Forelesning 1: Introduksjon. Utsagnslogikk og sekventkalkyle

Arild Waaler - 21. januar 2008

1 Praktisk informasjon

1.1 Forelesere og tid/sted

- Forelesere:
  - Martin Giese (`martingi@ifi.uio.no`)
  - Arild Waaler (`arild@ifi.uio.no`)
  - Christian Mahesh Hansen (`chrisha@ifi.uio.no`)
  - Roger Antonsen (`rantonse@ifi.uio.no`)
  - Espen H. Lian (`elian@ifi.uio.no`)
  - Bjarne Holen (`bjarneh@ifi.uio.no`)
- Nettside:
  - `http://www.ifi.uio.no/inf4170`
- Forelesning:
  - Mandag 14:15 – 16:00
  - Seminarrom 3A Ifi
- Gruppeundervisning:
  - Onsdag 12:15 – 14:00, 3A, Ifi
  - Første gruppetime: onsdag 23. januar
  - Gruppelærer: Bjarne Holen (`bjarneh@ifi.uio.no`)

1.2 Obliger og eksamen

Obliger og eksamen

Obliger

- Planlagt 3 obliger.
- Se hjemmesiden for tidsfrister og regler.
- Bedømmes til bestått/ikke bestått.
- Alle obligene må bestås for å kunne gå opp til eksamen.

Eksamen

- Ingen midttermineksamen.
- Avsluttende eksamen: muntlig *eller* skriftlig.
- Bokstavkarakterer – avsluttende eksamen teller 100%

1.3 Pensum

Pensum

- Definert av det som gjennomgås på forelesning og gruppeundervisning, samt obliger.
- Foiler deles ut på forelesning og legges ut på nettsiden.
- Ingen lærebok, men...

1.4 Støttelitteratur

Støttelitteratur

Ikke pensum i seg selv, frivillig ekstralesing!

Referanser

[Gallier, 2003] J. Gallier. *Logic for Computer Science - Foundations of Automated Theorem Proving*

- Ligger tett opptil forelest pensum i kurset.
- Oppdatert versjon fra 2003 tilgjengelig for gratis nedlasting.
- Kun kapitlene 3, 4, 5 og 8 er aktuelle.

Referanser

[Fitting, 1996] M. C. Fitting. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving*

2 Utsagnslogikk

2.1 Introduksjon

Utsagnslogikk

- Grunnlaget for logikk er en antagelse om at gyldighet av argumenter avgjøres på bakgrunn av argumentets *form*, ikke *inmhold*.
- Med et utsagn menes noe som enten er *sant* eller *usant*.
- Vi starter med en mengde *atomære* utsagn, f.eks.

  – *"parkeringsplassen er stengt"*
  – *"IFI2 bygges"*

- Den interne strukturen til atomære utsagn blir ikke analysert.

- Sammensatte utsagn bygges opp fra de atomære utsagnene ved hjelp av de logiske konnektivene: og, eller, ikke, hvis . . . så . . .
- Eksempel: *"IFI2 bygges og parkeringsplassen er stengt"*
- Hvordan avhenger sannhetsverdien til et sammensatt utsagn av sannhetsverdiene til de atomære utsagnene det er bygget opp av?
- Hvilke utsagn er sanne *uavhengig* av sannhetsverdiene til de atomære utsagnene?
- Slike utsagn kalles *tautologier*.
- Eksempel: *"IFI2 bygges eller IFI2 bygges ikke"*

- *Syntaks:* et presist definert symbolspråk for å representere utsagnslogiske utsagn.
- *Semantikk:* en presist definert tolkning av uttrykk i symbolspråket til sannhetsverdiene *sann* og *usann*.
- *Kalkyle:* syntaktisk manipulasjon av uttrykk i symbolspråket for å finne *bevisbare* uttrykk.
- *Sunnhet:* alle bevisbare uttrykk er tautologier — korrekthet av kalkylen.
- *Kompletthet:* alle tautologier er bevisbare — kalkylen sterk nok til å fange inn *alle* interessante uttrykk.

2.2 Syntaks

Syntaks

Definisjon 2.1 (Utsagnsvariable). *Mengden av utsagnsvariable er en tellbart uendelig mengde* $\mathcal{V}_u = \{P_1, P_2, P_3, \ldots\}$.

- Utsagnsvariable representerer *atomære utsagn*, f.eks.
  – *"IFI2 bygges"*
  – *"Forskningsparken er yngre enn IFI1"*
  – *"logikk er gøy"*

Notasjon. *Vi skriver ofte utsagnsvariable som* $P, Q, R, \ldots$

For å fange inn sammensatte utsagn, f.eks.

"hvis IFI2 bygges, så er parkeringsplassen stengt,"

trengs flere symboler i språket:

Definisjon 2.2 (Utsagnslogisk alfabet). *Det utsagnslogiske alfabet består av:*

- *Utsagnsvariablene i* $\mathcal{V}_u$.
- *De* logiske konnektivene $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ *og* $\neg$.
- *Hjelpesymbolene '(' og ')'.*

Intuisjon:	$\neg$ skal bety *"ikke"*	$\wedge$ skal bety *"og"*
	$\vee$ skal bety *"eller"*	$\rightarrow$ skal bety *"impliserer"*

Utsagnslogiske formler

Definisjon 2.3 (Atomær formel)**.** *Enhver utsagnsvariabel er en* atomær formel*.*

Definisjon 2.4 (Utsagnslogisk formel)**.** *Mengden av* utsagnslogiske formler *er den minste mengden* $\mathcal{F}_u$ *slik at:*

1. $\mathcal{F}_u$ *inneholder alle atomære formler.*
2. *Hvis* $A \in \mathcal{F}_u$, *så er* $\neg A \in \mathcal{F}_u$.
3. *Hvis* $A, B \in \mathcal{F}_u$, *så er* $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ *og* $(A \rightarrow B)$ *med i* $\mathcal{F}_u$.

Eksempel (Utsagnslogiske formler)**.**

- P
- $(P \rightarrow Q)$
- $((P \vee Q) \wedge \neg(P \vee R))$

Notasjon. *Vi dropper ofte unødvendige parenteser:*

$$\begin{array}{lll} (P \rightarrow Q) & \textit{skrives} & P \rightarrow Q \\ ((P \vee Q) \wedge \neg(P \vee R)) & \textit{skrives} & (P \vee Q) \wedge \neg(P \vee R) \end{array}$$

Eksempel. *Ikke alle strenger over det utsagnslogiske alfabet er utsagnslogiske formler:*

- $P \rightarrow$
- $((Q \wedge P)$

Oppgave. *Vis at* $((Q \wedge P)$ ikke *er en utsagnslogisk formel.*

- Intuitivt, men
- hvordan *bevise* det?
- Ved *strukturell induksjon* kan vi vise noe *sterkere*:

Påstand 2.1. *Alle utsagnslogiske formler har like mange venstre- og høyreparenteser.*

2.3 Strukturell induksjon

Strukturell induksjon

- Mengden $\mathcal{F}_u$ av utsagnslogiske formler er definert *induktivt*.
- Ved *strukturell induksjon* kan man vise at en egenskap holder for *alle* formler i $\mathcal{F}_u$.

Teorem 2.1 (Strukturell induksjon)**.** *Alle formler i $\mathcal{F}_u$ har egenskapen* **Q** *hvis:*

Basissteg: Alle atomære formler har egenskapen **Q**.

Induksjonssteg:

- *Hvis A har egenskapen* **Q***, så har også $\neg A$ egenskapen* **Q**.
- *Hvis A og B har egenskapen* **Q***, så har også $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ og $(A \rightarrow B)$ egenskapen* **Q**.

- Strukturell induksjon er en bevisteknikk vi kommer til å bruke *mye*!
- Derfor er det viktig å kunne den godt...

Påstand 2.2 (Balanserte parenteser)**.** *Alle formler $A \in \mathcal{F}_u$ har like mange venstre- og høyreparenteser.*

Bevis. Basissteg: Hvis A er atomær, inneholder den ikke parenteser. Dermed holder påstanden trivielt.

Induksjonssteg:

- Anta $A = \neg B$ og at påstanden holder for B. A har like mange parenteser som B. Dermed holder påstanden også for A.
- Anta $A = (B \circ C)$ for $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, og at påstanden holder for B og C. A har én venstre- og én høyreparentes i tillegg til de som finnes i B og C. Siden påstanden holder for B og C, holder den også for A.

□

Tilbake til uttrykket $((Q \wedge P)$:

Påstand 2.3. $((Q \wedge P)$ *er* ikke *en utsagnslogisk formel.*

Bevis.

1. Vi har vist at alle utsagnslogiske formler har like mange venstre- og høyreparenteser.
2. Det *kontrapositive* er at hvis et uttrykk *ikke* har like mange venstre- og høyreparenteser, så er det *ikke* en utsagnslogisk formel.
3. Uttrykket '$((Q \wedge P)$' har to venstre- og én høyreparentes, altså ulikt antall.
4. Derfor er det *ikke* en utsagnslogisk formel.

□

2.4 Semantikk

Semantikk

- Vi skal tolke utsagnslogiske formler som enten *sanne* eller *usanne*.

Definisjon 2.5. *La* **Bool** $= \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$.

Definisjon 2.6 (Operatorene $\hat{\neg}$, $\hat{\wedge}$, $\hat{\vee}$ og $\hat{\rightarrow}$)**.**

- *Vi definerer en unær operator* $\hat{\neg}$ *på* **Bool** *slik at* $\hat{\neg}\mathbf{1} = \mathbf{0}$ *og* $\hat{\neg}\mathbf{0} = \mathbf{1}$.
- *Vi definerer de binære operatorene* $\hat{\vee}$, $\hat{\wedge}$ *og* $\hat{\rightarrow}$ *på* **Bool** *som følger:*

x	y	$x \hat{\wedge} y$	$x \hat{\vee} y$	$x \hat{\rightarrow} y$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$

Tabellen over kalles en *sannhetsverditabell*.

Definisjon 2.7 (Boolsk valuasjon)**.** *En* boolsk valuasjon *er en funksjon* v *fra* $\mathcal{F}_u$ *til* **Bool** *slik at:*

- $v(\neg A) = \hat{\neg} v(A)$
- $v(A \wedge B) = v(A) \hat{\wedge} v(B)$
- $v(A \vee B) = v(A) \hat{\vee} v(B)$
- $v(A \rightarrow B) = v(A) \hat{\rightarrow} v(B)$

Merk.

- *Symbolene* $\neg$, $\wedge$, $\vee$ *og* $\rightarrow$ *på venstresiden er de utsagnslogiske konnektivene, som er en del av* syntaksen.
- *Symbolene* $\hat{\neg}$, $\hat{\wedge}$, $\hat{\vee}$ *og* $\hat{\rightarrow}$ *på høyresiden er operatorer på* **Bool**, *og en del av* semantikken.

Eksempel.

- *Se på formelen* $\neg P \rightarrow Q$.
- *La* v *være en valuasjon slik at* $v(P) = \mathbf{1}$ *og* $v(Q) = \mathbf{0}$.
- *Vi får:*

$$\begin{aligned} v(\neg P \rightarrow Q) &= v(\neg P) \hat{\rightarrow} v(Q) \\ &= (\hat{\neg}\, v(P)) \hat{\rightarrow} v(Q) \\ &= (\hat{\neg}\, \mathbf{1}) \hat{\rightarrow} v(Q) \\ &= (\hat{\neg}\, \mathbf{1}) \hat{\rightarrow} \mathbf{0} \\ &= \mathbf{0} \hat{\rightarrow} \mathbf{0} \\ &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

Definisjon 2.8 (Oppfyllbar)**.**

- *En boolsk valuasjon v oppfyller en utsagnslogisk formel A hvis $v(A) = \mathbf{1}$. Skrives ofte $v \models A$.*
- *En utsagnslogisk formel er oppfyllbar hvis det finnes en boolsk valuasjon som oppfyller den.*

Eksempel.

- *Formelen $P \to Q$ er oppfyllbar: den oppfylles av alle valuasjoner v slik at $v(P) = \mathbf{0}$ eller $v(Q) = \mathbf{1}$.*
- *Formelen $\neg(P \to P)$ er* ikke *oppfyllbar. Hvorfor?*

Definisjon 2.9 (Falsifiserbar)**.**

- *En boolsk valuasjon v falsifiserer en utsagnslogisk formel A hvis $v(A) = \mathbf{0}$. Skrives ofte $v \not\models A$.*
- *En utsagnslogisk formel er falsifiserbar hvis det finnes en boolsk valuasjon som falsifiserer den.*

Eksempel.

- *Formelen $P \to Q$ er falsifiserbar: den falsifiseres av alle valuasjoner v slik at $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$.*
- *Formelen $P \to P$ er* ikke *falsifiserbar. Hvorfor?*

Definisjon 2.10 (Tautologi)**.** *En utsagnslogisk formel A er en tautologi hvis $v \models A$ for* alle *boolske valuasjoner v.*

Eksempel.

- *Er P en tautologi?*
- *Hva med $\neg(P \to P)$?*
- *Og $P \to P$?*

Definisjon 2.11 (Motsigelse)**.** *En utsagnslogisk formel A er en motsigelse hvis $v \not\models A$ for* alle *boolske valuasjoner v.*

Merk.

- *Det motsatte av en tautologi er den falsifiserbar formel.*
- *Det motsatte av en motsigelse er den oppfyllbar formel.*
- *En tautologi er ikke det motsatte av en motsigelse!*

Påstand 2.4. *En utsagnslogisk formel A er en tautologi hvis og bare hvis A* ikke *er falsifiserbar.*

Bevis. formelen A er en tautologi $\Leftrightarrow$ $v \models A$ for alle valuasjoner v $\Leftrightarrow$ det finnes ingen valuasjon v slik at $v \not\models A$ $\Leftrightarrow$ A er ikke falsifiserbar

□

Hvis og bare hvis – $\Leftrightarrow$

Merk.

- *Begrepet* "hvis og bare hvis" *uttrykker toveis implikasjon.*
- *Skrives ofte* $\Leftrightarrow$.
- P "hvis og bare hvis" Q *kan uttrykkes i utsagnslogikk som*

$$(P \to Q) \land (Q \to P)$$

3 Sekventkalkyle

3.1 Motivasjon

Sekventkalkyle for utsagnslogikk

- Hvordan finne ut om en gitt formel er en *tautologi*?
- Fra semantikken: Hvis formelen *ikke* er falsifiserbar, så er den en tautologi.
- Idé: Å systematisk forsøke å falsifisere formelen.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q, P \vdash P}{\neg Q \vdash \neg P, P}}{\vdash P, \neg Q \to \neg P} \qquad \dfrac{\dfrac{Q \vdash Q, \neg P}{Q, \neg Q \vdash \neg P}}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$:
  - oppfylle $P \to Q$,
  - *og* falsifisere $\neg Q \to \neg P$.
- *Formler til* venstre *for '$\vdash$' skal* oppfylles.
- *Formler til* høyre *for '$\vdash$' skal* falsifiseres.

- Oppfylle $P \to Q$:
  - falsifisere P,
  - *eller* oppfylle Q.
- $\neg Q \to \neg P$ må kunne falsifiseres uavhengig av hvordan $P \to Q$ oppfylles.
- Formelen kopieres derfor inn i begge de nye løvnodene.

- Falsifisere $\neg Q \to \neg P$ i venstre løvnode:
  - oppfylle $\neg Q$,
  - *og* falsifisere $\neg P$.
- Tilsvarende, falsifisere $\neg Q \to \neg P$ i høyre løvnode:
  - oppfylle $\neg Q$,
  - *og* falsifisere $\neg P$.

- Falsifisere $\neg P$ i venstre løvnode:
  - oppfylle P.
- Oppfylle $\neg Q$ i høyre løvnode:
  - falsifisere Q.

- Venstre løvnode:
  - Oppfylle: $\neg Q$, P. Falsifisere: P.
  - Umulig, kan *ikke* både oppfylle og falsifisere P!
- Høyre løvnode:
  - Oppfylle: Q. Falsifisere: Q, $\neg P$.
  - Umulig, kan *ikke* både oppfylle og falsifisere Q!
- $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$ kan ikke falsifiseres!

Kommentarer til det foregående eksempelet:

- Vi arbeidet med objekter av typen '$\ldots \vdash \ldots$'. Slike objekter kaller vi for *sekventer*.
- Ved å se på konnektivet til en bestemt formel i en sekvent konstruerte vi nedenfra og opp nye sekventer fra eksisterende. Hvilke nye sekventer vi får bestemmes av *regler*.
- Gjennom gjentatt anvendelse av regler konstruerte vi et tre-lignende objekt med en rotnode og løvnoder. Et slikt objekt kalles en *utledning*.
- Den utledningen vi konstruerte var slik at sekventene i løvnodene hadde noe likt på begge sier av '$\vdash$'. En utledning med denne egenskapen kalles et *bevis*.

Vi skal nå definere helt presist hva vi legger i disse begrepene!

3.2 Sekventer og aksiomer

Sekventkalkylen LK

Definisjon 3.1 (Sekvent)**.** *En* sekvent *er et objekt på formen* $\Gamma \vdash \Delta$ *slik at* Γ *og* Δ *er multimengder av utsagnslogiske formler.*

- Formlene som står til venstre for '$\vdash$' kalles *antecedent*.
- Formlene som står til høyre for '$\vdash$' kalles *succedent*.

Notasjon. *I sekventer leses ',' som union:*

- Γ, A *skal bety* $\Gamma \cup \{A\}$.

Eksempel. *Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?*

- $P \vdash Q$
- $P, P \vdash Q, P$
- $\vdash P \to Q$
- $\vdash P \vdash Q$
- $P, Q \to R \vdash Q \to R$
- $P, Q \to R \vdash Q \to R, P$
- $P, 1, P \to Q \vdash P \to 2$

Definisjon 3.2 (Aksiom)**.** *Et* aksiom *er en sekvent på formen* $\Gamma, A \vdash A, \Delta$ *slik at* A *er en* atomær *utsagnslogisk formel.*

Hvilke av sekventene i eksempelet over er aksiomer?

3.3 Sekventkalkylereglene

Sekventkalkyleregler

Definisjon 3.3 (α-regler)**.** α-reglene *i sekventkalkylen* LK *er:*

$$\frac{\Gamma, A\,,\ B \vdash \Delta}{\Gamma, A \land B \vdash \Delta}\,\mathrm{L}\land \qquad \frac{\Gamma \vdash A\,,\ B, \Delta}{\Gamma \vdash A \lor B, \Delta}\,\mathrm{R}\lor$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\,\mathrm{R}\to$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\,\mathrm{L}\neg \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\,\mathrm{R}\neg$$

α-reglene kalles ofte *ett-premissregler*.

Definisjon 3.4 (β-regler)**.** *β-reglene i sekventkalkylen* LK *er:*

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \land B, \Delta}\ \mathsf{R}\land$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\lor$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\to$$

β-reglene kalles ofte *to-premissregler*.

Definisjon 3.5 (Slutningsreglene i LK)**.** Slutningsreglene *i sekventkalkylen* LK *er α- og β-reglene.*

Begreper knyttet til regler

Se på regelen

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\lor$$

- Sekventene *over* streken kalles *premisser*.
- Sekventen *under* streken kalles *konklusjon*.
- Teksten til høyre for streken er regelens *navn*.
- Formelen som forekommer eksplisitt i konklusjonen kalles *hovedformel*.
- Formlene som forekommer eksplisitt i premissene kalles *aktive formler*.
- Formlene som forekommer i Γ og Δ kalles *ekstraformler*.

3.4 Slutninger

Regler vs. slutninger

Definisjon 3.6 (LK-slutning)**.**

- *En* slutning *er en instans av en regel hvor*
  - *A og B er erstattet med utsagnslogiske formler*
  - *Γ og Δ er erstattet med multimengder av utsagnslogiske formler*
- *Slutninger av en regel med navn eller type θ kalles θ-slutninger.*

Eksempel. *En regel* $\dfrac{\Gamma, A \ \vdash \Delta}{\Gamma \ \vdash \neg A, \Delta}\ \mathsf{R}\neg$ *definerer uendelig mange* R$\neg$*-slutninger:*

$$\frac{P \ \vdash}{\vdash \neg P} \qquad \frac{Q, P \ \vdash}{Q \ \vdash \neg P} \qquad \frac{Q \to R, P \ \vdash P}{Q \to R \ \vdash \neg P, P} \qquad \ldots$$

Begrepene knyttet til regler anvendes om slutninger:

$$\dfrac{P \rightarrow Q, P \vdash Q \qquad P \rightarrow Q, R \vdash Q}{P \rightarrow Q, P \vee R \vdash Q}\ \mathsf{L}\vee$$

- Sekventene *over* streken kalles *premisser*.
- Sekventen *under* streken kalles *konklusjon*.
- Formelen $P \vee R$ i konklusjonen er *hovedformel*.
- Formlene P og R i premissene er *aktive formler*.
- De andre formlene er *ekstraformler*.

3.5 Utledninger

Utledninger

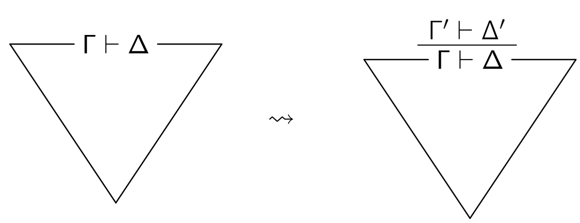
- En utledning er et tre der nodene er sekventer.
- Rotnoden er nederst og løvnodene er øverst.
- Rotnoden kalles *rotsekvent*.
- Løvnodene kalles *løvsekventer*.

Definisjon 3.7 (Mengden av LK-utledninger – basistilfelle)**.** *En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er en* LK-utledning*.*

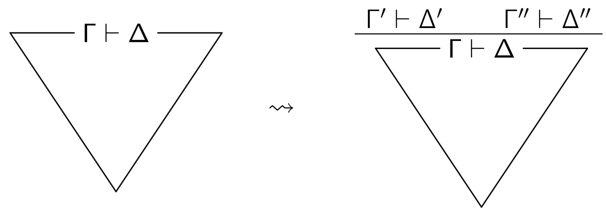
$$\Gamma \vdash \Delta$$

Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og løvsekvent.

Definisjon 3.8 (Mengden av LK-utledninger – α-utvidelse)**.** *Hvis det finnes en* LK*-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en α-slutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premiss $\Gamma' \vdash \Delta'$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en* LK-utledning*.*



Definisjon 3.9 (Mengden av LK-utledninger – β-utvidelse)**.** *Hvis det finnes en* LK*-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en β-slutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premisser $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en* LK-utledning*.*



β-utvidelse gir forgrening i utledningen!

Eksempel (LK-utledninger)**.**

$$\vdash R \vee Q \qquad\qquad P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$$

$$\dfrac{P \vdash Q}{\vdash P \to Q}\,\mathsf{R}\!\to \qquad\qquad \dfrac{\vdash P \qquad \vdash P}{\vdash P \wedge P}\,\mathsf{R}\wedge$$

$$\dfrac{\dfrac{P \vdash P \qquad P \vdash Q}{P \vdash P \wedge Q}\,\mathsf{R}\wedge \qquad \dfrac{Q \vdash P \qquad Q \vdash Q}{Q \vdash P \wedge Q}\,\mathsf{R}\wedge}{P \vee Q \vdash P \wedge Q}\,\mathsf{L}\vee$$

3.6 Bevis

LK-**bevis**

Definisjon 3.10 (LK-bevis)**.** *Et* LK-bevis *er en* LK-*utledning der alle løvsekventene er aksiomer.*

Definisjon 3.11 (LK-bevisbar)**.** *En sekvent* $\Gamma \vdash \Delta$ *er* LK-bevisbar *hvis det finnes et* LK-*bevis med* $\Gamma \vdash \Delta$ *som rotsekvent.*

Eksempel (LK-bevis)**.**

$$\dfrac{\overset{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \to P}\,\mathsf{R}\!\to$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\neg Q, P \vdash P}}{\neg Q \vdash \neg P, P}\,\mathsf{R}\neg}{\vdash P, \neg Q \to \neg P}\,\mathsf{R}\!\to \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\times}{Q \vdash Q, \neg P}}{Q, \neg Q \vdash \neg P}\,\mathsf{L}\neg}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}\,\mathsf{R}\!\to}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}\,\mathsf{L}\!\to$$

- *Sekventene* $\vdash P \to P$ *og* $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$ *er bevisbare, siden det finnes* LK-*bevis med disse sekventene som rotsekvent.*

Merk: symbolet '×' er *ikke* en del av kalkylen, men et hjelpesymbol vi bruker for å markere at en gren er lukket.