Forelesning 0: Mengdelære, Induksjon

Martin Giese - 23. januar 2008

1 Mengdelære

1.1 Mengder

Mengder

Definisjon 1.1.

- *En mengde er en endelig eller uendelig samling objekter der innbyrdes rekkefølge og antall forekomster av hvert objekt ignoreres.*
- *Objektene i en mengde kalles elementer.*
- *Hvis a er element i mengden S, skriver vi $a \in S$. Hvis a* ikke *er element i S, skriver vi $a \notin S$.*
- *To mengder S og T er* like, *$S = T$, hvis de inneholder de samme elementene.*

Notasjon. *Mengden med elementene a, b, c og d skrives ofte $\{a, b, c, d\}$.*

Spørsmål: Hvor mange elementer har $\{a, b, c, d\}$?

Mengder

Antagelse: $a, b, c, d, 1, 2, \gamma, \Phi$ er alle forskellige

Eksempel.

- $a \in \{a, b, c\}$
- $d \notin \{a, b, c\}$
- $1 \in \{a, 1, \gamma, \Phi\}$
- $2 \notin \{a, 1, \gamma, \Phi\}$
- $\{a, b\} = \{b, a\}$
- $\{a, a, b\} = \{a, b\}$
- $\{a, b\} \neq \{b, c\}$ *(mengdene er ulike)*

Noen spesielle mengder

Definisjon 1.2 (Den tomme mengden)**.**

- *Den tomme mengden er mengden som ikke inneholder noen elementer.*
- *Skrives ofte $\{\}$ eller $\emptyset$.*

Definisjon 1.3 (Singletonmengde)**.** *En singletonmengde er en mengde som har nøyaktig ett element.*

Eksempel. *Både $\{a\}$, $\{b\}$ og $\{b, b\}$ er singletonmengder.*

Union – slå sammen mengder

Definisjon 1.4 (Union)**.**

- *Unionen av to mengder S og T er den mengden som inneholder alle objekter som er element i S* eller *T.*
- *Unionen av S og T skrives ofte $S \cup T$.*

Eksempel.

- $\{a, b\} \cup \{c, d\} = \{a, b, c, d\}$
- $\{a, b\} \cup \{b, c\} = \{a, b, c\}$
- $\{1, 2, 3\} \cup \emptyset = \{1, 2, 3\}$

Snitt – felles elementer

Definisjon 1.5 (Snitt)**.**

- *Hvis S og T er mengder, så er snittet mellom S og T, eller S snittet med T, mengden som inneholder alle objekter som er element i* både *S* og *T.*
- *S snittet med T skrives ofte $S \cap T$.*

Eksempel.

- $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$
- $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\}$
- $\{1, 2, 3\} \cap \emptyset = \emptyset$

Mengdedifferanse – fjerne elementer

Definisjon 1.6 (Mengdedifferanse)**.**

- *Hvis S og T er mengder, så er mengdedifferansen mellom S og T, eller S minus T, mengden som inneholder alle objekter som er element i S men* ikke *element i T.*
- *S minus T skrives ofte $S \setminus T$.*

Eksempel.

- $\{a, b\} \setminus \{c, d\} = \{a, b\}$
- $\{a, b\} \setminus \{b, c\} = \{a\}$
- $\{1, 2, 3\} \setminus \emptyset = \{1, 2, 3\}$
- $\emptyset \setminus \{a, b, c\} = \emptyset$

Delmengde

Definisjon 1.7 (Delmengde)**.**

- *En mengde S er en delmengde av en mengde T hvis alle elementer i S også er elementer i T.*
- *Skrives ofte $S \subseteq T$.*

Eksempel.

- $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$
- $\{a, b\} \subseteq \{a, b\}$ *(enhver mengde er en delmengde av seg selv)*
- $\{a, b, c\} \not\subseteq \{a, b\}$
- $\emptyset \subseteq \{a, b\}$ *(den tomme mengden er en delmengde av alle mengder)*
- $\{a, b\} \not\subseteq \emptyset$

Kryssprodukt

Definisjon 1.8 (Kryssprodukt)**.**

- *Hvis S og T er mengder, så er kryssproduktet av S og T mengden av alle par $\langle s, t\rangle$ slik at $s \in S$ og $t \in T$.*
- *Kryssproduktet av S og T skrives ofte $S \times T$.*

Eksempel.

- $\{a, b\} \times \{c, d\} = \{\langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, c\rangle, \langle b, d\rangle\}$
- $\{a, b\} \times \{b, c\} = \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle\}$
- $\{a\} \times \{1, 2\} = \{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle\}$

Kryssprodukt

Notasjon.

- *En mengde kan krysses med seg selv: $S \times S$*
- $\{a, b\} \times \{a, b\} = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$
- *$S \times S \times S$ skrives ofte S^3.*
- *Generalisert: $\underbrace{S \times S \times \ldots \times S}_{n}$ skrives S^n.*

Mengdebygger

Notasjon. *En definisjon på formen* "mengden av alle elementer $x \in S$ slik at ..." *kan skrives på formen*

$$\{x \mid x \in S \text{ og betingelse på } x\}.$$

En slik konstruksjon kalles en mengdebygger.

Eksempel.

- *Definisjonen av kryssprodukt av S og T kunne vært skrevet slik:*

$$S \times T = \{\langle s, t\rangle \mid s \in S \text{ og } t \in T\}$$

- $\{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ og } n \text{ er partall }\}$ *definerer mengden av alle partall.*
- $\{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ og } n \text{ er oddetall }\}$ *definerer mengden av alle oddetall.*

Mengder av mengder

Det er mulig å konstruere mengder som inneholder andre mengder (med visse restriksjoner)

Eksempel.

- $\{\emptyset\} \neq \emptyset$
- $\{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \ldots\} = \{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $\{\{0\},\ \{0,1\},\ \{0,1,2\}, \ldots\} = \{\{m \mid 0 \leq m \leq n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $\{\{0,2,4,6,\ldots\}, \{1,3,5,7,\ldots\}\}$

Snitt av mengder av mengder

Definisjon 1.9. Snittet *av en mengde $\mathcal{M}$ av mengder inneholder alle elementer som er element av alle $M \in \mathcal{M}$:*

$$\bigcap \mathcal{M} := \{x \mid x \in M \text{ for alle } M \in \mathcal{M}\}$$

Eksempel.

- $\bigcap\{\{0\},\ \{0,1\},\ \{0,1,2\}, \ldots\} = \{0\}$
- $\bigcap\{\{0,2,4,6,\ldots\}, \{1,3,5,7,\ldots\}\} = \emptyset$

Union av mengder av mengder

Definisjon 1.10. Unionen *av en mengde $\mathcal{M}$ av mengder inneholder alle elementer som er element av minst en $M \in \mathcal{M}$:*

$$\bigcup \mathcal{M} := \{x \mid x \in M \text{ for noen } M \in \mathcal{M}\}$$

Eksempel.

- $\bigcup\{\{0\},\ \{0,1\},\ \{0,1,2\}, \ldots\} = \mathbb{N}$
- $\bigcup\{\{0,2,4,6,\ldots\}, \{1,3,5,7,\ldots\}\} = \mathbb{N}$

1.2 Relasjoner

Relasjoner

Definisjon 1.11 (Relasjon)**.**

- *En* unær relasjon *over S er en delmengde av S.*
- *En* binær relasjon *fra S til T er en delmengde av $S \times T$.*
- *En* n-ær relasjon *over mengdene $S_1, S_2, \ldots, S_n$ er en delmengde av kryssproduktet $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$.*

Eksempel.

- *Hvis $S = \{a, b, c\}$, så er $\{a, b\}$ en unær relasjon over S.*
- *Hvis $S = \{a, b\}$ og $T = \{1, 2\}$, så er $\{\langle a, 1\rangle, \langle b, 2\rangle\}$ en binær relasjon fra S til T.*

Relasjoner over én mengde

Definisjon 1.12. *En* n-ær relasjon *over mengden* S *er en delmengde av* S^n.

Eksempel. *La* $S = \{1, 2, 3\}$.

- $\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$ *er en binær relasjon over* S.
- $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$ *er også en binær relasjon over* S.

Refleksive relasjoner

Definisjon 1.13 (Refleksiv)**.** *En binær relasjon* R *over mengden* S *er* refleksiv *hvis* $\langle x, x\rangle \in R$ *for alle* $x \in S$.

Eksempel. *La* $S = \{1, 2, 3\}$.

- *Er* $R_1 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle\}$ *refleksiv?*
- *Hva med* $R_2 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$*?*

Symmetriske relasjoner

Definisjon 1.14 (Symmetrisk)**.** *En binær relasjon* R *er* symmetrisk *hvis for alle* x, y *med* $\langle x, y\rangle \in R$, *også* $\langle y, x\rangle \in R$.

Eksempel. *La* $S = \{1, 2, 3\}$.

- *Er* $R_1 = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$ *symmetrisk?*
- *Hva med* $R_2 = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle\}$*?*

Transitive relasjoner

Definisjon 1.15 (Transitiv)**.** *En binær relasjon* R *er* transitiv *hvis for alle*x, y, z *med* $\langle x, y\rangle \in R$ *og* $\langle y, z\rangle \in R$, *også* $\langle x, z\rangle \in R$.

Definisjon 1.16 (Ekvivalensrelasjon)**.** *En binær relasjon over mengden* S *er en* ekvivalensrelasjon *hvis den er refleksiv, symmetrisk og transitiv.*

1.3 Funksjoner

Funksjoner

Definisjon 1.17 (Funksjon)**.** *La* S *og* T *være mengder. En* funksjon f *fra* S *til* T*er en binær relasjon fra* S *til* T*med følgende egenskaper:*

- *For alle* $x \in S$ *så finnes en* $y \in T$ *slik at* $\langle x, y\rangle \in f$.
- *Hvis* $\langle x, y\rangle \in f$ *og* $\langle x, z\rangle \in f$, *så er* $y = z$.

Vi kaller S *for* definisjonsmengden *til* f*og* T *for* verdimengden *til* f.

Notasjon. *Hvis* $\langle x, y\rangle \in f$, *så skriver vi ofte* $f(x) = y$.

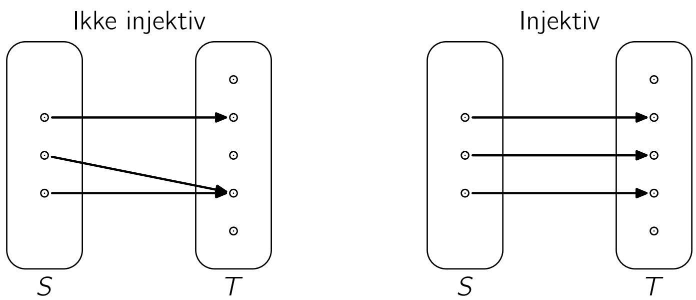
Funksjoner

Eksempel. *Funksjonen* $Par : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ *definert ved* $Par(x) = \begin{cases} 1 \text{ hvis } x \text{ er et partall} \\ 0 \text{ hvis } x \text{ er et oddetall} \end{cases}$ *har* $\mathbb{N}$ *som definisjonsmengde og* $\{0,1\}$ *som verdimengde.*

Injektive funksjoner

Definisjon 1.18 (Injektiv)**.** *En funksjon* $f : S \to T$ *er* injektiv *hvis* $f(x) \neq f(y)$ *for alle* $x, y \in S$ *med* $x \neq y$*. Vi sier at* f *er en-til-en.*

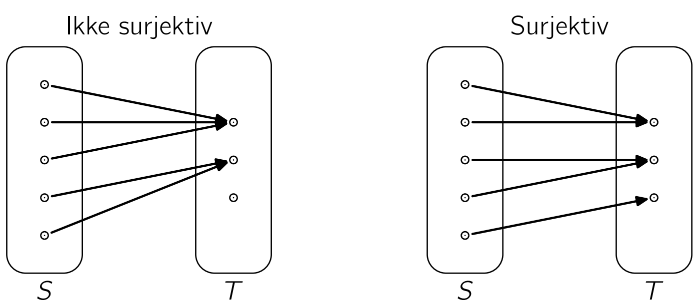
Eksempel.



Surjektive funksjoner

Definisjon 1.19 (Surjektiv)**.** *En funksjon* $f : S \to T$ *er* surjektiv *hvis for alle* $y \in T$ *så finnes* $x \in S$ *slik at* $f(x) = y$*. Vi sier at* f *er på.*

Eksempel.



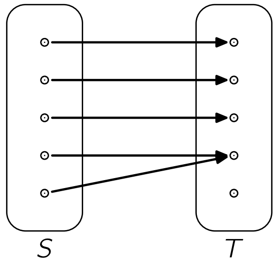
Bijektive funksjoner

Definisjon 1.20 (Bijektiv)**.** *En funksjon er* bijektiv *hvis den er injektiv og surjektiv.*

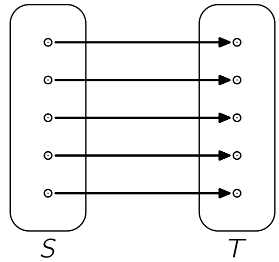
Vi sier at funksjonen er *en-til-en* og *på*, eller at vi har en *en-til-en korrespondanse*.

Eksempel.

Ikke bijektiv

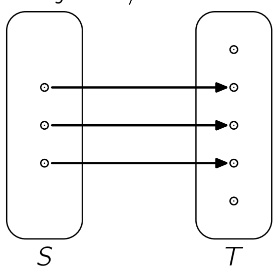


Bijektiv



Injektive og surjektive funksjoner

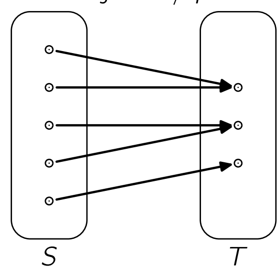
injektiv / en-til-en



for alle $x, y \in S$:
$x \neq y$ impliserer $f(x) \neq f(y)$

"hvert element i definisjonsmengden sendes til et unikt element i verdimengden"

surjektiv / på

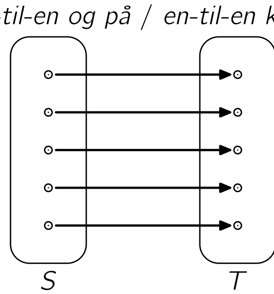


for alle $y \in T$:
det finnes $x \in S$ slik at $f(x) = y$

"alle elementer i verdimengden blir truffet"

Bijektive funksjoner

bijektiv / en-til-en og på / en-til-en korrespondanse



- En *bijektiv* funksjon er en funksjon som er både *injektiv* og *surjektiv*:
- *"Ethvert element i verdimengden blir truffet av et unikt element i definisjonsmengden"*.

1.4 Operatorer

Operatorer

Definisjon 1.21 (Operator)**.** *La S være en mengde.*

- *En unær operator på S er en funksjon fra S til S.*
- *En binær operator på S er en funksjon fra $S \times S$ til S.*

Eksempel.

- *Suksessorfunksjonen $(n+1)$ er en unær operator på $\mathbb{N}$.*
- *Addisjonsfunksjonen $(+)$ er en binær operator på $\mathbb{N}$.*
- *Subtraksjonsfunksjonen $(-)$ er en binær operator på $\mathbb{Z}$.*

1.5 Multimengder

Multimengder

Mengder der antall forekomster av hvert element teller

Definisjon 1.22 (Multimengde)**.** *En multimengde er et par $\langle S, m\rangle$ der S er en mengde og $m : S \to \mathbb{N}$. For hver $x \in S$ sier vi at $m(x)$ er multiplisiteten til x, eller antall forekomster av x i S.*

Eksempel. *Vi skriver multimengder som mengder:*

- *I multimengden $\{a, a, a, b, b\}$ er multiplisiteten til a og b henholdsvis 3 og 2.*
- *I multimengden $\{a, b, a, c, a, b\}$ er multiplisiteten til a, b og c henholdsvis 3, 2 og 1.*

$\cup$, $\cap$, $\setminus$ og $\subseteq$ på multimengder

- Vi bruker *union* ($\cup$), *snitt* ($\cap$), *mengdedifferans* ($\setminus$) og *delmengderelasjonen* ($\subseteq$) også på multimengder.

Eksempel.

- $\{a, a, b, c\} \cup \{a, c\} = \{a, a, a, b, c, c\}$ *d.v.s.* $m(x) = m_1(x) + m_2(x)$
- $\{a, a, a, b, c\} \cap \{a, a, d\} = \{a, a\}$ *d.v.s.* $m(x) = \min(m_1(x), m_2(x))$
- $\{a, a, a, b, c\} \setminus \{a, a, d\} = \{a, b, c\}$ *d.v.s.* $m(x) = \max(0, m_1(x) - m_2(x))$
- $\{a, a\} \subseteq \{a, a, b, c\}$, *men* $\{a, a, a\} \not\subseteq \{a, a, b, c\}$ *d.v.s.* $m_1(x) \leq m_2(x)$ *for alle* x.

- Vi bruker $\emptyset$ om den tomme multimengden.

1.6 Kardinalitet

Definisjon 1.23 (Kardinalitet)**.**

- *To mengder S og T har lik kardinalitet hvis det finnes en bijeksjon fra S til T.*
- *Mengden S har kardinalitet mindre eller lik T hvis det finnes en injektiv funksjon fra S til T.*

- *Hvis S er en endelig mengde, så er kardinaliteten til S lik antall elementer i S.*
- *Vi bruker notasjonen $|S|$ for kardinaliteten til S.*

Teorem 1.1 (Bernstein)**.** *Hvis det finnes en injektiv funksjon $f : S \to T$ og en injektiv funksjon $g : T \to S$, så finnes det også en bijeksjon $h : S \to T$.*

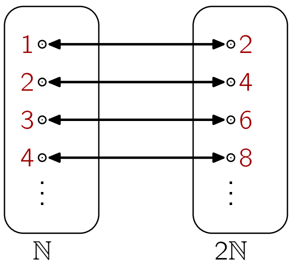
Eksempel. *Hva er kardinaliteten til*

- $\{a, b, c\}$*?*
- $\{a, b, a\}$*?*
- $\{a\}$*?*
- $\emptyset$*?*

Eksempel.

- $\mathbb{N}$ = *mengden av alle naturlige tall* $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
- $2\mathbb{N}$ = *mengden av alle partall* $\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$

$f(x) = 2x$ er en bijeksjon fra $\mathbb{N}$ til $2\mathbb{N}$, så $\mathbb{N}$ og $2\mathbb{N}$ har samme kardinalitet. Vi skriver $|\mathbb{N}| = |2\mathbb{N}|$.



1.7 Tellbart vs. overtellbart

Definisjon 1.24 (Tellbar)**.** *En uendelig mengde S er tellbar hvis det finnes en en-til-en korrespondanse mellom elementene i S og de naturlige tallene. Hvis ikke, er S overtellbar.*

- Alle endelige mengder er tellbare.
- Når en uendelig mengde S er tellbar finnes det en bijektiv funksjon fra S til $\mathbb{N}$.

Eksempel.

- *Mengden $2\mathbb{N}$ av alle partall er tellbar.*
- *Mengden $\mathbb{B}$ av binære tall er tellbar.*
- *Mengden $\mathbb{Q}$ av brøktall er tellbar.*
- *Mengden av nålevende mennesker er tellbar.*
- *Mengden $\mathbb{R}$ av reelle tall er ikke tellbar.*

2 Induktive definisjoner og bevis

2.1 Induktivt definerte mengder

Induktive definisjoner

Definisjon 2.1 (Induktiv definisjon)**.** *Å definere en mengde induktivt betyr å konstruere den minste mengden som inneholder en gitt mengde B—kalt en basismengde—og som er lukket under gitte operasjoner.*

Eksempel. *Mengden $\mathbb{N}$ av naturlige tall kan defineres induktivt som minste mengde $\mathbb{N}$ med*

- $0 \in \mathbb{N}$, *og*
- *hvis $x \in \mathbb{N}$, så $x + 1 \in \mathbb{N}$.*

Her er basismengden $\{0\}$ og $\mathbb{N}$ er lukket under suksessorfunksjonen $(x+1)$.

Eksempel. *Mengden $\mathbb{B}$ av binære tall kan defineres som minste mengde så at*

- 0 *og* 1 *er binære tall, og*
- *hvis b er et binært tall, så er $b0$ og $b1$ binære tall.*

steg 0:	0	1						
steg 1:	00	10	01	11				
steg 2:	000	100	010	110	001	101	011	111
$\vdots$								

Eksempel. *Mengden S av symmetriske strenger over alfabetet $\{a, b\}$ kan defineres induktivt som minste mengde S slik at*

- $\epsilon \in S$ *(den tomme strengen),*
- *hvis $x \in S$, så $axa \in S$ og $bxb \in S$.*

steg 0:	ϵ			
steg 1:	aa	bb		
steg 2:	$aaaa$	$abba$	$baab$	$bbbb$
$\vdots$				

Hvorfor den minste mengden?

Det er mange mengder som inkluderer B og som er lukket under gitte operasjoner.

Eksempel. *Hvilke mengder N oppfyller:*

- $0 \in N$, *og*
- *hvis* $x \in N$, *så* $x + 1 \in N$*?*

For eksempel:

- $\mathbb{N}$
- $\mathbb{Z}$
- $\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\}$

Hva betyr egentlig 'minst'?

- La
$$\mathcal{M} := \{M \mid B \subseteq M \text{ og } M \text{ er lukket under operasjonene}\}$$
- $\mathcal{M}$ inneholder alle M som oppfyller kravene
- Ta snittet av alle sånne mengder:
$$M^* := \bigcap \mathcal{M}$$
- Da er $M^* \in \mathcal{M}$.
- Også er $M^* \subseteq M$ for alle $M \in \mathcal{M}$.
- Hvis $N \subseteq M$ for alle $M \in \mathcal{M}$ for noen mengde $N \in \mathcal{M}$, så er $N = M^*$.
- M^* er altså den entydige minste mengden i $\mathcal{M}$ med hensyn til $\subseteq$.

2.2 Induktivt definerte funksjoner

Induktiv definisjon av en funksjon

Hvis en mengde M er definert induktivt, så er det naturlig å definere funksjoner $M \to X$ induktivt.

Eksempel. *Definer funksjonen* $d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *induktivt ved*

- $d(0) := 0$
- $d(n + 1) := d(n) + 1 + 1$ *for alle* $n \in \mathbb{N}$

Dette definerer d som minste relasjon $\subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ som oppfyller

- $\langle 0, 0\rangle \in d$ og
- $\langle n + 1, m + 1 + 1\rangle \in d$ for alle $\langle n, m\rangle \in d$.

Eksempel (Naturlig tall representert av binær tall)**.**

- $v(0) = 0$
- $v(1) = 1$

- $v(b0) = 2v(b)$ *for alle* $b \in \mathbb{B}$
- $v(b1) = 2v(b) + 1$ *for alle* $b \in \mathbb{B}$

Eksempel (Lengden av symmetrisk streng)**.**

- $l(\epsilon) = 0$
- $l(axa) = l(x) + 2$ *for alle* $x \in S$
- $l(bxb) = l(x) + 2$ *for alle* $x \in S$

2.3 Induktive bevis

Strukturell induksjon

For å vise at alle naturlige tall $n \in \mathbb{N}$ har et egenskap $P(n)$

- Vis at egenskapet holder for 0, d.v.s. $P(0)$
- For alle $n \in \mathbb{N}$ med $P(n)$, vis at $P(n+1)$

Eksempel. *For å vise at* $d(n) = 2n$ *for alle* $n \in \mathbb{N}$*, definer:*

$$P(n) \quad \Leftrightarrow \quad d(n) = 2n$$

- $P(0)$*:* $d(0) = 2 \cdot 0$*, gjelder enligt def. av* d
- *Under antakelsen* $P(n)$*, d.v.s.* $d(n) = 2n$*, vis* $P(n+1)$*, d.v.s.* $d(n+1) = 2(n+1)$*.*

For å vise at alle binære tall $b \in \mathbb{B}$ har et egenskap $P(b)$

- Vis at egenskapet holder for 0, d.v.s. $P(0)$
- Vis at egenskapet holder for 1, d.v.s. $P(1)$
- For alle $b \in \mathbb{B}$ med $P(b)$, vis at $P(b0)$
- For alle $n \in \mathbb{B}$ med $P(b)$, vis at $P(b1)$

For å vise at alle symmetriske strenger $x \in S$ har et egenskap $P(x)$

- Vis at egenskapet holder for ϵ, d.v.s. $P(\epsilon)$
- For alle $x \in S$ med $P(x)$, vis at $P(axa)$
- For alle $x \in s$ med $P(x)$, vis at $P(bxb)$

Vis at $v(b) = v(0b)$ for alle $b \in \mathbb{B}$.

- $P(b) \quad :\Leftrightarrow \quad v(b) = v(0b)$
- $P(0)$: $\quad v(0) = 0 = 2 \cdot 0 = 2v(0) = v(00)$

- $P(1)$: $\quad v(1) = 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 2v(0) + 1 = v(01)$
- Anta $P(b)$, d.v.s. $v(b) = v(0b)$.
  - $P(b0)$: $\quad v(b0) = 2v(b) = 2v(0b) = v(0b0)$
  - $P(b1)$: $\quad v(b1) = 2v(b) + 1 = 2v(0b) + 1 = v(0b1)$

Hvorfor er strukturell induksjon korrekt?

- La M være en induktivt definert mengde og P et egenskap
- Undersøk mengden N av alle $x \in M$ med $P(x)$.
- Se på induktivt bevis:
  - Basis: $P(b)$ for alle $b \in B \Rightarrow B \subseteq N$
  - Operasjoner: $P(x)$ og $P(y)$ impliserer $P(f(x, y))$ for alle $x, y \in M \Rightarrow f(x, y) \in N$ for alle $x, y \in N$.
- Derfor, $N \in \mathcal{M}$, som vi definert tidligere!
- $M \subseteq N$ fordi M er minst i $\mathcal{M}$.
- Med andre ord, $P(x)$ for alle $x \in M$.