

INF3170 – Logikk

Forelesning 2: Utsagnslogikk – sekventkalkyle, sunnhet og kompletthet

Arild Waaler

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

28. januar 2008



Dagens plan

- 1 Sekventkalkyle
- 2 Sunnhet
- 3 Kompletthet
- 4 Egenskaper ved utsagnslogikk

Semantikk for sekventer

Definisjon (Gyldig sekvent)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er *gyldig* hvis alle valuasjoner som oppfyller alle formlene i Γ også oppfyller minst én formel i Δ .

Eksempel

Følgende sekventer er gyldige:

- $P \vdash P$
- $P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow Q$
- $P, P \rightarrow Q \vdash Q$
- $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- En valuasjon v er en *motmodell* til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ .
- Vi sier at en motmodell til en sekvent *falsifiserer* sekventen.
- En sekvent er *falsifiserbar* hvis den har en motmodell.

Eksempel

Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$ Motmodell: $v(P) = 1, v(Q) = 0$
- $P \vee Q \vdash P \wedge Q$ Motmodell: som over eller $v(P) = 0, v(Q) = 1$
- $\vdash P$ Motmodell: $v(P) = 0$
- $P \vdash$ Motmodell: $v(P) = 1$
- \vdash Motmodell: *alle modeller!*

Oppsummering

Gyldig

- $P, P \rightarrow Q \vdash Q$
- Hvis $v \models P$ og $v \models P \rightarrow Q$, så $v \models Q$.

Bevisbar

$$\frac{\begin{array}{c} \times \\ P \vdash P \end{array} \quad \begin{array}{c} \times \\ Q \vdash Q \end{array}}{P, P \rightarrow Q \vdash Q}$$

Falsifiserbar

- $\neg P, P \rightarrow Q \vdash \neg Q$
- En valuasjon v slik at $v \not\models P$ og $v \models Q$.

Ikke bevisbar

$$\frac{\frac{\vdash P, P}{\neg P \vdash P} \quad \frac{Q, Q \vdash}{Q \vdash \neg Q}}{\neg P, P \rightarrow Q \vdash \neg Q}$$

1 Sekventkalkyle

2 Sunnhet

- Introduksjon
- Bevaring av falsifiserbarhet
- Eksistens av falsifiserbar løvsekvent
- Alle aksiomer er gyldige
- Bevis for sunnhetsteoremet

3 Kompletthet

4 Egenskaper ved utsagnslogikk

Sunnhet av LK

- Vi ønsker at alle LK-bevisbare sekventer skal være gyldige!
- Hvis ikke, så er LK **ukorrekt** eller **usunn** ...

Definisjon (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK er **sunn** hvis enhver LK-bevisbar sekvent er gyldig.

Teorem

Sekventkalkylen LK er sunn.

Sunnhetsteoremet sikrer oss at LK er en **korrekt** kalkyle.

Hvordan vise sunnhetsteoremet?

Vi viser følgende lemmaer:

- 1 Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
- 2 En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.
- 3 Alle aksiomer er gyldige.

Til slutt vises sunnhetsteoremet ved hjelp av lemmaene.

Definisjon

En LK-regel θ er *falsifiserbarhetsbevarende* (oppover) hvis alle valuasjoner som falsifiserer konklusjonen i en θ -slutning også falsifiserer minst ett av premissene i slutningen.

Lemma

Alle LK-reglene er falsifiserbarhetsbevarende.

- Vi får ett delbevis for hver LK-regel.
- Se på f.eks. $L\rightarrow$ -regelen:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} L\rightarrow$$

- I delbeviset for $L\rightarrow$ må vi vise at alle $L\rightarrow$ -slutninger bevarer falsifiserbarhet oppover.
- Regelen $L\rightarrow$ generaliserer alle $L\rightarrow$ -slutninger.
- Vi lar Γ , Δ , A og B i regelen stå for vilkårlige (multimengder av) utsagnslogiske formler og viser på den måten at alle $L\rightarrow$ -slutninger bevarer falsifiserbarhet.

Bevis for $R\neg$.

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} R\neg$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at $v \models \Gamma$, $v \not\models \neg A$ og v falsifiserer alle formlene i Δ .
- Pr. definisjon av v har vi at $v \models A$.
- Vi har da at $v \models \Gamma \cup \{A\}$ og v falsifiserer alle formlene i Δ .
- Da falsifiserer v premisset. □

Bevis for $L\rightarrow$.

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} L\rightarrow$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at v oppfyller $\Gamma \cup \{A \rightarrow B\}$ og falsifiserer alle formlene i Δ .
- Siden v oppfyller $A \rightarrow B$, så har vi pr. definisjon av v at
 - (1) $v \not\models A$, eller
 - (2) $v \models B$.
- Hvis (1), så falsifiserer v venstre premiss.
- Hvis (2), så falsifiserer v høyre premiss. □

Bevis for "for alle"-påstander

- Se på påstanden "for alle $x \in S: P(x)$ ".
- Vi kan vise påstanden ved å vise at $P(a)$ for hvert element $a \in S$.
- Hva hvis S er svært stor eller uendelig?
- Vi kan **generalisere fra et vilkårlig element**:
 - Velg et **vilkårlig** element $a \in S$.
 - Vis at $P(a)$ holder.
 - Siden a var tilfeldig valgt må påstanden i første linje holde.

Lemma

Hvis en valuasjon v falsifiserer rotsekventen i en LK-utledning δ , så falsifiserer v minst én av løvsekventene i δ .

Bevis.

Ved strukturell induksjon på LK-utledningen δ .

Basissteg: δ er en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$:

$$\Gamma \vdash \Delta$$

- Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og (eneste) løvsekvent.
- Anta at v falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$.
- Da falsifiserer v én løvsekvent i δ , nemlig $\Gamma \vdash \Delta$.

Bevis (induksjonssteg – α -utvidelse).

Induksjonssteg: δ er en utledning på formen

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta' \quad \alpha}{\Gamma \vdash \Delta}$$

- Anta at v falsifiserer rotsekventen i δ , og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen **før** α -utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen **ikke** er $\Gamma \vdash \Delta$, så er den også løvsekvent i δ . Dermed falsifiserer v en løvsekvent i δ .
- Hvis den falsifiserte løvsekventen **er** $\Gamma \vdash \Delta$, så falsifiserer v også $\Gamma' \vdash \Delta'$ siden α -reglene bevarer falsifiserbarhet.

Bevis (induksjonssteg – β -utvidelse).

Induksjonssteg: δ er en utledning på formen

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta' \quad \Gamma'' \vdash \Delta''}{\Gamma \vdash \Delta} \beta$$

- Anta at v falsifiserer rotsekventen i δ , og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen **før** β -utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen **ikke** er $\Gamma \vdash \Delta$, så er den også løvsekvent i δ . Dermed falsifiserer v en løvsekvent i δ .
- Hvis den falsifiserte løvsekventen **er** $\Gamma \vdash \Delta$, så falsifiserer v også $\Gamma' \vdash \Delta'$ eller $\Gamma'' \vdash \Delta''$ siden β -reglene bevarer falsifiserbarhet.



Lemma

Alle aksiomer er gyldige.

Bevis.

$$\Gamma, A \vdash A, \Delta$$

- Vi skal vise at alle valuasjoner som oppfyller antecedenten også oppfyller én formel i succedenten.
- La v være en tilfeldig valgt valuasjon som oppfyller antecedenten.
- Da oppfyller v formelen A i succedenten.

□

Bevis for sunnhet.

- Anta at π er et LK-bevis for sekventen $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig.
- Da har den en motmodell v som falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$.
- Vi har da fra tidligere lemma at v falsifiserer minst én løvsekvent i π .
- Da har π en løvsekvent som ikke er et aksiom, siden ingen aksiomer er falsifiserbare.
- Men da er ikke π et LK-bevis.

□

1 Sekventkalkyle

2 Sunnhet

3 Kompletthet

- Introduksjon
- Kompletthetsteoremet
- Bevis for kompletthetsteoremet

4 Egenskaper ved utsagnslogikk

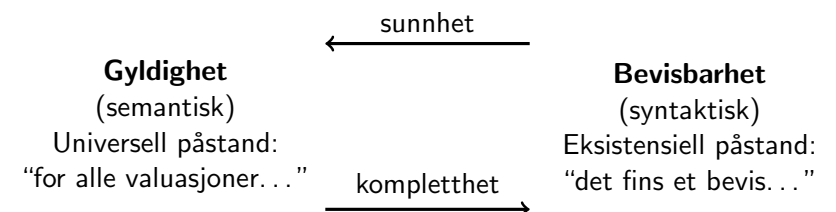
Introduksjon

Definisjon (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK er *sunn* hvis enhver LK-bevisbar sekvent er gyldig.

Definisjon (Kompletthet)

Sekventkalkylen LK er *komplett* hvis enhver gyldig sekvent er LK-bevisbar.



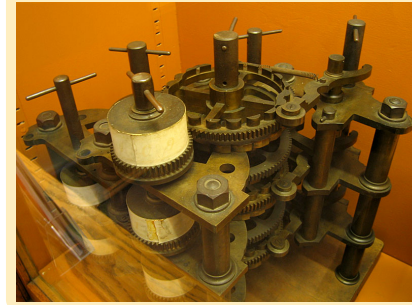
Introduksjon

Sunnhet: $\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar : $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig
Kompletthet: $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig : $\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar

- Sunnhet og kompletthet er duale begreper.
- Sunnhet gir at vi ikke kan bevise noe *mer* enn de gyldige sekventene.
- Kompletthet gir at vi kan bevise *alle* gyldige sekventer.
- Husk at vi introduserte LK som et systematisk forsøk på å falsifisere.
- En sekvent er gyldig hvis og bare hvis den ikke er falsifiserbar.
- Vi kan dermed uttrykke sunnhet og kompletthet slik:

Sunnhet: $\Gamma \vdash \Delta$ falsifiserbar : $\Gamma \vdash \Delta$ ikke bevisbar
Kompletthet: $\Gamma \vdash \Delta$ ikke bevisbar : $\Gamma \vdash \Delta$ falsifiserbar

En LK-maskin?



Sunnhet

Alt som skrives ut er gyldig.

Kompletthet

Alt som er gyldig blir skrevet ut.

- Noe kan være sunt uten å være komplett.
 - Da vises for lite.
 - Eksempel med primtall: 2, 5, 7, 11, 17, 19, ...
- Noe kan være komplett uten å være sunt.
 - Da vises for mye.
 - Eksempel med primtall: 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 ...
- Vi ønsker begge deler
 - Hverken for mye eller for lite.
 - Eksempel med primtall: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 ...

Kompletthetsteoremet

Teorem (Kompletthet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig, så er den bevisbar i LK.

For å vise *kompletthet* av sekventkalkylen, viser vi den ekvivalente påstanden:

Lemma (Eksistens av valuasjon)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i LK, så er den falsifiserbar

Dvs. det finnes en valuasjon som gjør samtlige formler i Γ sanne og samtlige formler i Δ usanne.

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar.

- Konstruer en utledning π av $\Gamma \vdash \Delta$ slik at ingen regel lenger kan anvendes. "En maksimal utledning".
- Da fins (minst) en gren G som ikke er lukket. Vi har da at:
 - løvsekventen i G inneholder kun atomære formler, og
 - løvsekventen i G er uten aksiom.
- Vi konstruerer nå en valuasjon som falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$. La

G^{\top} være mengden av alle formler som forekommer i en antecedent i G , og

G^{\perp} være mengden av alle formler som forekommer i en succedent i G , og

ν være valuasjonen som gjør alle alle atomære formler i G^{\top} sanne og alle andre atomære formler (spesielt de i G^{\perp}) usanne.

Eksempel

$$\frac{\frac{\frac{\times}{P \vdash Q, P} \quad \frac{\times}{Q, P \vdash Q}}{P \rightarrow Q, P \vdash Q} \quad \frac{\frac{\times}{R \vdash Q, P} \quad \frac{\times}{Q, R \vdash Q}}{P \rightarrow Q, R \vdash Q}}{P \rightarrow Q, P \vee R \vdash Q} \\ \frac{}{P \rightarrow Q \vdash (P \vee R) \rightarrow Q}$$

Vi får at grenen G med løvsekvent $R \vdash Q, P$ ikke er lukket.

$$G^{\top} = \{R, P \rightarrow Q, P \vee R\}$$

$$G^{\perp} = \{Q, P, (P \vee R) \rightarrow Q\}$$

v = valuasjonen definert ved $v(R) = 1$ og $v(Q) = v(P) = 0$

Denne valuasjonen falsifiserer rotsekventen.

Bevis for kompletthetsteoremet

- Vi viser ved strukturell induksjon på utsagnslogiske formler at valuasjonen v gjør *alle* formler i G^{\top} sanne og alle formler i G^{\perp} usanne.
- Påstandene som vi viser for utsagnslogiske formler er:
 - Hvis $A \in G^{\top}$, så $v(A) = 1$.
 - Hvis $A \in G^{\perp}$, så $v(A) = 0$.

Basissteg: A er en atomær formel i G^{\top}/G^{\perp} .

- Påstanden holder, fordi det var slik vi konstruerte G^{\top}/G^{\perp} .

Induksjonssteg: Fra antakelsen om at påstanden holder for A og B , så må vi vise at den holder for $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ og $(A \rightarrow B)$. Dette gir fire forskjellige tilfeller. (Vi viser tre av dem her.)

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $\neg A \in G^{\top}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\perp}$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(\neg A) = 1$.

Anta at $\neg A \in G^{\perp}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\top}$.
- Ved IH har vi $v(A) = 1$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(\neg A) = 0$.

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $(A \wedge B) \in G^{\top}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\top}$ og $B \in G^{\top}$.
- Ved IH har vi $v(A) = 1$ og $v(B) = 1$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \wedge B) = 1$.

Anta at $(A \wedge B) \in G^{\perp}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\perp}$ eller $B \in G^{\perp}$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$ eller $v(B) = 0$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \wedge B) = 0$.

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $(A \rightarrow B) \in G^\top$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^\perp$ eller $B \in G^\top$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$ eller $v(B) = 1$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \rightarrow B) = 1$.

Anta at $(A \rightarrow B) \in G^\perp$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^\top$ og $B \in G^\perp$.
- Ved IH har vi $v(A) = 1$ og $v(B) = 0$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \rightarrow B) = 0$.

1 Sekventkalkyle

2 Sunnhet

3 Kompletthet

4 Egenskaper ved utsagnslogikk

- Uttrykkskraft
- Avgjørbarhet
- Kompleksitet

Uttrykkskraft

Noe av det sterkeste vi kan uttrykke med utsagnslogikk er duehullprinsippet:

Duehullprinsippet / Dirichlets boksprinsipp

Gitt n bokser og $m > n$ objekter, så må minst en boks inneholde mer enn ett objekt.

- Anta at vi har n bokser og $n + 1$ objekter.
- Vi uttrykke duehullprinsippet i utsagnslogikk ved å la P_j^i være en utsagnsvariabel som tolkes som "objekt nr i ligger i boks nr j ".
- Hvis vi har 2 bokser og 3 objekter får vi f.eks.
 - Objekt 1 ligger i en av boksene: $P_1^1 \vee P_2^1$.
 - Objekt 3 ligger i en av boksene: $P_1^3 \vee P_2^3$.
 - Boks 1 inneholder både objekt 1 og 2: $P_1^1 \wedge P_1^2$.
 - Boks 2 inneholder både objekt 1 og 3: $P_2^1 \wedge P_2^3$.

Avgjørbarhet

Teorem

Utsagnslogikk er avgjørbart, dvs. det fins en algoritme som er i stand til etter endelig mange steg å avgjøre hvorvidt en utsagnslogisk formel er gyldig eller ikke.

- Vår sekventkalkyle gir opphav til en slik algoritme.

Kompleksitet

Teorem

Oppfyllbarhetsproblemet for utsagnslogikk - å finne ut hvorvidt en formel/sekvent er oppfyllbar eller ikke - er NP-komplett. (Avgjørbart i ikke-deterministisk polynomiell tid.)

Teorem

Gyldighetsproblemet for utsagnslogikk er coNP-komplett.