

# Forelesning 2: Utsagnslogikk – sekventkalkyle, sannhet og komplettethet

Arild Waaler - 28. januar 2008

## 1 Sekventkalkyle

### 1.1 Semantikk for sekventer

#### Semantikk for sekventer

**Definisjon 1.1** (Gyldig sekvent). En sekvent  $\Gamma \vdash \Delta$  er **gyldig** hvis alle *valuasjoner* som oppfyller alle formlene i  $\Gamma$  også oppfyller minst én formel i  $\Delta$ .

**Eksempel.** Følgende sekventer er gyldige:

- $P \vdash P$
- $P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow Q$
- $P, P \rightarrow Q \vdash Q$
- $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$

**Definisjon 1.2** (Motmodell/falsifiserbar sekvent).

- En *valuasjon*  $v$  er en **motmodell** til sekventen  $\Gamma \vdash \Delta$  hvis  $v$  oppfyller alle formlene i  $\Gamma$  og falsifiserer alle formlene i  $\Delta$ .
- Vi sier at en motmodell til en sekvent **falsifiserer** sekventen.
- En sekvent er **falsifiserbar** hvis den har en motmodell.

**Eksempel.** Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$  Motmodell:  $v(P) = \mathbf{1}, v(Q) = \mathbf{0}$
- $P \vee Q \vdash P \wedge Q$  Motmodell: som over eller  $v(P) = \mathbf{0}, v(Q) = \mathbf{1}$
- $\vdash P$  Motmodell:  $v(P) = \mathbf{0}$
- $P \vdash$  Motmodell:  $v(P) = \mathbf{1}$
- $\vdash$  Motmodell: alle modeller!

### 1.2 Oppsummering

#### Gyldig

- $P, P \rightarrow Q \vdash Q$
- Hvis  $v \models P$  og  $v \models P \rightarrow Q$ , så  $v \models Q$ .

## Bevisbar

$$\frac{\begin{array}{c} \times \\ P \vdash P \end{array} \quad \begin{array}{c} \times \\ Q \vdash Q \end{array}}{P, P \rightarrow Q \vdash Q}$$

## Falsifiserbar

- $\neg P, P \rightarrow Q \vdash \neg Q$
- En valuasjon  $v$  slik at  $v \not\models P$  og  $v \models Q$ .

## Ikke bevisbar

$$\frac{\frac{\vdash P, P}{\neg P \vdash P} \quad \frac{Q, Q \vdash}{Q \vdash \neg Q}}{\neg P, P \rightarrow Q \vdash \neg Q}$$

## 2 Sunnhet

### 2.1 Introduksjon

#### Sunnhet av LK

- Vi ønsker at alle LK-bevisbare sekventer skal være gyldige!
- Hvis ikke, så er LK *ukorrekt* eller *usunn* ...

**Definisjon 2.1** (Sunnhet). *Sekventkalkylen LK er sunn hvis enhver LK-bevisbar sekvent er gyldig.*

**Teorem 2.1.** *Sekventkalkylen LK er sunn.*

Sunnhetsteoremet sikrer oss at LK er en *korrekt* kalkyle.

#### Hvordan vise sunnhetsteoremet?

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
2. En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.
3. Alle aksiomer er gyldige.

Til slutt vises sunnhetsteoremet ved hjelp av lemmaene.

## 2.2 Bevaring av falsifiserbarhet

**Definisjon 2.2.** En LK-regel  $\theta$  er **falsifiserbarhetsbevarende** (oppover) hvis alle valuasjoner som falsifiserer konklusjonen i en  $\theta$ -slutning også falsifiserer minst ett av premissene i slutningen.

**Lemma 2.1.** Alle LK-reglene er falsifiserbarhetsbevarende.

- Vi får ett delbevis for hver LK-regel.
- Se på f.eks.  $L\rightarrow$ -regelen:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} L\rightarrow$$

- I delbeviset for  $L\rightarrow$  må vi vise at alle  $L\rightarrow$ -slutninger bevarer falsifiserbarhet oppover.
- Regelen  $L\rightarrow$  generaliserer alle  $L\rightarrow$ -slutninger.
- Vi lar  $\Gamma$ ,  $\Delta$ ,  $A$  og  $B$  i regelen stå for vilkårlige (multimengder av) utsagnslogiske formler og viser på den måten at alle  $L\rightarrow$ -slutninger bevarer falsifiserbarhet.

$$\text{Bevis for } R\neg. \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} R\neg$$

- Anta at  $v$  falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at  $v \models \Gamma$ ,  $v \not\models \neg A$  og  $v$  falsifiserer alle formlene i  $\Delta$ .
- Pr. definisjon av  $v$  har vi at  $v \models A$ .
- Vi har da at  $v \models \Gamma \cup \{A\}$  og  $v$  falsifiserer alle formlene i  $\Delta$ .
- Da falsifiserer  $v$  premisset.

□

$$\text{Bevis for } L\rightarrow. \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} L\rightarrow$$

- Anta at  $v$  falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at  $v$  oppfyller  $\Gamma \cup \{A \rightarrow B\}$  og falsifiserer alle formlene i  $\Delta$ .
- Siden  $v$  oppfyller  $A \rightarrow B$ , så har vi pr. definisjon av  $v$  at
  - (1)  $v \not\models A$ , eller
  - (2)  $v \models B$ .
- Hvis (1), så falsifiserer  $v$  venstre premiss.
- Hvis (2), så falsifiserer  $v$  høyre premiss.

□

## Bevis for “for alle”-påstander

- Se på påstanden “for alle  $x \in S: P(x)$ ”.
- Vi kan vise påstanden ved å vise at  $P(a)$  for hvert element  $a \in S$ .
- Hva hvis  $S$  er svært stor eller uendelig?
- Vi kan *generalisere fra et vilkårlig element*:
  - Velg et *vilkårlig* element  $a \in S$ .
  - Vis at  $P(a)$  holder.
  - Siden  $a$  var tilfeldig valgt må påstanden i første linje holde.

## 2.3 Eksistens av falsifiserbar løvsekvent

**Lemma 2.2.** Hvis en valuasjon  $v$  falsifiserer rotsekventen i en LK-utledning  $\delta$ , så falsifiserer  $v$  minst én av løvsekventene i  $\delta$ .

*Bevis.* Ved strukturell induksjon på LK-utledningen  $\delta$ .

*Basissteg:*  $\delta$  er en sekvent  $\Gamma \vdash \Delta$ :

$$\Gamma \vdash \Delta$$

- Her er  $\Gamma \vdash \Delta$  både rotsekvent og (eneste) løvsekvent.
- Anta at  $v$  falsifiserer  $\Gamma \vdash \Delta$ .
- Da falsifiserer  $v$  én løvsekvent i  $\delta$ , nemlig  $\Gamma \vdash \Delta$ .

□

*Bevis (induksjonssteg –  $\alpha$ -utvidelse).* Induksjonssteg:  $\delta$  er en utledning på formen

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta' \quad \alpha}{\Gamma \vdash \Delta}$$

- Anta at  $v$  falsifiserer rotsekventen i  $\delta$ , og anta at  $v$  falsifiserer en løvsekvent i utledningen *før*  $\alpha$ -utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen *ikke* er  $\Gamma \vdash \Delta$ , så er den også løvsekvent i  $\delta$ . Dermed falsifiserer  $v$  en løvsekvent i  $\delta$ .
- Hvis den falsifiserte løvsekventen *er*  $\Gamma \vdash \Delta$ , så falsifiserer  $v$  også  $\Gamma' \vdash \Delta'$  siden  $\alpha$ -reglene bevarer falsifiserbarhet.

□

Bevis (induksjonssteg –  $\beta$ -utvidelse). Induksjonssteg:  $\delta$  er en utledning på formen

$$\frac{\frac{\Gamma' \vdash \Delta' \quad \Gamma'' \vdash \Delta''}{\Gamma \vdash \Delta}}{\beta}$$

- Anta at  $v$  falsifiserer rotsekventen i  $\delta$ , og anta at  $v$  falsifiserer en løvsekvent i utledningen før  $\beta$ -utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen *ikke* er  $\Gamma \vdash \Delta$ , så er den også løvsekvent i  $\delta$ . Dermed falsifiserer  $v$  en løvsekvent i  $\delta$ .
- Hvis den falsifiserte løvsekventen *er*  $\Gamma \vdash \Delta$ , så falsifiserer  $v$  også  $\Gamma' \vdash \Delta'$  eller  $\Gamma'' \vdash \Delta''$  siden  $\beta$ -reglene bevarer falsifiserbarhet.

□

## 2.4 Alle aksiomer er gyldige

**Lemma 2.3.** *Alle aksiomer er gyldige.*

Bevis.  $\Gamma, A \vdash A, \Delta$

- Vi skal vise at alle valuasjoner som oppfyller antecedenten også oppfyller én formel i succedenten.
- La  $v$  være en tilfeldig valgt valuasjon som oppfyller antecedenten.
- Da oppfyller  $v$  formelen  $A$  i succedenten.

□

## 2.5 Bevis for sunnhetsteoremet

Bevis for sunnhet.

- Anta at  $\pi$  er et LK-bevis for sekventen  $\Gamma \vdash \Delta$ .
- Anta for motsigelse at  $\Gamma \vdash \Delta$  *ikke* er gyldig.
- Da har den en motmodell  $v$  som falsifiserer  $\Gamma \vdash \Delta$ .

- Vi har da fra tidligere lemma at  $\nu$  falsifiserer minst én løvsekvent i  $\pi$ .
- Da har  $\pi$  en løvsekvent som ikke er et aksiom, siden ingen aksiomer er falsifiserbare.
- Men da er ikke  $\pi$  et LK-bevis.

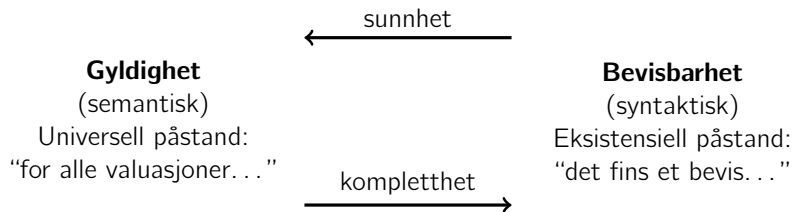
□

## 3 Kompletthet

### 3.1 Introduksjon

**Definisjon 3.1** (Sunnhet). *Sekventkalkylen LK er sunn hvis enhver LK-bevisbar sekvent er gyldig.*

**Definisjon 3.2** (Kompletthet). *Sekventkalkylen LK er **komplett** hvis enhver gyldig sekvent er LK-bevisbar.*



**Sunnhet:**  $\Gamma \vdash \Delta$  bevisbar :  $\Gamma \vdash \Delta$  gyldig  
**Kompletthet:**  $\Gamma \vdash \Delta$  gyldig :  $\Gamma \vdash \Delta$  bevisbar

- Sunnhet og kompletthet er duale begreper.
- Sunnhet gir at vi ikke kan bevise noe *mer* enn de gyldige sekventene.
- Kompletthet gir at vi kan bevise *alle* gyldige sekventer.
- Husk at vi introduserte LK som et systematisk forsøk på å falsifisere.
- En sekvent er gyldig hvis og bare hvis den ikke er falsifiserbar.
- Vi kan dermed uttrykke sunnhet og kompletthet slik:

**Sunnhet:**  $\Gamma \vdash \Delta$  falsifiserbar :  $\Gamma \vdash \Delta$  ikke bevisbar  
**Kompletthet:**  $\Gamma \vdash \Delta$  ikke bevisbar :  $\Gamma \vdash \Delta$  falsifiserbar

- Noe kan være sunt uten å være komplett.
  - Da vises for lite.
  - Eksempel med primtall: 2, 5, 7, 11, 17, 19, ...
- Noe kan være komplett uten å være sunt.
  - Da vises for mye.

- Eksempel med primtall: 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 . . .
- Vi ønsker begge deler
  - Hverken for mye eller for lite.
  - Eksempel med primtall: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 . . .

### 3.2 Kompletthetsteoremet

**Teorem 3.1** (Kompletthet). *Hvis  $\Gamma \vdash \Delta$  er gyldig, så er den bevisbar i LK.*

For å vise *kompletthet* av sekventkalkylen, viser vi den ekvivalente påstanden:

**Lemma 3.1** (Eksistens av valuasjon). *Hvis  $\Gamma \vdash \Delta$  ikke er bevisbar i LK, så er den falsifiserbar*

Dvs. det finnes en valuasjon som gjør samtlige formler i  $\Gamma$  sanne og samtlige formler i  $\Delta$  usanne.

### 3.3 Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at  $\Gamma \vdash \Delta$  ikke er bevisbar.

- Konstruer en utledning  $\pi$  av  $\Gamma \vdash \Delta$  slik at ingen regel lenger kan anvendes. “En maksimal utledning”.
- Da fins (minst) en gren  $G$  som ikke er lukket. Vi har da at:
  - løvsekventen i  $G$  inneholder kun atomære formler, og
  - løvsekventen i  $G$  er uten aksiom.
- Vi konstruerer nå en valuasjon som falsifiserer  $\Gamma \vdash \Delta$ . La

$G^\top$  være mengden av alle formler som forekommer i en antecedent i  $G$ , og

$G^\perp$  være mengden av alle formler som forekommer i en succedent i  $G$ , og

$v$  være valuasjonen som gjør alle alle atomære formler i  $G^\top$  sanne og alle andre atomære formler (spesielt de i  $G^\perp$ ) usanne.

#### Eksempel

$$\frac{\frac{\frac{\times}{P \vdash Q, P} \quad \frac{\times}{Q, P \vdash Q}}{P \rightarrow Q, P \vdash Q} \quad \frac{\frac{\times}{R \vdash Q, P} \quad \frac{\times}{Q, R \vdash Q}}{P \rightarrow Q, R \vdash Q}}{\frac{P \rightarrow Q, P \vee R \vdash Q}{P \rightarrow Q \vdash (P \vee R) \rightarrow Q}}$$

Vi får at grenen  $G$  med løvsekvent  $R \vdash Q, P$  ikke er lukket.

$$G^{\top} = \{R, P \rightarrow Q, P \vee R\}$$

$$G^{\perp} = \{Q, P, (P \vee R) \rightarrow Q\}$$

$v$  = valuasjonen definert ved  $v(R) = 1$  og  $v(Q) = v(P) = 0$

Denne valuasjonen falsifiserer rotsekventen.

- Vi viser ved strukturell induksjon på utsagnslogiske formler at valuasjonen  $v$  gjør *alle* formler i  $G^{\top}$  sanne og alle formler i  $G^{\perp}$  usanne.

- Påstandene som vi viser for utsagnslogiske formler er:

Hvis  $A \in G^{\top}$ , så  $v(A) = 1$ .

Hvis  $A \in G^{\perp}$ , så  $v(A) = 0$ .

Basissteg:  $A$  er en atomær formel i  $G^{\top}/G^{\perp}$ .

- Påstanden holder, fordi det var slik vi konstruerte  $G^{\top}/G^{\perp}$ .

Induksjonssteg: Fra antakelsen om at påstanden holder for  $A$  og  $B$ , så må vi vise at den holder for  $\neg A$ ,  $(A \wedge B)$ ,  $(A \vee B)$  og  $(A \rightarrow B)$ . Dette gir fire forskjellige tilfeller. (Vi viser tre av dem her.)

Anta at  $\neg A \in G^{\top}$ .

- Siden utledningen er "maksimal", har vi  $A \in G^{\perp}$ .
- Ved IH har vi  $v(A) = 0$ .
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi  $v(\neg A) = 1$ .

Anta at  $\neg A \in G^{\perp}$ .

- Siden utledningen er "maksimal", har vi  $A \in G^{\top}$ .
- Ved IH har vi  $v(A) = 1$ .
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi  $v(\neg A) = 0$ .

Anta at  $(A \wedge B) \in G^{\top}$ .

- Siden utledningen er "maksimal", har vi  $A \in G^{\top}$  og  $B \in G^{\top}$ .
- Ved IH har vi  $v(A) = 1$  og  $v(B) = 1$ .
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi  $v(A \wedge B) = 1$ .

Anta at  $(A \wedge B) \in G^{\perp}$ .

- Siden utledningen er "maksimal", har vi  $A \in G^{\perp}$  eller  $B \in G^{\perp}$ .



- Ved IH har vi  $v(A) = 0$  eller  $v(B) = 0$ .
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi  $v(A \wedge B) = 0$ .

Anta at  $(A \rightarrow B) \in G^\top$ .

- Siden utledningen er "maksimal", har vi  $A \in G^\perp$  eller  $B \in G^\top$ .
- Ved IH har vi  $v(A) = 0$  eller  $v(B) = 1$ .
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi  $v(A \rightarrow B) = 1$ .

Anta at  $(A \rightarrow B) \in G^\perp$ .

- Siden utledningen er "maksimal", har vi  $A \in G^\top$  og  $B \in G^\perp$ .
- Ved IH har vi  $v(A) = 1$  og  $v(B) = 0$ .
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi  $v(A \rightarrow B) = 0$ .

## 4 Egenskaper ved utsagnslogikk

### 4.1 Uttrykkskraft

Noe av det sterkeste vi kan uttrykke med utsagnslogikk er duehullprinsippet:

#### Duehullprinsippet / Dirichlets boksprinsipp

Gitt  $n$  bokser og  $m > n$  objekter, så må minst en boks inneholde mer enn ett objekt.

- Anta at vi har  $n$  bokser og  $n + 1$  objekter.
- Vi uttrykke duehullprinsippet i utsagnslogikk ved å la  $P_j^i$  være en utsagnsvariabel som tolkes som "objekt nr  $i$  ligger i boks nr  $j$ ".
- Hvis vi har 2 bokser og 3 objekter får vi f.eks.
  - Objekt 1 ligger i en av boksene:  $P_1^1 \vee P_2^1$ .
  - Objekt 3 ligger i en av boksene:  $P_1^3 \vee P_2^3$ .
  - Boks 1 inneholder både objekt 1 og 2:  $P_1^1 \wedge P_1^2$ .
  - Boks 2 inneholder både objekt 1 og 3:  $P_2^1 \wedge P_2^3$ .

### 4.2 Avgjørbarhet

**Teorem 4.1.** *Utsagnslogikk er avgjørbart, dvs. det fins en algoritme som er i stand til etter endelig mange steg å avgjøre hvorvidt en utsagnslogisk formel er gyldig eller ikke.*

- Vår sekventkalkyle gir opphav til en slik algoritme.

### 4.3 Kompleksitet

**Teorem 4.2.** *Oppfyllbarhetsproblemet for utsagnslogikk - å finne ut hvorvidt en formel/sekvent er oppfyllbar eller ikke - er NP-komplett. (Avgjørbart i ikke-deterministisk polynomiell tid.)*

**Teorem 4.3.** *Gyldighetsproblemet for utsagnslogikk er coNP-komplett.*