  $T$  skrives ofte  $S \cup T$ .

## Eksempel

- $\{a, b\} \cup \{c, d\} = \{a, b, c, d\}$
- $\{a, b\} \cup \{b, c\} = \{a, b, c\}$
- $\{1, 2, 3\} \cup \emptyset = \{1, 2, 3\}$

# Snitt – felles elementer

## Definisjon (Snitt)

- Hvis  $S$  og  $T$  er mengder, så er **snittet** mellom  $S$  og  $T$ , eller  $S$  snittet med  $T$ , mengden som inneholder alle objekter som er element i både  $S$  og  $T$ .

# Snitt – felles elementer

## Definisjon (Snitt)

- Hvis  $S$  og  $T$  er mengder, så er **snittet** mellom  $S$  og  $T$ , eller  $S$  snittet med  $T$ , mengden som inneholder alle objekter som er element i både  $S$  og  $T$ .
- $S$  snittet med  $T$  skrives ofte  $S \cap T$ .

# Snitt – felles elementer

## Definisjon (Snitt)

- Hvis  $S$  og  $T$  er mengder, så er **snittet** mellom  $S$  og  $T$ , eller  $S$  snittet med  $T$ , mengden som inneholder alle objekter som er element i både  $S$  og  $T$ .
- $S$  snittet med  $T$  skrives ofte  $S \cap T$ .

## Eksempel

- $\{a, b\} \cap \{c, d\} =$



# Snitt – felles elementer

## Definisjon (Snitt)

- Hvis  $S$  og  $T$  er mengder, så er **snittet** mellom  $S$  og  $T$ , eller  $S$  snittet med  $T$ , mengden som inneholder alle objekter som er element i både  $S$  og  $T$ .
- $S$  snittet med  $T$  skrives ofte  $S \cap T$ .

## Eksempel

- $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$

# Snitt – felles elementer

## Definisjon (Snitt)

- Hvis  $S$  og  $T$  er mengder, så er **snittet** mellom  $S$  og  $T$ , eller  $S$  snittet med  $T$ , mengden som inneholder alle objekter som er element i både  $S$  og  $T$ .
- $S$  snittet med  $T$  skrives ofte  $S \cap T$ .

## Eksempel

- $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$
- $\{a, b\} \cap \{b, c\} =$

# Snitt – felles elementer

## Definisjon (Snitt)

- Hvis  $S$  og  $T$  er mengder, så er **snittet** mellom  $S$  og  $T$ , eller  $S$  snittet med  $T$ , mengden som inneholder alle objekter som er element i både  $S$  og  $T$ .
- $S$  snittet med  $T$  skrives ofte  $S \cap T$ .

## Eksempel

- $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$
- $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\}$

# Snitt – felles elementer

## Definisjon (Snitt)

- Hvis  $S$  og  $T$  er mengder, så er **snittet** mellom  $S$  og  $T$ , eller  $S$  snittet med  $T$ , mengden som inneholder alle objekter som er element i både  $S$  og  $T$ .
- $S$  snittet med  $T$  skrives ofte  $S \cap T$ .

## Eksempel

- $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$
- $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\}$
- $\{1, 2, 3\} \cap \emptyset =$

# Snitt – felles elementer

## Definisjon (Snitt)

- Hvis  $S$  og  $T$  er mengder, så er **snittet** mellom  $S$  og  $T$ , eller  $S$  snittet med  $T$ , mengden som inneholder alle objekter som er element i både  $S$  og  $T$ .
- $S$  snittet med  $T$  skrives ofte  $S \cap T$ .

## Eksempel

- $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$
- $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\}$
- $\{1, 2, 3\} \cap \emptyset = \emptyset$

# Mengdedifferanse – fjerne elementer

## Definisjon (Mengdedifferanse)

- Hvis  $S$  og  $T$  er mengder, så er *mengdedifferansen* mellom  $S$  og  $T$ , eller  $S$  *minus*  $T$ , mengden som inneholder alle objekter som er element i  $S$  men ikke element i  $T$ .

# Mengdedifferanse – fjerne elementer

## Definisjon (Mengdedifferanse)

- Hvis  $S$  og  $T$  er mengder, så er *mengdedifferansen* mellom  $S$  og  $T$ , eller  $S$  *minus*  $T$ , mengden som inneholder alle objekter som er element i  $S$  men ikke element i  $T$ .
- $S$  minus  $T$  skrives ofte  $S \setminus T$ .

# Mengdedifferanse – fjerne elementer

## Definisjon (Mengdedifferanse)

- Hvis  $S$  og  $T$  er mengder, så er *mengdedifferansen* mellom  $S$  og  $T$ , eller  $S$  *minus*  $T$ , mengden som inneholder alle objekter som er element i  $S$  men ikke element i  $T$ .
- $S$  minus  $T$  skrives ofte  $S \setminus T$ .

## Eksempel

- $\{a, b\} \setminus \{c, d\} =$



# Mengdedifferanse – fjerne elementer

## Definisjon (Mengdedifferanse)

- Hvis  $S$  og  $T$  er mengder, så er *mengdedifferansen* mellom  $S$  og  $T$ , eller  $S$  *minus*  $T$ , mengden som inneholder alle objekter som er element i  $S$  men ikke element i  $T$ .
- $S$  minus  $T$  skrives ofte  $S \setminus T$ .

## Eksempel

- $\{a, b\} \setminus \{c, d\} = \{a, b\}$

# Mengdedifferanse – fjerne elementer

## Definisjon (Mengdedifferanse)

- Hvis  $S$  og  $T$  er mengder, så er **mengdedifferansen** mellom  $S$  og  $T$ , eller  $S$  **minus**  $T$ , mengden som inneholder alle objekter som er element i  $S$  men ikke element i  $T$ .
- $S$  minus  $T$  skrives ofte  $S \setminus T$ .

## Eksempel

- $\{a, b\} \setminus \{c, d\} = \{a, b\}$
- $\{a, b\} \setminus \{b, c\} =$

# Mengdedifferanse – fjerne elementer

## Definisjon (Mengdedifferanse)

- Hvis  $S$  og  $T$  er mengder, så er **mengdedifferansen** mellom  $S$  og  $T$ , eller  $S$  **minus**  $T$ , mengden som inneholder alle objekter som er element i  $S$  men ikke element i  $T$ .
- $S$  minus  $T$  skrives ofte  $S \setminus T$ .

## Eksempel

- $\{a, b\} \setminus \{c, d\} = \{a, b\}$
- $\{a, b\} \setminus \{b, c\} = \{a\}$

# Mengdedifferanse – fjerne elementer

## Definisjon (Mengdedifferanse)

- Hvis  $S$  og  $T$  er mengder, så er **mengdedifferansen** mellom  $S$  og  $T$ , eller  $S$  **minus**  $T$ , mengden som inneholder alle objekter som er element i  $S$  men ikke element i  $T$ .
- $S$  minus  $T$  skrives ofte  $S \setminus T$ .

## Eksempel

- $\{a, b\} \setminus \{c, d\} = \{a, b\}$
- $\{a, b\} \setminus \{b, c\} = \{a\}$
- $\{1, 2, 3\} \setminus \emptyset =$

# Mengdedifferanse – fjerne elementer

## Definisjon (Mengdedifferanse)

- Hvis  $S$  og  $T$  er mengder, så er **mengdedifferansen** mellom  $S$  og  $T$ , eller  $S$  **minus**  $T$ , mengden som inneholder alle objekter som er element i  $S$  men ikke element i  $T$ .
- $S$  minus  $T$  skrives ofte  $S \setminus T$ .

## Eksempel

- $\{a, b\} \setminus \{c, d\} = \{a, b\}$
- $\{a, b\} \setminus \{b, c\} = \{a\}$
- $\{1, 2, 3\} \setminus \emptyset = \{1, 2, 3\}$

# Mengdedifferanse – fjerne elementer

## Definisjon (Mengdedifferanse)

- Hvis  $S$  og  $T$  er mengder, så er **mengdedifferansen** mellom  $S$  og  $T$ , eller  $S$  **minus**  $T$ , mengden som inneholder alle objekter som er element i  $S$  men ikke element i  $T$ .
- $S$  minus  $T$  skrives ofte  $S \setminus T$ .

## Eksempel

- $\{a, b\} \setminus \{c, d\} = \{a, b\}$
- $\{a, b\} \setminus \{b, c\} = \{a\}$
- $\{1, 2, 3\} \setminus \emptyset = \{1, 2, 3\}$
- $\emptyset \setminus \{a, b, c\} =$

# Mengdedifferanse – fjerne elementer

## Definisjon (Mengdedifferanse)

- Hvis  $S$  og  $T$  er mengder, så er **mengdedifferansen** mellom  $S$  og  $T$ , eller  $S$  **minus**  $T$ , mengden som inneholder alle objekter som er element i  $S$  men ikke element i  $T$ .
- $S$  minus  $T$  skrives ofte  $S \setminus T$ .

## Eksempel

- $\{a, b\} \setminus \{c, d\} = \{a, b\}$
- $\{a, b\} \setminus \{b, c\} = \{a\}$
- $\{1, 2, 3\} \setminus \emptyset = \{1, 2, 3\}$
- $\emptyset \setminus \{a, b, c\} = \emptyset$

# Delmengde

## Definisjon (Delmengde)

- En mengde  $S$  er en *delmengde* av en mengde  $T$  hvis alle elementer i  $S$  også er elementer i  $T$ .



# Delmengde

## Definisjon (Delmengde)

- En mengde  $S$  er en *delmengde* av en mengde  $T$  hvis alle elementer i  $S$  også er elementer i  $T$ .
- Skrives ofte  $S \subseteq T$ .

# Delmengde

## Definisjon (Delmengde)

- En mengde  $S$  er en *delmengde* av en mengde  $T$  hvis alle elementer i  $S$  også er elementer i  $T$ .
- Skrives ofte  $S \subseteq T$ .

## Eksempel

- $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$

# Delmengde

## Definisjon (Delmengde)

- En mengde  $S$  er en *delmengde* av en mengde  $T$  hvis alle elementer i  $S$  også er elementer i  $T$ .
- Skrives ofte  $S \subseteq T$ .

## Eksempel

- $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$
- $\{a, b\} \subseteq \{a, b\}$  (*enhver mengde er en delmengde av seg selv*)

# Delmengde

## Definisjon (Delmengde)

- En mengde  $S$  er en *delmengde* av en mengde  $T$  hvis alle elementer i  $S$  også er elementer i  $T$ .
- Skrives ofte  $S \subseteq T$ .

## Eksempel

- $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$
- $\{a, b\} \subseteq \{a, b\}$  (*enhver mengde er en delmengde av seg selv*)
- $\{a, b, c\} \not\subseteq \{a, b\}$

# Delmengde

## Definisjon (Delmengde)

- En mengde  $S$  er en *delmengde* av en mengde  $T$  hvis alle elementer i  $S$  også er elementer i  $T$ .
- Skrives ofte  $S \subseteq T$ .

## Eksempel

- $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$
- $\{a, b\} \subseteq \{a, b\}$  (*enhver mengde er en delmengde av seg selv*)
- $\{a, b, c\} \not\subseteq \{a, b\}$
- $\emptyset \subseteq \{a, b\}$  (*den tomme mengden er en delmengde av alle mengder*)

# Delmengde

## Definisjon (Delmengde)

- En mengde  $S$  er en *delmengde* av en mengde  $T$  hvis alle elementer i  $S$  også er elementer i  $T$ .
- Skrives ofte  $S \subseteq T$ .

## Eksempel

- $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$
- $\{a, b\} \subseteq \{a, b\}$  (*enhver mengde er en delmengde av seg selv*)
- $\{a, b, c\} \not\subseteq \{a, b\}$
- $\emptyset \subseteq \{a, b\}$  (*den tomme mengden er en delmengde av alle mengder*)
- $\{a, b\} \not\subseteq \emptyset$

# Kryssprodukt

## Definisjon (Kryssprodukt)

- Hvis  $S$  og  $T$  er mengder, så er *kryssproduktet* av  $S$  og  $T$  mengden av alle *par*  $\langle s, t \rangle$  slik at  $s \in S$  og  $t \in T$ .

# Kryssprodukt

## Definisjon (Kryssprodukt)

- Hvis  $S$  og  $T$  er mengder, så er *kryssproduktet* av  $S$  og  $T$  mengden av alle *par*  $\langle s, t \rangle$  slik at  $s \in S$  og  $t \in T$ .
- Kryssproduktet av  $S$  og  $T$  skrives ofte  $S \times T$ .



# Kryssprodukt

## Definisjon (Kryssprodukt)

- Hvis  $S$  og  $T$  er mengder, så er *kryssproduktet* av  $S$  og  $T$  mengden av alle *par*  $\langle s, t \rangle$  slik at  $s \in S$  og  $t \in T$ .
- Kryssproduktet av  $S$  og  $T$  skrives ofte  $S \times T$ .

## Eksempel

- $\{a, b\} \times \{c, d\} =$

# Kryssprodukt

## Definisjon (Kryssprodukt)

- Hvis  $S$  og  $T$  er mengder, så er *kryssproduktet* av  $S$  og  $T$  mengden av alle *par*  $\langle s, t \rangle$  slik at  $s \in S$  og  $t \in T$ .
- Kryssproduktet av  $S$  og  $T$  skrives ofte  $S \times T$ .

## Eksempel

- $\{a, b\} \times \{c, d\} = \{\langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle\}$

# Kryssprodukt

## Definisjon (Kryssprodukt)

- Hvis  $S$  og  $T$  er mengder, så er *kryssproduktet* av  $S$  og  $T$  mengden av alle *par*  $\langle s, t \rangle$  slik at  $s \in S$  og  $t \in T$ .
- Kryssproduktet av  $S$  og  $T$  skrives ofte  $S \times T$ .

## Eksempel

- $\{a, b\} \times \{c, d\} = \{\langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle\}$
- $\{a, b\} \times \{b, c\} =$

# Kryssprodukt

## Definisjon (Kryssprodukt)

- Hvis  $S$  og  $T$  er mengder, så er **kryssproduktet** av  $S$  og  $T$  mengden av alle **par**  $\langle s, t \rangle$  slik at  $s \in S$  og  $t \in T$ .
- Kryssproduktet av  $S$  og  $T$  skrives ofte  $S \times T$ .

## Eksempel

- $\{a, b\} \times \{c, d\} = \{\langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle\}$
- $\{a, b\} \times \{b, c\} = \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle\}$

# Kryssprodukt

## Definisjon (Kryssprodukt)

- Hvis  $S$  og  $T$  er mengder, så er **kryssproduktet** av  $S$  og  $T$  mengden av alle **par**  $\langle s, t \rangle$  slik at  $s \in S$  og  $t \in T$ .
- Kryssproduktet av  $S$  og  $T$  skrives ofte  $S \times T$ .

## Eksempel

- $\{a, b\} \times \{c, d\} = \{\langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle\}$
- $\{a, b\} \times \{b, c\} = \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle\}$
- $\{a\} \times \{1, 2\} =$

# Kryssprodukt

## Definisjon (Kryssprodukt)

- Hvis  $S$  og  $T$  er mengder, så er **kryssproduktet** av  $S$  og  $T$  mengden av alle **par**  $\langle s, t \rangle$  slik at  $s \in S$  og  $t \in T$ .
- Kryssproduktet av  $S$  og  $T$  skrives ofte  $S \times T$ .

## Eksempel

- $\{a, b\} \times \{c, d\} = \{\langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle\}$
- $\{a, b\} \times \{b, c\} = \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle\}$
- $\{a\} \times \{1, 2\} = \{\langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle\}$

# Kryssprodukt

## Notasjon

- *En mengde kan krysses med seg selv:  $S \times S$*

# Kryssprodukt

## Notasjon

- *En mengde kan krysses med seg selv:  $S \times S$*
- $\{a, b\} \times \{a, b\} = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle\}$



# Kryssprodukt

## Notasjon

- *En mengde kan krysses med seg selv:  $S \times S$*
- $\{a, b\} \times \{a, b\} = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle\}$
- $S \times S \times S$  skrives ofte  $S^3$ .

# Kryssprodukt

## Notasjon

- En mengde kan krysses med seg selv:  $S \times S$
- $\{a, b\} \times \{a, b\} = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle\}$
- $S \times S \times S$  skrives ofte  $S^3$ .
- Generalisert:  $\underbrace{S \times S \times \dots \times S}_n$  skrives  $S^n$ .

# Mengdebygger

## Notasjon

En definisjon på formen “mengden av alle elementer  $x \in S$  slik at ...” kan skrives på formen

$$\{x \mid x \in S \text{ og betingelse på } x\}.$$

En slik konstruksjon kalles en *mengdebygger*.

# Mengdebygger

## Notasjon

En definisjon på formen “mengden av alle elementer  $x \in S$  slik at ...” kan skrives på formen

$$\{x \mid x \in S \text{ og betingelse på } x\}.$$

En slik konstruksjon kalles en *mengdebygger*.

## Eksempel

- Definisjonen av kryssprodukt av  $S$  og  $T$  kunne vært skrevet slik:

$$S \times T = \{\langle s, t \rangle \mid s \in S \text{ og } t \in T\}$$

# Mengdebygger

## Notasjon

En definisjon på formen “mengden av alle elementer  $x \in S$  slik at ...” kan skrives på formen

$$\{x \mid x \in S \text{ og betingelse på } x\}.$$

En slik konstruksjon kalles en *mengdebygger*.

## Eksempel

- Definisjonen av kryssprodukt av  $S$  og  $T$  kunne vært skrevet slik:

$$S \times T = \{\langle s, t \rangle \mid s \in S \text{ og } t \in T\}$$

- $\{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ og } n \text{ er partall}\}$  definerer mengden av alle partall.

# Mengdebygger

## Notasjon

En definisjon på formen “mengden av alle elementer  $x \in S$  slik at ...” kan skrives på formen

$$\{x \mid x \in S \text{ og betingelse på } x\}.$$

En slik konstruksjon kalles en *mengdebygger*.

## Eksempel

- Definisjonen av kryssprodukt av  $S$  og  $T$  kunne vært skrevet slik:

$$S \times T = \{\langle s, t \rangle \mid s \in S \text{ og } t \in T\}$$

- $\{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ og } n \text{ er partall}\}$  definerer mengden av alle partall.
- $\{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ og } n \text{ er oddetall}\}$  definerer mengden av alle oddetall.

# Mengder av mengder

Det er mulig å konstruere mengder som inneholder andre mengder  
(med visse restriksjoner)

# Mengder av mengder

Det er mulig å konstruere mengder som inneholder andre mengder (med visse restriksjoner)

## Eksempel

- $\{\emptyset\} \neq \emptyset$



# Mengder av mengder

Det er mulig å konstruere mengder som inneholder andre mengder (med visse restriksjoner)

## Eksempel

- $\{\emptyset\} \neq \emptyset$
- $\{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \dots\} = \{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$

# Mengder av mengder

Det er mulig å konstruere mengder som inneholder andre mengder (med visse restriksjoner)

## Eksempel

- $\{\emptyset\} \neq \emptyset$
- $\{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \dots\} = \{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $\{\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \dots\} = \{\{m \mid 0 \leq m \leq n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$

# Mengder av mengder

Det er mulig å konstruere mengder som inneholder andre mengder (med visse restriksjoner)

## Eksempel

- $\{\emptyset\} \neq \emptyset$
- $\{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \dots\} = \{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $\{\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \dots\} = \{\{m \mid 0 \leq m \leq n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $\{\{0, 2, 4, 6, \dots\}, \{1, 3, 5, 7, \dots\}\}$

# Snitt av mengder av mengder

## Definisjon

*Snittet* av en mengde  $\mathcal{M}$  av mengder inneholder alle elementer som er element av alle  $M \in \mathcal{M}$ :

$$\bigcap \mathcal{M} := \{x \mid x \in M \text{ for alle } M \in \mathcal{M}\}$$

# Snitt av mengder av mengder

## Definisjon

*Snittet* av en mengde  $\mathcal{M}$  av mengder inneholder alle elementer som er element av alle  $M \in \mathcal{M}$ :

$$\bigcap \mathcal{M} := \{x \mid x \in M \text{ for alle } M \in \mathcal{M}\}$$

## Eksempel

- $\bigcap \{\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \dots\} =$

# Snitt av mengder av mengder

## Definisjon

*Snittet* av en mengde  $\mathcal{M}$  av mengder inneholder alle elementer som er element av alle  $M \in \mathcal{M}$ :

$$\bigcap \mathcal{M} := \{x \mid x \in M \text{ for alle } M \in \mathcal{M}\}$$

## Eksempel

- $\bigcap \{\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \dots\} = \{0\}$

# Snitt av mengder av mengder

## Definisjon

*Snittet* av en mengde  $\mathcal{M}$  av mengder inneholder alle elementer som er element av alle  $M \in \mathcal{M}$ :

$$\bigcap \mathcal{M} := \{x \mid x \in M \text{ for alle } M \in \mathcal{M}\}$$

## Eksempel

- $\bigcap \{\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \dots\} = \{0\}$
- $\bigcap \{\{0, 2, 4, 6, \dots\}, \{1, 3, 5, 7, \dots\}\} =$

# Snitt av mengder av mengder

## Definisjon

*Snittet* av en mengde  $\mathcal{M}$  av mengder inneholder alle elementer som er element av alle  $M \in \mathcal{M}$ :

$$\bigcap \mathcal{M} := \{x \mid x \in M \text{ for alle } M \in \mathcal{M}\}$$

## Eksempel

- $\bigcap \{\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \dots\} = \{0\}$
- $\bigcap \{\{0, 2, 4, 6, \dots\}, \{1, 3, 5, 7, \dots\}\} = \emptyset$



# Union av mengder av mengder

## Definisjon

*Unionen* av en mengde  $\mathcal{M}$  av mengder inneholder alle elementer som er element av minst en  $M \in \mathcal{M}$ :

$$\bigcup \mathcal{M} := \{x \mid x \in M \text{ for noen } M \in \mathcal{M}\}$$

# Union av mengder av mengder

## Definisjon

*Unionen* av en mengde  $\mathcal{M}$  av mengder inneholder alle elementer som er element av minst en  $M \in \mathcal{M}$ :

$$\bigcup \mathcal{M} := \{x \mid x \in M \text{ for noen } M \in \mathcal{M}\}$$

## Eksempel

- $\bigcup \{\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \dots\} =$

# Union av mengder av mengder

## Definisjon

*Unionen* av en mengde  $\mathcal{M}$  av mengder inneholder alle elementer som er element av minst en  $M \in \mathcal{M}$ :

$$\bigcup \mathcal{M} := \{x \mid x \in M \text{ for noen } M \in \mathcal{M}\}$$

## Eksempel

- $\bigcup \{\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \dots\} = \mathbb{N}$

# Union av mengder av mengder

## Definisjon

*Unionen* av en mengde  $\mathcal{M}$  av mengder inneholder alle elementer som er element av minst en  $M \in \mathcal{M}$ :

$$\bigcup \mathcal{M} := \{x \mid x \in M \text{ for noen } M \in \mathcal{M}\}$$

## Eksempel

- $\bigcup \{\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \dots\} = \mathbb{N}$
- $\bigcup \{\{0, 2, 4, 6, \dots\}, \{1, 3, 5, 7, \dots\}\} =$

# Union av mengder av mengder

## Definisjon

*Unionen* av en mengde  $\mathcal{M}$  av mengder inneholder alle elementer som er element av minst en  $M \in \mathcal{M}$ :

$$\bigcup \mathcal{M} := \{x \mid x \in M \text{ for noen } M \in \mathcal{M}\}$$

## Eksempel

- $\bigcup \{\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \dots\} = \mathbb{N}$
- $\bigcup \{\{0, 2, 4, 6, \dots\}, \{1, 3, 5, 7, \dots\}\} = \mathbb{N}$

# Relasjoner

## Definisjon (Relasjon)

- En *unær relasjon* over  $S$  er en delmengde av  $S$ .

# Relasjoner

## Definisjon (Relasjon)

- En *unær relasjon* over  $S$  er en delmengde av  $S$ .
- En *binær relasjon* fra  $S$  til  $T$  er en delmengde av  $S \times T$ .

# Relasjoner

## Definisjon (Relasjon)

- En *unær relasjon* over  $S$  er en delmengde av  $S$ .
- En *binær relasjon* fra  $S$  til  $T$  er en delmengde av  $S \times T$ .
- En *n-ær relasjon* over mengdene  $S_1, S_2, \dots, S_n$  er en delmengde av kryssproduktet  $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ .



# Relasjoner

## Definisjon (Relasjon)

- En *unær relasjon* over  $S$  er en delmengde av  $S$ .
- En *binær relasjon* fra  $S$  til  $T$  er en delmengde av  $S \times T$ .
- En *n-ær relasjon* over mengdene  $S_1, S_2, \dots, S_n$  er en delmengde av kryssproduktet  $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ .

## Eksempel

- Hvis  $S = \{a, b, c\}$ , så er  $\{a, b\}$  en unær relasjon over  $S$ .

# Relasjoner

## Definisjon (Relasjon)

- En *unær relasjon* over  $S$  er en delmengde av  $S$ .
- En *binær relasjon* fra  $S$  til  $T$  er en delmengde av  $S \times T$ .
- En *n-ær relasjon* over mengdene  $S_1, S_2, \dots, S_n$  er en delmengde av kryssproduktet  $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ .

## Eksempel

- Hvis  $S = \{a, b, c\}$ , så er  $\{a, b\}$  en unær relasjon over  $S$ .
- Hvis  $S = \{a, b\}$  og  $T = \{1, 2\}$ , så er  $\{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle\}$  en binær relasjon fra  $S$  til  $T$ .

# Relasjoner over én mengde

## Definisjon

En  *$n$ -ær relasjon* over mengden  $S$  er en delmengde av  $S^n$ .

# Relasjoner over én mengde

## Definisjon

En *n*-ær *relasjon* over mengden  $S$  er en delmengde av  $S^n$ .

## Eksempel

La  $S = \{1, 2, 3\}$ .

# Relasjoner over én mengde

## Definisjon

En  *$n$ -ær relasjon* over mengden  $S$  er en delmengde av  $S^n$ .

## Eksempel

La  $S = \{1, 2, 3\}$ .

- $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$  er en binær relasjon over  $S$ .

# Relasjoner over én mengde

## Definisjon

En  *$n$ -ær relasjon* over mengden  $S$  er en delmengde av  $S^n$ .

## Eksempel

La  $S = \{1, 2, 3\}$ .

- $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$  er en binær relasjon over  $S$ .
- $\{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$  er også en binær relasjon over  $S$ .

# Refleksive relasjoner

## Definisjon (Refleksiv)

En binær relasjon  $R$  over mengden  $S$  er *refleksiv* hvis  $\langle x, x \rangle \in R$  for alle  $x \in S$ .

# Refleksive relasjoner

## Definisjon (Refleksiv)

En binær relasjon  $R$  over mengden  $S$  er *refleksiv* hvis  $\langle x, x \rangle \in R$  for alle  $x \in S$ .

## Eksempel

La  $S = \{1, 2, 3\}$ .



# Refleksive relasjoner

## Definisjon (Refleksiv)

En binær relasjon  $R$  over mengden  $S$  er *refleksiv* hvis  $\langle x, x \rangle \in R$  for alle  $x \in S$ .

## Eksempel

La  $S = \{1, 2, 3\}$ .

- Er  $R_1 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$  refleksiv?

# Refleksive relasjoner

## Definisjon (Refleksiv)

En binær relasjon  $R$  over mengden  $S$  er **refleksiv** hvis  $\langle x, x \rangle \in R$  for alle  $x \in S$ .

## Eksempel

La  $S = \{1, 2, 3\}$ .

- Er  $R_1 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$  refleksiv?
- Hva med  $R_2 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ ?

# Symmetriske relasjoner

## Definisjon (Symmetrisk)

En binær relasjon  $R$  er *symmetrisk* hvis for alle  $x, y$  med  $\langle x, y \rangle \in R$ , også  $\langle y, x \rangle \in R$ .

# Symmetriske relasjoner

## Definisjon (Symmetrisk)

En binær relasjon  $R$  er *symmetrisk* hvis for alle  $x, y$  med  $\langle x, y \rangle \in R$ , også  $\langle y, x \rangle \in R$ .

## Eksempel

La  $S = \{1, 2, 3\}$ .

# Symmetriske relasjoner

## Definisjon (Symmetrisk)

En binær relasjon  $R$  er *symmetrisk* hvis for alle  $x, y$  med  $\langle x, y \rangle \in R$ , også  $\langle y, x \rangle \in R$ .

## Eksempel

La  $S = \{1, 2, 3\}$ .

- Er  $R_1 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$  symmetrisk?

# Symmetriske relasjoner

## Definisjon (Symmetrisk)

En binær relasjon  $R$  er *symmetrisk* hvis for alle  $x, y$  med  $\langle x, y \rangle \in R$ , også  $\langle y, x \rangle \in R$ .

## Eksempel

La  $S = \{1, 2, 3\}$ .

- Er  $R_1 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$  symmetrisk?
- Hva med  $R_2 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$ ?

# Transitive relasjoner

## Definisjon (Transitiv)

En binær relasjon  $R$  er *transitiv* hvis for alle  $x, y, z$  med  $\langle x, y \rangle \in R$  og  $\langle y, z \rangle \in R$ , også  $\langle x, z \rangle \in R$ .

# Transitive relasjoner

## Definisjon (Transitiv)

En binær relasjon  $R$  er **transitiv** hvis for alle  $x, y, z$  med  $\langle x, y \rangle \in R$  og  $\langle y, z \rangle \in R$ , også  $\langle x, z \rangle \in R$ .

## Definisjon (Ekvivalensrelasjon)

En binær relasjon over mengden  $S$  er en **ekvivalensrelasjon** hvis den er reflektiv, symmetrisk og transitiv.



# Funksjoner

## Definisjon (Funksjon)

La  $S$  og  $T$  være mengder. En *funksjon*  $f$  fra  $S$  til  $T$

# Funksjoner

## Definisjon (Funksjon)

La  $S$  og  $T$  være mengder. En *funksjon*  $f$  fra  $S$  til  $T$  er en binær relasjon fra  $S$  til  $T$

# Funksjoner

## Definisjon (Funksjon)

La  $S$  og  $T$  være mengder. En *funksjon*  $f$  fra  $S$  til  $T$  er en binær relasjon fra  $S$  til  $T$  med følgende egenskaper:

# Funksjoner

## Definisjon (Funksjon)

La  $S$  og  $T$  være mengder. En **funksjon**  $f$  fra  $S$  til  $T$  er en binær relasjon fra  $S$  til  $T$  med følgende egenskaper:

- For alle  $x \in S$  så finnes en  $y \in T$  slik at  $\langle x, y \rangle \in f$ .

# Funksjoner

## Definisjon (Funksjon)

La  $S$  og  $T$  være mengder. En **funksjon**  $f$  fra  $S$  til  $T$  er en binær relasjon fra  $S$  til  $T$  med følgende egenskaper:

- For alle  $x \in S$  så finnes en  $y \in T$  slik at  $\langle x, y \rangle \in f$ .
- Hvis  $\langle x, y \rangle \in f$  og  $\langle x, z \rangle \in f$ , så er  $y = z$ .

# Funksjoner

## Definisjon (Funksjon)

La  $S$  og  $T$  være mengder. En **funksjon**  $f$  fra  $S$  til  $T$  er en binær relasjon fra  $S$  til  $T$  med følgende egenskaper:

- For alle  $x \in S$  så finnes en  $y \in T$  slik at  $\langle x, y \rangle \in f$ .
- Hvis  $\langle x, y \rangle \in f$  og  $\langle x, z \rangle \in f$ , så er  $y = z$ .

Vi kaller  $S$  for **definisjonsmengden** til  $f$

# Funksjoner

## Definisjon (Funksjon)

La  $S$  og  $T$  være mengder. En **funksjon**  $f$  fra  $S$  til  $T$  er en binær relasjon fra  $S$  til  $T$  med følgende egenskaper:

- For alle  $x \in S$  så finnes en  $y \in T$  slik at  $\langle x, y \rangle \in f$ .
- Hvis  $\langle x, y \rangle \in f$  og  $\langle x, z \rangle \in f$ , så er  $y = z$ .

Vi kaller  $S$  for **definisjonsmengden** til  $f$  og  $T$  for **verdimengden** til  $f$ .

# Funksjoner

## Definisjon (Funksjon)

La  $S$  og  $T$  være mengder. En **funksjon**  $f$  fra  $S$  til  $T$  er en binær relasjon fra  $S$  til  $T$  med følgende egenskaper:

- For alle  $x \in S$  så finnes en  $y \in T$  slik at  $\langle x, y \rangle \in f$ .
- Hvis  $\langle x, y \rangle \in f$  og  $\langle x, z \rangle \in f$ , så er  $y = z$ .

Vi kaller  $S$  for **definisjonsmengden** til  $f$  og  $T$  for **verdimengden** til  $f$ .

## Notasjon

Hvis  $\langle x, y \rangle \in f$ , så skriver vi ofte  $f(x) = y$ .



# Funksjoner

# Funksjoner

## Eksempel

*Funksjonen  $Par : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$  definert ved*

$$Par(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x \text{ er et partall} \\ 0 & \text{hvis } x \text{ er et oddetall} \end{cases}$$

*har  $\mathbb{N}$  som definisjonsmengde og  $\{0, 1\}$  som verdimengde.*

# Injektive funksjoner

## Definisjon (Injektiv)

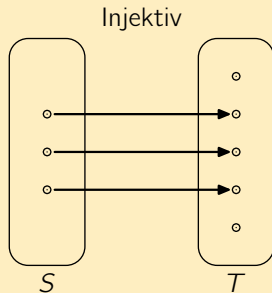
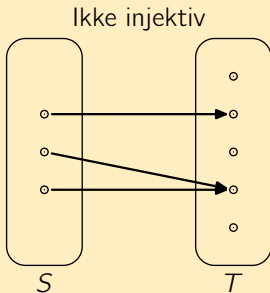
En funksjon  $f : S \rightarrow T$  er *injektiv* hvis  $f(x) \neq f(y)$  for alle  $x, y \in S$  med  $x \neq y$ . Vi sier at  $f$  er *en-til-en*.

# Injektive funksjoner

## Definisjon (Injektiv)

En funksjon  $f : S \rightarrow T$  er *injektiv* hvis  $f(x) \neq f(y)$  for alle  $x, y \in S$  med  $x \neq y$ . Vi sier at  $f$  er *en-til-en*.

## Eksempel



# Surjektive funksjoner

## Definisjon (Surjektiv)

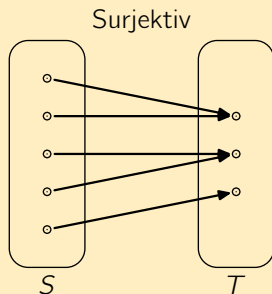
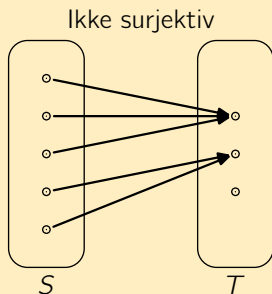
En funksjon  $f : S \rightarrow T$  er *surjektiv* hvis for alle  $y \in T$  så finnes  $x \in S$  slik at  $f(x) = y$ . Vi sier at  $f$  er *på*.

# Surjektive funksjoner

## Definisjon (Surjektiv)

En funksjon  $f : S \rightarrow T$  er **surjektiv** hvis for alle  $y \in T$  så finnes  $x \in S$  slik at  $f(x) = y$ . Vi sier at  $f$  er **på**.

## Eksempel



# Bijektive funksjoner

## Definisjon (Bijektiv)

*En funksjon er **bijektiv** hvis den er injektiv og surjektiv.*

# Bijektive funksjoner

## Definisjon (Bijektiv)

*En funksjon er **bijektiv** hvis den er injektiv og surjektiv.*

Vi sier at funksjonen er **en-til-en** og **på**, eller at vi har en **en-til-en korrespondanse**.



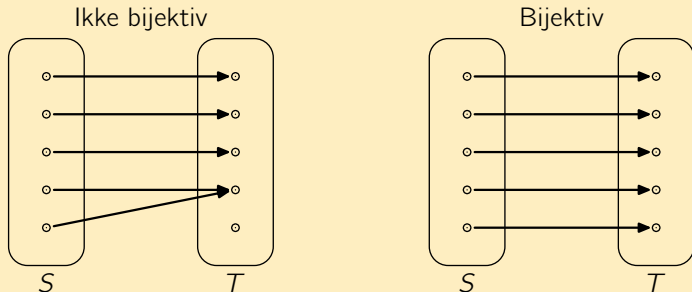
# Bijektive funksjoner

## Definisjon (Bijektiv)

En funksjon er *bijektiv* hvis den er injektiv og surjektiv.

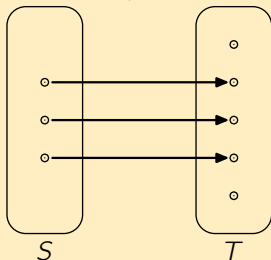
Vi sier at funksjonen er *en-til-en* og *på*, eller at vi har en *en-til-en korrespondanse*.

## Eksempel



# Injektive og surjektive funksjoner

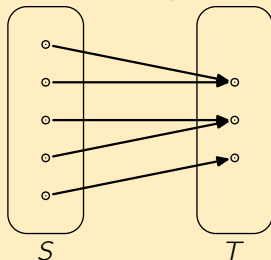
injektiv / en-til-en



for alle  $x, y \in S$ :  
 $x \neq y$  impliserer  $f(x) \neq f(y)$

*“hvert element i definisjonsmengden sendes til et unikt element i verdimengden”*

surjektiv / på

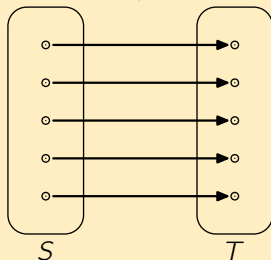


for alle  $y \in T$ :  
 det finnes  $x \in S$  slik at  $f(x) = y$

*“alle elementer i verdimengden blir truffet”*

## Bijektive funksjoner

bijektiv / en-til-en og på / en-til-en korrespondanse



- En **bijektiv** funksjon er en funksjon som er både *injektiv* og *surjektiv*:
- “Ethvert element i verdimengden blir truffet av et unikt element i definisjonsmengden”.

# Operatorer

## Definisjon (Operator)

*La  $S$  være en mengde.*

# Operatorer

## Definisjon (Operator)

*La  $S$  være en mengde.*

- En *unær operator* på  $S$  er en funksjon fra  $S$  til  $S$ .

# Operatorer

## Definisjon (Operator)

*La  $S$  være en mengde.*

- En *unær operator* på  $S$  er en funksjon fra  $S$  til  $S$ .
- En *binær operator* på  $S$  er en funksjon fra  $S \times S$  til  $S$ .

# Operatorer

## Definisjon (Operator)

La  $S$  være en mengde.

- En *unær operator* på  $S$  er en funksjon fra  $S$  til  $S$ .
- En *binær operator* på  $S$  er en funksjon fra  $S \times S$  til  $S$ .

## Eksempel

- *Suksessorfunksjonen*  $(n + 1)$  er en unær operator på  $\mathbb{N}$ .

# Operatorer

## Definisjon (Operator)

La  $S$  være en mengde.

- En *unær operator* på  $S$  er en funksjon fra  $S$  til  $S$ .
- En *binær operator* på  $S$  er en funksjon fra  $S \times S$  til  $S$ .

## Eksempel

- *Suksessorfunksjonen*  $(n + 1)$  er en *unær operator* på  $\mathbb{N}$ .
- *Addisjonsfunksjonen*  $(+)$  er en *binær operator* på  $\mathbb{N}$ .



# Operatorer

## Definisjon (Operator)

La  $S$  være en mengde.

- En *unær operator* på  $S$  er en funksjon fra  $S$  til  $S$ .
- En *binær operator* på  $S$  er en funksjon fra  $S \times S$  til  $S$ .

## Eksempel

- Suksessorfunksjonen  $(n + 1)$  er en unær operator på  $\mathbb{N}$ .
- Addisjonsfunksjonen  $(+)$  er en binær operator på  $\mathbb{N}$ .
- Subtraksjonsfunksjonen  $(-)$  er en binær operator på  $\mathbb{Z}$ .

# Multimengder

Mengder der antall forekomster av hvert element teller

# Multimengder

Mengder der antall forekomster av hvert element teller

## Definisjon (Multimengde)

En *multimengde* er et par  $\langle S, m \rangle$  der  $S$  er en mengde og  $m : S \rightarrow \mathbb{N}$ . For hver  $x \in S$  sier vi at  $m(x)$  er *multiplisiteten* til  $x$ , eller antall forekomster av  $x$  i  $S$ .

# Multimengder

Mengder der antall forekomster av hvert element teller

## Definisjon (Multimengde)

En *multimengde* er et par  $\langle S, m \rangle$  der  $S$  er en mengde og  $m : S \rightarrow \mathbb{N}$ . For hver  $x \in S$  sier vi at  $m(x)$  er *multiplisiteten* til  $x$ , eller antall forekomster av  $x$  i  $S$ .

## Eksempel

*Vi skriver multimengder som mengder:*

# Multimengder

Mengder der antall forekomster av hvert element teller

## Definisjon (Multimengde)

En *multimengde* er et par  $\langle S, m \rangle$  der  $S$  er en mengde og  $m : S \rightarrow \mathbb{N}$ . For hver  $x \in S$  sier vi at  $m(x)$  er *multiplisiteten* til  $x$ , eller antall forekomster av  $x$  i  $S$ .

## Eksempel

Vi skriver multimengder som mengder:

- I multimengden  $\{a, a, a, b, b\}$  er multiplisiteten til  $a$  og  $b$  henholdsvis 3 og 2.

# Multimengder

Mengder der antall forekomster av hvert element teller

## Definisjon (Multimengde)

En *multimengde* er et par  $\langle S, m \rangle$  der  $S$  er en mengde og  $m : S \rightarrow \mathbb{N}$ . For hver  $x \in S$  sier vi at  $m(x)$  er *multiplisiteten* til  $x$ , eller antall forekomster av  $x$  i  $S$ .

## Eksempel

Vi skriver multimengder som mengder:

- I multimengden  $\{a, a, a, b, b\}$  er multiplisiteten til  $a$  og  $b$  henholdsvis 3 og 2.
- I multimengden  $\{a, b, a, c, a, b\}$  er multiplisiteten til  $a$ ,  $b$  og  $c$  henholdsvis 3, 2 og 1.

# $\cup$ , $\cap$ , $\setminus$ og $\subseteq$ på multimengder

- Vi bruker **union** ( $\cup$ ), **snitt** ( $\cap$ ), **mengdedifferans** ( $\setminus$ ) og **delmengderelasjonen** ( $\subseteq$ ) også på multimengder.

# $\cup$ , $\cap$ , $\setminus$ og $\subseteq$ på multimengder

- Vi bruker **union** ( $\cup$ ), **snitt** ( $\cap$ ), **mengdedifferans** ( $\setminus$ ) og **delmengderelasjonen** ( $\subseteq$ ) også på multimengder.

## Eksempel



# $\cup$ , $\cap$ , $\setminus$ og $\subseteq$ på multimengder

- Vi bruker **union** ( $\cup$ ), **snitt** ( $\cap$ ), **mengdedifferans** ( $\setminus$ ) og **delmengderelasjonen** ( $\subseteq$ ) også på multimengder.

## Eksempel

- $\{a, a, b, c\} \cup \{a, c\} = \{a, a, a, b, c, c\}$

# $\cup$ , $\cap$ , $\setminus$ og $\subseteq$ på multimengder

- Vi bruker **union** ( $\cup$ ), **snitt** ( $\cap$ ), **mengdedifferans** ( $\setminus$ ) og **delmengderelasjonen** ( $\subseteq$ ) også på multimengder.

## Eksempel

- $\{a, a, b, c\} \cup \{a, c\} = \{a, a, a, b, c, c\}$   
*d.v.s.*  $m(x) = m_1(x) + m_2(x)$

# $\cup$ , $\cap$ , $\setminus$ og $\subseteq$ på multimengder

- Vi bruker **union** ( $\cup$ ), **snitt** ( $\cap$ ), **mengdedifferans** ( $\setminus$ ) og **delmengderelasjonen** ( $\subseteq$ ) også på multimengder.

## Eksempel

- $\{a, a, b, c\} \cup \{a, c\} = \{a, a, a, b, c, c\}$   
*d.v.s.*  $m(x) = m_1(x) + m_2(x)$
- $\{a, a, a, b, c\} \cap \{a, a, d\} = \{a, a\}$

# $\cup$ , $\cap$ , $\setminus$ og $\subseteq$ på multimengder

- Vi bruker **union** ( $\cup$ ), **snitt** ( $\cap$ ), **mengdedifferans** ( $\setminus$ ) og **delmengderelasjonen** ( $\subseteq$ ) også på multimengder.

## Eksempel

- $\{a, a, b, c\} \cup \{a, c\} = \{a, a, a, b, c, c\}$   
*d.v.s.*  $m(x) = m_1(x) + m_2(x)$
- $\{a, a, a, b, c\} \cap \{a, a, d\} = \{a, a\}$   
*d.v.s.*  $m(x) = \min(m_1(x), m_2(x))$

# $\cup$ , $\cap$ , $\setminus$ og $\subseteq$ på multimengder

- Vi bruker **union** ( $\cup$ ), **snitt** ( $\cap$ ), **mengdedifferans** ( $\setminus$ ) og **deltmengderelasjonen** ( $\subseteq$ ) også på multimengder.

## Eksempel

- $\{a, a, b, c\} \cup \{a, c\} = \{a, a, a, b, c, c\}$   
*d.v.s.*  $m(x) = m_1(x) + m_2(x)$
- $\{a, a, a, b, c\} \cap \{a, a, d\} = \{a, a\}$   
*d.v.s.*  $m(x) = \min(m_1(x), m_2(x))$
- $\{a, a, a, b, c\} \setminus \{a, a, d\} = \{a, b, c\}$

# $\cup$ , $\cap$ , $\setminus$ og $\subseteq$ på multimengder

- Vi bruker **union** ( $\cup$ ), **snitt** ( $\cap$ ), **mengdedifferans** ( $\setminus$ ) og **delmengderelasjonen** ( $\subseteq$ ) også på multimengder.

## Eksempel

- $\{a, a, b, c\} \cup \{a, c\} = \{a, a, a, b, c, c\}$   
d.v.s.  $m(x) = m_1(x) + m_2(x)$
- $\{a, a, a, b, c\} \cap \{a, a, d\} = \{a, a\}$   
d.v.s.  $m(x) = \min(m_1(x), m_2(x))$
- $\{a, a, a, b, c\} \setminus \{a, a, d\} = \{a, b, c\}$   
d.v.s.  $m(x) = \max(0, m_1(x) - m_2(x))$

# $\cup$ , $\cap$ , $\setminus$ og $\subseteq$ på multimengder

- Vi bruker **union** ( $\cup$ ), **snitt** ( $\cap$ ), **mengdedifferans** ( $\setminus$ ) og **delmengderelasjonen** ( $\subseteq$ ) også på multimengder.

## Eksempel

- $\{a, a, b, c\} \cup \{a, c\} = \{a, a, a, b, c, c\}$   
d.v.s.  $m(x) = m_1(x) + m_2(x)$
- $\{a, a, a, b, c\} \cap \{a, a, d\} = \{a, a\}$   
d.v.s.  $m(x) = \min(m_1(x), m_2(x))$
- $\{a, a, a, b, c\} \setminus \{a, a, d\} = \{a, b, c\}$   
d.v.s.  $m(x) = \max(0, m_1(x) - m_2(x))$
- $\{a, a\} \subseteq \{a, a, b, c\}$ , men  $\{a, a, a\} \not\subseteq \{a, a, b, c\}$

# $\cup$ , $\cap$ , $\setminus$ og $\subseteq$ på multimengder

- Vi bruker **union** ( $\cup$ ), **snitt** ( $\cap$ ), **mengdedifferans** ( $\setminus$ ) og **delmengderelasjonen** ( $\subseteq$ ) også på multimengder.

## Eksempel

- $\{a, a, b, c\} \cup \{a, c\} = \{a, a, a, b, c, c\}$   
d.v.s.  $m(x) = m_1(x) + m_2(x)$
- $\{a, a, a, b, c\} \cap \{a, a, d\} = \{a, a\}$   
d.v.s.  $m(x) = \min(m_1(x), m_2(x))$
- $\{a, a, a, b, c\} \setminus \{a, a, d\} = \{a, b, c\}$   
d.v.s.  $m(x) = \max(0, m_1(x) - m_2(x))$
- $\{a, a\} \subseteq \{a, a, b, c\}$ , men  $\{a, a, a\} \not\subseteq \{a, a, b, c\}$   
d.v.s.  $m_1(x) \leq m_2(x)$  for alle  $x$ .



# $\cup$ , $\cap$ , $\setminus$ og $\subseteq$ på multimengder

- Vi bruker **union** ( $\cup$ ), **snitt** ( $\cap$ ), **mengdedifferans** ( $\setminus$ ) og **delmengderelasjonen** ( $\subseteq$ ) også på multimengder.

## Eksempel

- $\{a, a, b, c\} \cup \{a, c\} = \{a, a, a, b, c, c\}$   
d.v.s.  $m(x) = m_1(x) + m_2(x)$
- $\{a, a, a, b, c\} \cap \{a, a, d\} = \{a, a\}$   
d.v.s.  $m(x) = \min(m_1(x), m_2(x))$
- $\{a, a, a, b, c\} \setminus \{a, a, d\} = \{a, b, c\}$   
d.v.s.  $m(x) = \max(0, m_1(x) - m_2(x))$
- $\{a, a\} \subseteq \{a, a, b, c\}$ , men  $\{a, a, a\} \not\subseteq \{a, a, b, c\}$   
d.v.s.  $m_1(x) \leq m_2(x)$  for alle  $x$ .

- Vi bruker  $\emptyset$  om den tomme multimengden.

# Kardinalitet

## Definisjon (Kardinalitet)

- To mengder  $S$  og  $T$  har *lik kardinalitet* hvis det finnes en bijeksjon fra  $S$  til  $T$ .

# Kardinalitet

## Definisjon (Kardinalitet)

- To mengder  $S$  og  $T$  har *lik kardinalitet* hvis det finnes en bijeksjon fra  $S$  til  $T$ .
- Mengden  $S$  har *kardinalitet mindre eller lik*  $T$  hvis det finnes en injektiv funksjon fra  $S$  til  $T$ .

# Kardinalitet

## Definisjon (Kardinalitet)

- To mengder  $S$  og  $T$  har **lik kardinalitet** hvis det finnes en bijeksjon fra  $S$  til  $T$ .
- Mengden  $S$  har **kardinalitet mindre eller lik**  $T$  hvis det finnes en injektiv funksjon fra  $S$  til  $T$ .
- Hvis  $S$  er en endelig mengde, så er kardinaliteten til  $S$  lik antall elementer i  $S$ .

# Kardinalitet

## Definisjon (Kardinalitet)

- To mengder  $S$  og  $T$  har *lik kardinalitet* hvis det finnes en bijeksjon fra  $S$  til  $T$ .
- Mengden  $S$  har *kardinalitet mindre eller lik*  $T$  hvis det finnes en injektiv funksjon fra  $S$  til  $T$ .
- Hvis  $S$  er en endelig mengde, så er kardinaliteten til  $S$  lik antall elementer i  $S$ .
- Vi bruker notasjonen  $|S|$  for kardinaliteten til  $S$ .

# Kardinalitet

## Definisjon (Kardinalitet)

- To mengder  $S$  og  $T$  har **lik kardinalitet** hvis det finnes en bijeksjon fra  $S$  til  $T$ .
- Mengden  $S$  har **kardinalitet mindre eller lik**  $T$  hvis det finnes en injektiv funksjon fra  $S$  til  $T$ .
- Hvis  $S$  er en endelig mengde, så er kardinaliteten til  $S$  lik antall elementer i  $S$ .
- Vi bruker notasjonen  $|S|$  for kardinaliteten til  $S$ .

## Teorem (Bernstein)

Hvis det finnes en injektiv funksjon  $f : S \rightarrow T$  og en injektiv funksjon  $g : T \rightarrow S$ , så finnes det også en bijeksjon  $h : S \rightarrow T$ .

## Eksempel

*Hva er kardinaliteten til*

- $\{a, b, c\}$ ?

## Eksempel

*Hva er kardinaliteten til*

- $\{a, b, c\}$ ?
- $\{a, b, a\}$ ?



## Eksempel

*Hva er kardinaliteten til*

- $\{a, b, c\}$ ?
- $\{a, b, a\}$ ?
- $\{a\}$ ?

## Eksempel

*Hva er kardinaliteten til*

- $\{a, b, c\}$ ?
- $\{a, b, a\}$ ?
- $\{a\}$ ?
- $\emptyset$ ?

## Eksempel

- $\mathbb{N}$  = mengden av alle naturlige tall  $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
- $2\mathbb{N}$  = mengden av alle partall  $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$

## Eksempel

- $\mathbb{N}$  = mengden av alle naturlige tall  $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
- $2\mathbb{N}$  = mengden av alle partall  $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$

$f(x) = 2x$  er en bijeksjon fra  $\mathbb{N}$  til  $2\mathbb{N}$ , så  $\mathbb{N}$  og  $2\mathbb{N}$  har samme kardinalitet.

## Eksempel

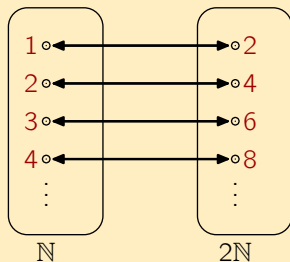
- $\mathbb{N}$  = mengden av alle naturlige tall  $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
- $2\mathbb{N}$  = mengden av alle partall  $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$

$f(x) = 2x$  er en bijeksjon fra  $\mathbb{N}$  til  $2\mathbb{N}$ , så  $\mathbb{N}$  og  $2\mathbb{N}$  har samme kardinalitet. Vi skriver  $|\mathbb{N}| = |2\mathbb{N}|$ .

## Eksempel

- $\mathbb{N}$  = mengden av alle naturlige tall  $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
- $2\mathbb{N}$  = mengden av alle partall  $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$

$f(x) = 2x$  er en bijeksjon fra  $\mathbb{N}$  til  $2\mathbb{N}$ , så  $\mathbb{N}$  og  $2\mathbb{N}$  har samme kardinalitet.  
Vi skriver  $|\mathbb{N}| = |2\mathbb{N}|$ .



# Tellbart vs. overtellbart

## Definisjon (Tellbar)

*En uendelig mengde  $S$  er **tellbar** hvis det finnes en en-til-en korrespondanse mellom elementene i  $S$  og de naturlige tallene.*

# Tellbart vs. overtellbart

## Definisjon (Tellbar)

En uendelig mengde  $S$  er *tellbar* hvis det finnes en en-til-en korrespondanse mellom elementene i  $S$  og de naturlige tallene. Hvis ikke, er  $S$  *overtellbar*.



# Tellbart vs. overtellbart

## Definisjon (Tellbar)

En uendelig mengde  $S$  er *tellbar* hvis det finnes en en-til-en korrespondanse mellom elementene i  $S$  og de naturlige tallene. Hvis ikke, er  $S$  *overtellbar*.

- Alle endelige mengder er tellbare.

# Tellbart vs. overtellbart

## Definisjon (Tellbar)

*En uendelig mengde  $S$  er **tellbar** hvis det finnes en en-til-en korrespondanse mellom elementene i  $S$  og de naturlige tallene. Hvis ikke, er  $S$  **overtellbar**.*

- Alle endelige mengder er tellbare.
- Når en uendelig mengde  $S$  er tellbar finnes det en bijektiv funksjon fra  $S$  til  $\mathbb{N}$ .

# Tellbart vs. overtellbart

## Definisjon (Tellbar)

En uendelig mengde  $S$  er **tellbar** hvis det finnes en en-til-en korrespondanse mellom elementene i  $S$  og de naturlige tallene. Hvis ikke, er  $S$  **overtellbar**.

- Alle endelige mengder er tellbare.
- Når en uendelig mengde  $S$  er tellbar finnes det en bijektiv funksjon fra  $S$  til  $\mathbb{N}$ .

## Eksempel

- Mengden  $2\mathbb{N}$  av alle partall er tellbar.

# Tellbart vs. overtellbart

## Definisjon (Tellbar)

En uendelig mengde  $S$  er *tellbar* hvis det finnes en en-til-en korrespondanse mellom elementene i  $S$  og de naturlige tallene. Hvis ikke, er  $S$  *overtellbar*.

- Alle endelige mengder er tellbare.
- Når en uendelig mengde  $S$  er tellbar finnes det en bijektiv funksjon fra  $S$  til  $\mathbb{N}$ .

## Eksempel

- Mengden  $2\mathbb{N}$  av alle partall er tellbar.
- Mengden  $\mathbb{B}$  av binære tall er tellbar.

# Tellbart vs. overtellbart

## Definisjon (Tellbar)

En uendelig mengde  $S$  er **tellbar** hvis det finnes en en-til-en korrespondanse mellom elementene i  $S$  og de naturlige tallene. Hvis ikke, er  $S$  **overtellbar**.

- Alle endelige mengder er tellbare.
- Når en uendelig mengde  $S$  er tellbar finnes det en bijektiv funksjon fra  $S$  til  $\mathbb{N}$ .

## Eksempel

- Mengden  $2\mathbb{N}$  av alle partall er tellbar.
- Mengden  $\mathbb{B}$  av binære tall er tellbar.
- Mengden  $\mathbb{Q}$  av brøktall er tellbar.

# Tellbart vs. overtellbart

## Definisjon (Tellbar)

En uendelig mengde  $S$  er *tellbar* hvis det finnes en en-til-en korrespondanse mellom elementene i  $S$  og de naturlige tallene. Hvis ikke, er  $S$  *overtellbar*.

- Alle endelige mengder er tellbare.
- Når en uendelig mengde  $S$  er tellbar finnes det en bijektiv funksjon fra  $S$  til  $\mathbb{N}$ .

## Eksempel

- Mengden  $2\mathbb{N}$  av alle partall er tellbar.
- Mengden  $\mathbb{B}$  av binære tall er tellbar.
- Mengden  $\mathbb{Q}$  av brøktall er tellbar.
- Mengden av nålevende mennesker er tellbar.

# Tellbart vs. overtellbart

## Definisjon (Tellbar)

En uendelig mengde  $S$  er *tellbar* hvis det finnes en en-til-en korrespondanse mellom elementene i  $S$  og de naturlige tallene. Hvis ikke, er  $S$  *overtellbar*.

- Alle endelige mengder er tellbare.
- Når en uendelig mengde  $S$  er tellbar finnes det en bijektiv funksjon fra  $S$  til  $\mathbb{N}$ .

## Eksempel

- Mengden  $2\mathbb{N}$  av alle partall er tellbar.
- Mengden  $\mathbb{B}$  av binære tall er tellbar.
- Mengden  $\mathbb{Q}$  av brøktall er tellbar.
- Mengden av nålevende mennesker er tellbar.
- Mengden  $\mathbb{R}$  av reelle tall er *ikke* tellbar.

## 1 Mengdelære

## 2 Induktive definisjoner og bevis

- Induktivt definerte mengder
- Induktivt definerte funksjoner
- Induktive bevis



# Induktive definisjoner

## Definisjon (Induktiv definisjon)

Å definere en mengde *induktivt* betyr å konstruere den minste mengden som inneholder en gitt mengde  $B$ —kalt en *basismengde*—og som er lukket under gitte operasjoner.

# Induktive definisjoner

## Definisjon (Induktiv definisjon)

Å definere en mengde *induktivt* betyr å konstruere den minste mengden som inneholder en gitt mengde  $B$ —kalt en *basismengde*—og som er lukket under gitte operasjoner.

## Eksempel

Mengden  $\mathbb{N}$  av naturlige tall kan defineres induktivt som minste mengde  $\mathbb{N}$  med

- $0 \in \mathbb{N}$ , og
- hvis  $x \in \mathbb{N}$ , så  $x + 1 \in \mathbb{N}$ .

Her er basismengden  $\{0\}$  og  $\mathbb{N}$  er lukket under suksessorfunksjonen  $(x+1)$ .

## Eksempel

Mengden  $\mathbb{B}$  av binære tall kan defineres som minste mengde så at

- 0 og 1 er binære tall, og
- hvis  $b$  er et binært tall, så er  $b0$  og  $b1$  binære tall.

## Eksempel

Mengden  $\mathbb{B}$  av binære tall kan defineres som minste mengde så at

- 0 og 1 er binære tall, og
- hvis  $b$  er et binært tall, så er  $b0$  og  $b1$  binære tall.

steg 0: 0    1

## Eksempel

Mengden  $\mathbb{B}$  av binære tall kan defineres som minste mengde så at

- 0 og 1 er binære tall, og
- hvis  $b$  er et binært tall, så er  $b0$  og  $b1$  binære tall.

steg 0: 0    1

steg 1: 00   10   01   11

## Eksempel

Mengden  $\mathbb{B}$  av binære tall kan defineres som minste mengde så at

- 0 og 1 er binære tall, og
- hvis  $b$  er et binært tall, så er  $b0$  og  $b1$  binære tall.

steg 0: 0    1

steg 1: 00   10   01   11

steg 2: 000   100   010   110   001   101   011   111

## Eksempel

Mengden  $\mathbb{B}$  av binære tall kan defineres som minste mengde så at

- 0 og 1 er binære tall, og
- hvis  $b$  er et binært tall, så er  $b0$  og  $b1$  binære tall.

steg 0: 0    1  
steg 1: 00   10   01   11  
steg 2: 000   100   010   110   001   101   011   111  
⋮

## Eksempel

Mengden  $S$  av symmetriske strenger over alfabetet  $\{a, b\}$  kan defineres induktivt som minste mengde  $S$  slik at

- $\epsilon \in S$  (den tomme strengen),
- hvis  $x \in S$ , så  $axa \in S$  og  $bxb \in S$ .



## Eksempel

Mengden  $S$  av symmetriske strenger over alfabetet  $\{a, b\}$  kan defineres induktivt som minste mengde  $S$  slik at

- $\epsilon \in S$  (den tomme strengen),
- hvis  $x \in S$ , så  $axa \in S$  og  $bxb \in S$ .

steg 0:  $\epsilon$

## Eksempel

Mengden  $S$  av symmetriske strenger over alfabetet  $\{a, b\}$  kan defineres induktivt som minste mengde  $S$  slik at

- $\epsilon \in S$  (den tomme strengen),
- hvis  $x \in S$ , så  $axa \in S$  og  $bxb \in S$ .

steg 0:  $\epsilon$

steg 1:  $aa$      $bb$

## Eksempel

Mengden  $S$  av symmetriske strenger over alfabetet  $\{a, b\}$  kan defineres induktivt som minste mengde  $S$  slik at

- $\epsilon \in S$  (den tomme strengen),
- hvis  $x \in S$ , så  $axa \in S$  og  $bxb \in S$ .

steg 0:  $\epsilon$

steg 1:  $aa$   $bb$

steg 2:  $aaaa$   $abba$   $baab$   $bbbb$

## Eksempel

Mengden  $S$  av symmetriske strenger over alfabetet  $\{a, b\}$  kan defineres induktivt som minste mengde  $S$  slik at

- $\epsilon \in S$  (den tomme strengen),
- hvis  $x \in S$ , så  $axa \in S$  og  $bxb \in S$ .

steg 0:  $\epsilon$

steg 1:  $aa$      $bb$

steg 2:  $aaaa$     $abba$     $baab$     $bbbb$

$\vdots$

# Hvorfor den minste mengden?

Det er mange mengder som inkluderer  $B$  og som er lukket under gitte operasjoner.

## Eksempel

*Hvilke mengder  $N$  oppfyller:*

- $0 \in N$ , og
- hvis  $x \in N$ , så  $x + 1 \in N$ ?

# Hvorfor den minste mengden?

Det er mange mengder som inkluderer  $B$  og som er lukket under gitte operasjoner.

## Eksempel

*Hvilke mengder  $N$  oppfyller:*

- $0 \in N$ , og
- hvis  $x \in N$ , så  $x + 1 \in N$ ?

*For eksempel:*

- $\mathbb{N}$
- $\mathbb{Z}$
- $\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\}$

# Hva betyr egentlig 'minst'?

- La

$$\mathcal{M} := \{M \mid B \subseteq M \text{ og } M \text{ er lukket under operasjonene}\}$$

# Hva betyr egentlig 'minst'?

- La

$$\mathcal{M} := \{M \mid B \subseteq M \text{ og } M \text{ er lukket under operasjonene}\}$$

- $\mathcal{M}$  inneholder alle  $M$  som oppfyller kravene



# Hva betyr egentlig 'minst'?

- La

$$\mathcal{M} := \{M \mid B \subseteq M \text{ og } M \text{ er lukket under operasjonene}\}$$

- $\mathcal{M}$  inneholder alle  $M$  som oppfyller kravene
- Ta snittet av alle sånne mengder:

$$M^* := \bigcap \mathcal{M}$$

# Hva betyr egentlig 'minst'?

- La

$$\mathcal{M} := \{M \mid B \subseteq M \text{ og } M \text{ er lukket under operasjonene}\}$$

- $\mathcal{M}$  inneholder alle  $M$  som oppfyller kravene
- Ta snittet av alle sånne mengder:

$$M^* := \bigcap \mathcal{M}$$

- Da er  $M^* \in \mathcal{M}$ .

# Hva betyr egentlig 'minst'?

- La

$$\mathcal{M} := \{M \mid B \subseteq M \text{ og } M \text{ er lukket under operasjonene}\}$$

- $\mathcal{M}$  inneholder alle  $M$  som oppfyller kravene
- Ta snittet av alle sånne mengder:

$$M^* := \bigcap \mathcal{M}$$

- Da er  $M^* \in \mathcal{M}$ .
- Også er  $M^* \subseteq M$  for alle  $M \in \mathcal{M}$ .

# Hva betyr egentlig 'minst'?

- La

$$\mathcal{M} := \{M \mid B \subseteq M \text{ og } M \text{ er lukket under operasjonene}\}$$

- $\mathcal{M}$  inneholder alle  $M$  som oppfyller kravene
- Ta snittet av alle sånne mengder:

$$M^* := \bigcap \mathcal{M}$$

- Da er  $M^* \in \mathcal{M}$ .
- Også er  $M^* \subseteq M$  for alle  $M \in \mathcal{M}$ .
- Hvis  $N \subseteq M$  for alle  $M \in \mathcal{M}$  for noen mengde  $N \in \mathcal{M}$ , så er  $N = M^*$ .

# Hva betyr egentlig 'minst'?

- La

$$\mathcal{M} := \{M \mid B \subseteq M \text{ og } M \text{ er lukket under operasjonene}\}$$

- $\mathcal{M}$  inneholder alle  $M$  som oppfyller kravene
- Ta snittet av alle sånne mengder:

$$M^* := \bigcap \mathcal{M}$$

- Da er  $M^* \in \mathcal{M}$ .
- Også er  $M^* \subseteq M$  for alle  $M \in \mathcal{M}$ .
- Hvis  $N \subseteq M$  for alle  $M \in \mathcal{M}$  for noen mengde  $N \in \mathcal{M}$ , så er  $N = M^*$ .
- $M^*$  er altså den entydige minste mengden i  $\mathcal{M}$  med hensyn til  $\subseteq$ .

# Induktiv definisjon av en funksjon

Hvis en mengde  $M$  er definert induktivt, så er det naturlig å definere funksjoner  $M \rightarrow X$  induktivt.

# Induktiv definisjon av en funksjon

Hvis en mengde  $M$  er definert induktivt, så er det naturlig å definere funksjoner  $M \rightarrow X$  induktivt.

## Eksempel

Definer funksjonen  $d : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  induktivt ved

- $d(0) := 0$
- $d(n + 1) := d(n) + 1 + 1$  for alle  $n \in \mathbb{N}$

# Induktiv definisjon av en funksjon

Hvis en mengde  $M$  er definert induktivt, så er det naturlig å definere funksjoner  $M \rightarrow X$  induktivt.

## Eksempel

Definer funksjonen  $d : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  induktivt ved

- $d(0) := 0$
- $d(n + 1) := d(n) + 1 + 1$  for alle  $n \in \mathbb{N}$

Dette definerer  $d$  som minste relasjon  $\subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  som oppfyller

- $\langle 0, 0 \rangle \in d$  og
- $\langle n + 1, m + 1 + 1 \rangle \in d$  for alle  $\langle n, m \rangle \in d$ .



## Eksempel (Naturlig tall representert av binær tall)

- $v(0) = 0$
- $v(1) = 1$
- $v(b0) = 2v(b)$  for alle  $b \in \mathbb{B}$
- $v(b1) = 2v(b) + 1$  for alle  $b \in \mathbb{B}$

## Eksempel (Naturlig tall representert av binær tall)

- $v(0) = 0$
- $v(1) = 1$
- $v(b0) = 2v(b)$  for alle  $b \in \mathbb{B}$
- $v(b1) = 2v(b) + 1$  for alle  $b \in \mathbb{B}$

## Eksempel (Lengden av symmetrisk streng)

- $l(\epsilon) = 0$
- $l(axa) = l(x) + 2$  for alle  $x \in S$
- $l(bxb) = l(x) + 2$  for alle  $x \in S$

# Strukturell induksjon

For å vise at alle naturlige tall  $n \in \mathbb{N}$  har et egenskap  $P(n)$

- Vis at egenskapet holder for 0, d.v.s.  $P(0)$
- For alle  $n \in \mathbb{N}$  med  $P(n)$ , vis at  $P(n + 1)$

# Strukturell induksjon

For å vise at alle naturlige tall  $n \in \mathbb{N}$  har et egenskap  $P(n)$

- Vis at egenskapet holder for 0, d.v.s.  $P(0)$
- For alle  $n \in \mathbb{N}$  med  $P(n)$ , vis at  $P(n+1)$

## Eksempel

For å vise at  $d(n) = 2n$  for alle  $n \in \mathbb{N}$ , definer:

$$P(n) \Leftrightarrow d(n) = 2n$$

- $P(0)$ :  $d(0) = 2 \cdot 0$ , gjelder enligt def. av  $d$
- Under antakelsen  $P(n)$ , d.v.s.  $d(n) = 2n$ , vis  $P(n+1)$ , d.v.s.  $d(n+1) = 2(n+1)$ .

For å vise at alle binære tall  $b \in \mathbb{B}$  har et egenskap  $P(b)$

- Vis at egenskapet holder for 0, d.v.s.  $P(0)$
- Vis at egenskapet holder for 1, d.v.s.  $P(1)$
- For alle  $b \in \mathbb{B}$  med  $P(b)$ , vis at  $P(b0)$
- For alle  $n \in \mathbb{B}$  med  $P(b)$ , vis at  $P(b1)$

For å vise at alle binære tall  $b \in \mathbb{B}$  har et egenskap  $P(b)$

- Vis at egenskapet holder for 0, d.v.s.  $P(0)$
- Vis at egenskapet holder for 1, d.v.s.  $P(1)$
- For alle  $b \in \mathbb{B}$  med  $P(b)$ , vis at  $P(b0)$
- For alle  $n \in \mathbb{B}$  med  $P(b)$ , vis at  $P(b1)$

For å vise at alle symmetriske strenger  $x \in S$  har et egenskap  $P(x)$

- Vis at egenskapet holder for  $\epsilon$ , d.v.s.  $P(\epsilon)$
- For alle  $x \in S$  med  $P(x)$ , vis at  $P(axa)$
- For alle  $x \in s$  med  $P(x)$ , vis at  $P(bxb)$

Vis at  $v(b) = v(0b)$  for alle  $b \in \mathbb{B}$ .

Vis at  $v(b) = v(0b)$  for alle  $b \in \mathbb{B}$ .

- $P(b) \quad :\Leftrightarrow \quad v(b) = v(0b)$



Vis at  $v(b) = v(0b)$  for alle  $b \in \mathbb{B}$ .

- $P(b) \quad :\Leftrightarrow \quad v(b) = v(0b)$
- $P(0): \quad v(0) = 0 = 2 \cdot 0 = 2v(0) = v(00)$

Vis at  $v(b) = v(0b)$  for alle  $b \in \mathbb{B}$ .

- $P(b) \quad :\Leftrightarrow \quad v(b) = v(0b)$
- $P(0): \quad v(0) = 0 = 2 \cdot 0 = 2v(0) = v(00)$
- $P(1): \quad v(1) = 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 2v(0) + 1 = v(01)$

Vis at  $v(b) = v(0b)$  for alle  $b \in \mathbb{B}$ .

- $P(b) \quad :\Leftrightarrow \quad v(b) = v(0b)$
- $P(0): \quad v(0) = 0 = 2 \cdot 0 = 2v(0) = v(00)$
- $P(1): \quad v(1) = 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 2v(0) + 1 = v(01)$
- Anta  $P(b)$ , d.v.s.  $v(b) = v(0b)$ .

Vis at  $v(b) = v(0b)$  for alle  $b \in \mathbb{B}$ .

- $P(b) \quad :\Leftrightarrow \quad v(b) = v(0b)$
- $P(0): \quad v(0) = 0 = 2 \cdot 0 = 2v(0) = v(00)$
- $P(1): \quad v(1) = 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 2v(0) + 1 = v(01)$
- Anta  $P(b)$ , d.v.s.  $v(b) = v(0b)$ .
  - $P(b0): \quad v(b0) = 2v(b) = 2v(0b) = v(0b0)$

Vis at  $v(b) = v(0b)$  for alle  $b \in \mathbb{B}$ .

- $P(b) \quad :\Leftrightarrow \quad v(b) = v(0b)$
- $P(0): \quad v(0) = 0 = 2 \cdot 0 = 2v(0) = v(00)$
- $P(1): \quad v(1) = 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 2v(0) + 1 = v(01)$
- Anta  $P(b)$ , d.v.s.  $v(b) = v(0b)$ .
  - $P(b0): \quad v(b0) = 2v(b) = 2v(0b) = v(0b0)$
  - $P(b1): \quad v(b1) = 2v(b) + 1 = 2v(0b) + 1 = v(0b1)$

# Hvorfor er strukturell induksjon korrekt?

- La  $M$  være en induktivt definert mengde og  $P$  et egenskap

# Hvorfor er strukturell induksjon korrekt?

- La  $M$  være en induktivt definert mengde og  $P$  et egenskap
- Undersøk mengden  $N$  av alle  $x \in M$  med  $P(x)$ .

# Hvorfor er strukturell induksjon korrekt?

- La  $M$  være en induktivt definert mengde og  $P$  et egenskap
- Undersøk mengden  $N$  av alle  $x \in M$  med  $P(x)$ .
- Se på induktivt bevis:



# Hvorfor er strukturell induksjon korrekt?

- La  $M$  være en induktivt definert mengde og  $P$  et egenskap
- Undersøk mengden  $N$  av alle  $x \in M$  med  $P(x)$ .
- Se på induktivt bevis:
  - Basis:  $P(b)$  for alle  $b \in B$   
 $\Rightarrow B \subseteq N$

# Hvorfor er strukturell induksjon korrekt?

- La  $M$  være en induktivt definert mengde og  $P$  et egenskap
- Undersøk mengden  $N$  av alle  $x \in M$  med  $P(x)$ .
- Se på induktivt bevis:
  - Basis:  $P(b)$  for alle  $b \in B$   
 $\Rightarrow B \subseteq N$
  - Operasjoner:  $P(x)$  og  $P(y)$  impliserer  $P(f(x, y))$  for alle  $x, y \in M$   
 $\Rightarrow f(x, y) \in N$  for alle  $x, y \in N$ .

# Hvorfor er strukturell induksjon korrekt?

- La  $M$  være en induktivt definert mengde og  $P$  et egenskap
- Undersøk mengden  $N$  av alle  $x \in M$  med  $P(x)$ .
- Se på induktivt bevis:
  - Basis:  $P(b)$  for alle  $b \in B$   
 $\Rightarrow B \subseteq N$
  - Operasjoner:  $P(x)$  og  $P(y)$  impliserer  $P(f(x, y))$  for alle  $x, y \in M$   
 $\Rightarrow f(x, y) \in N$  for alle  $x, y \in N$ .
- Derfor,  $N \in \mathcal{M}$ , som vi definert tidligere!

# Hvorfor er strukturell induksjon korrekt?

- La  $M$  være en induktivt definert mengde og  $P$  et egenskap
- Undersøk mengden  $N$  av alle  $x \in M$  med  $P(x)$ .
- Se på induktivt bevis:
  - Basis:  $P(b)$  for alle  $b \in B$   
 $\Rightarrow B \subseteq N$
  - Operasjoner:  $P(x)$  og  $P(y)$  impliserer  $P(f(x, y))$  for alle  $x, y \in M$   
 $\Rightarrow f(x, y) \in N$  for alle  $x, y \in N$ .
- Derfor,  $N \in \mathcal{M}$ , som vi definert tidligere!
- $M \subseteq N$  fordi  $M$  er minst i  $\mathcal{M}$ .

# Hvorfor er strukturell induksjon korrekt?

- La  $M$  være en induktivt definert mengde og  $P$  et egenskap
- Undersøk mengden  $N$  av alle  $x \in M$  med  $P(x)$ .
- Se på induktivt bevis:
  - Basis:  $P(b)$  for alle  $b \in B$   
 $\Rightarrow B \subseteq N$
  - Operasjoner:  $P(x)$  og  $P(y)$  impliserer  $P(f(x, y))$  for alle  $x, y \in M$   
 $\Rightarrow f(x, y) \in N$  for alle  $x, y \in N$ .
- Derfor,  $N \in \mathcal{M}$ , som vi definert tidligere!
- $M \subseteq N$  fordi  $M$  er minst i  $\mathcal{M}$ .
- Med andre ord,  $P(x)$  for alle  $x \in M$ .