Forelesning 4: Intuisjonistisk logikk

Arild Waaler - 11. februar 2008

1 Intuisjonistisk logikk

1.1 Innledning

Til nå i kurset

- Det utsagnslogiske språket: konnektiver og formler
- Bevissystem:LK og DPLL for *klassisk* utsagnslogikk
- Semantikk: Definisjon av sannhet og gyldighet
- Bevis for sunnhet (og kompletthet) av bevissystemet med hensyn på semantikken
- Vi skal nå se på *intuisjonistisk* logikk, som i forhold til klassisk logikk har:
  - likt språk
  - forskjellig semantikk
  - beslektet sekventkalkyle

Negasjon som bakgrunn for intuisjonistisk logikk

Aristoteles identifiserte to ulike prinsipper for negasjon:

- Kontradiksjonsprinsippet: En påstand og dens negasjon kan ikke begge være sanne samtidig og i samme henseende: $\neg(P \wedge \neg P)$
- Loven om det utelukkede tredje: En påstand er enten sann eller usann: $P \vee \neg P$
- I klassisk logikk holder begge disse prinsippene. I intuisjonistisk logikk holder bare kontradiksjonsprinsippet
- En hovedidé ved matematisk intuisjonisme: sannhet betyr at vi kan verifisere. Siden det er mange påstander som vi idag hverken er istand til å bevise eller motbevise, holder ikke $P \vee \neg P$.
- Intuisjonistisk logikk er en hovedretning innen matematikkens filosofi, og er idag også et viktig grunnlag for teoretisk databehandling.

1.2 Sekventkalkyle for intuisjonistisk logikk

Syntaks

- En *intuisjonistisk sekvent* er på formen $\Gamma \vdash A$ eller $\Gamma \vdash$
- $\Gamma \vdash A$ uttrykker at "A følger logisk fra Γ"

- $\Gamma \vdash$ uttrykker at "Γ er *inkonsistent*" (inneholder en selvmotsigelse)
- Sekventkalkylen **LJ** er essensielt **LK** begrenset til intuisjonistiske sekventer
- Reglene er inndelt i 3 grupper: Identitetsregler, strukturelle regler og logiske regler

Definisjon 1.1 (Identitetsregler)**.** *Identitetsreglene i* **LJ** *er:*

$$\Gamma, A \vdash A \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma, A \vdash C}{\Gamma \vdash C}\,\text{Snitt}$$

Snitt-regelen holder også i **LK**, da med en Δ i suksedenten.

- Regelen er kalkylens "resonneringsregel" og kan brukes til å representere matematiske resonnement: hvis vi ser på venstre premiss som et lemma, vil høyre premiss fange inn at vi anvender lemmaet.
- Bevislengden til bevis med snitt kan være dramatisk kortere enn for snittfrie bevis.
- Merk at *snittformelen A* ikke er en delformel av sekventen i konklusjonen til regelen. Dette gjør snitt-regelen vanskelig å implementere i bevissøk.
- Regelen er ikke nødvendig hverken i **LJ** eller **LK**. Kompletthetsbeviset for **LK** bruker ikke snitt-regelen.

Definisjon 1.2 (Strukturelle regler)**.** *De strukturelle reglene i* **LJ** *er:*

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash C}{\Gamma, A \vdash C}\,\text{LC} \qquad \frac{\Gamma \vdash C}{\Gamma, A \vdash C}\,\text{LT} \qquad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash C}\,\text{RT}$$

- *Kopieringsregelen* uttrykker at vi kan bruke en antagelse i et bevis flere ganger. Denne regelen er unødvendig i utsagnslogisk **LK**, men er nødvendig i de fleste andre logikker.
- Den *venstre tynningsregelen* uttrykker at vi kan fjerne en antagelse i et resonnement som vi ikke bruker. Denne interpretasjonen bygger på at en tom suksedent uttrykker "den usanne påstanden".
- Den *høyre tynningsregelen* reflekterer at "fra det usanne følger alt" (*ex falso quodlibet*).

Definisjon 1.3 (Logiske regler)**.** *De logiske reglene i* **LJ** *er:*

$$\frac{\Gamma, A\,,\ B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}\,\text{L}\wedge \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\,\text{R}\wedge$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}\,\text{L}\vee \qquad \frac{\Gamma \vdash \quad A_i}{\Gamma \vdash A_1 \vee A_2}\,\text{R}\vee_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \to B \vdash C}\,\text{L}\to \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \quad B}{\Gamma \quad \vdash A \to B}\,\text{R}\to$$

$$\frac{\Gamma \quad \vdash A}{\Gamma, \neg A \vdash C}\,\text{L}\neg \qquad \frac{\Gamma, A \vdash}{\Gamma \quad \vdash \neg A}\,\text{R}\neg$$

Merk:

- C kan være fraværende.
- C forsvinner fra suksendenten i venstre premiss til L$\to$ og L$\neg$.

Vi kan ikke bevise $\vdash P \lor \neg P$

$$\dfrac{\vdash P}{\vdash P \lor \neg P}\,\mathsf{R}\lor_1$$

$$\dfrac{\dfrac{P \vdash}{\vdash \neg P}\,\mathsf{R}\neg}{\vdash P \lor \neg P}\,\mathsf{R}\lor_2$$

- Vi kunne også prøvd å bruke **Snitt**. Det ville ikke ført frem, men det er ikke trivielt å vise dette! Vi skal senere i forelesningen se at det ikke kan føre frem.
- Vi kan vise at i LJ er $\Gamma \vdash A \lor B$ bevisbar hvis og bare hvis enten $\Gamma \vdash A$ er bevisbar eller $\Gamma \vdash B$ er bevisbar.

Vi kan bevise $\vdash \neg\neg(P \lor \neg P)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \vdash P}{P \vdash P \lor \neg P}\,\mathsf{L}\lor_1}{\neg(P \lor \neg P), P \vdash}\,\mathsf{L}\neg}{\neg(P \lor \neg P) \vdash \neg P}\,\mathsf{R}\neg}{\neg(P \lor \neg P) \vdash P \lor \neg P}\,\mathsf{L}\lor_2}{\neg(P \lor \neg P), \neg(P \lor \neg P) \vdash}\,\mathsf{L}\neg}{\neg(P \lor \neg P) \vdash}\,\mathsf{LC}}{\vdash \neg\neg(P \lor \neg P)}\,\mathsf{R}\neg$$

- Generelt kan vi i intuisjonistisk utsagnslogikk alltid vise dobbeltnegasjonen til en formel som kan bevises i klassisk logikk.
- Merk bruken av kontraksjon! Vi trenger kontraksjon fordi kalkylen inneholder tre *destruktive* regler: L$\neg$, L$\to$ og R$\lor_i$. I disse reglene mistes informasjon når vi går fra konklusjon til premiss.

Lemma 1.1. *En sekvent som er bevisbar i* LJ *er også bevisbar i* $\mathsf{LK}^{+\mathsf{LC}}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \vdash P, \neg P, P}{P \vdash P \lor \neg P, P}\,\mathsf{L}\lor_1}{\neg(P \lor \neg P), P \vdash P}\,\mathsf{L}\neg}{\neg(P \lor \neg P) \vdash P, \neg P}\,\mathsf{R}\neg}{\neg(P \lor \neg P) \vdash P \lor \neg P}\,\mathsf{L}\lor_2}{\neg(P \lor \neg P), \neg(P \lor \neg P) \vdash}\,\mathsf{L}\neg}{\neg(P \lor \neg P) \vdash}\,\mathsf{LC}}{\vdash \neg\neg(P \lor \neg P)}\,\mathsf{R}\neg$$

Bevisskisse. Hvis δ er en LJ-utledning av rotsekventen $\Gamma \vdash C$, så konstruer vi en LK-utledning δ' induktivt ved å

1. la $\Gamma \vdash C$ være rotsekventen i δ, og
2. erstatte enhver LJ-slutning med den tilsvarende LK-slutingen.

Hvis δ er et LJ-bevis, så må δ' være et $\mathsf{LK}^{+\mathsf{LC}}$-bevis.

- Vi kan da få flere formler i suksedenten i sekventene i δ' enn i de tilsvarende sekventer i δ.
- De logiske reglene kan da brukes i nøyaktig samme rekkefølge i δ' som i δ.
- Siden vi ikke har innført strukturelle regler i LK, kan vi simpelthen ignorere tynningsreglene. Kontraksjon beholder vi pr. antagelse.

□

- En intuisjonistisk sekvent $\Gamma \vdash A$ kan tolkes på to måter:
  - Vi kan konstruere et bevis for A gitt bevis for hvert utsagn i Γ ("*proof interpretation*")
  - Hvis vi vet at Γ holder, så vet vi også at A holder (Kripke-semantikk)
- De to tolkningene reflekterer to grunnleggende tilnærminger til "hva logikk er":
  - Logikken defineres ut fra inferensreglene
  - Logikken defineres ut fra en modeller (og dermed: en semantisk konsekvensrelasjon)
- De to tilnærmingene gir ulik forklaring på hva sunnhet og kompletthet betyr

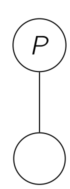
1.3 Kripke-semantikk

Idéen bak intuisjonistisk semantikk

Semantikken til intuisjonistisk logikk er nøye knyttet opp til en modell av kunnskap til en ideell resonnerer, dvs. et subjekt som er istand til å trekke alle konsekvenser av sin egen kunnskap.

- Et punkt x er assosiert med en mengde atomære formler, dvs. de formler som subjektet har bevis for/evidens for/vet på x.
- $\neg A$ holder på x dersom A ikke holder på noe punkt y der subjektet vet minst like mye som på x.

Moteksempel til $P \vee \neg P$:



- På det nederste punktet vet ikke subjektet at P, selv om det vet det på et "bedre" punkt lenger opp i treet. Subjektet vet heller ikke $\neg P$, siden det forutsetter at P ikke holder på noe "bedre" punkt.

- Idéen er at vi gir en mengde kunnskapstilstander (kalt *punkter*) som typisk er ordnet i en trestruktur. Hvis x er et punkt og y er et punkt lenger opp i treet enn x (en "etterkommer" til x), så er y et punkt der subjektet vet minst like mye som det vet på x.

- Hva som er *grunnen* til at subjektet vet mer på et punkt enn et annet, tar vi ikke stilling til i modellen. Det er vanlig å tenke at ny kunnskap er knyttet til ny evidens. Vi kan tenke oss punktene utstrakt i tid, men det er ingenting i modellene som krever denne tolkningen.

Partiell ordning

Definisjon 1.4 (Partiell ordning)**.** *Et par* $(S, \leq)$ *er en* partiell ordning *hvis* $\leq$ *er en binær relasjon på* S *slik at for alle* $x, y, z \in S$*,*

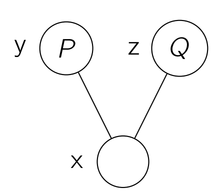
1. $x \leq x$ *(refleksivitet),*
2. *hvis* $x \leq y$ *og* $y \leq z$*, så* $x \leq z$ *(transitivitet),*
3. *hvis* $x \leq y$ *og* $y \leq x$*, så* $x = y$ *(anti-symmetri).*

Kripke-modeller

Definisjon 1.5. *En* Kripke-modell *er et trippel* $(S, \leq, \Vdash')$ *der*

1. S *er en ikke-tom mengde av punkter,*
2. $(S, \leq)$ *er en partiell ordning,*
3. $\Vdash'$ *er en relasjon fra* S *til* $\mathcal{V}_u$ *(mengden av alle atomære formler),* $x \Vdash' P$ *betyr at* x *tvinger* P*, og*
4. $\Vdash'$ *tilfredsstiller* monotoni*: hvis* $x \Vdash' P$ *og* $x \leq y$*, så* $y \Vdash' P$*.*
5. $\Vdash'$ *utvides så til* $\Vdash$*, som er definert over hele språket:*
   - $x \Vdash P$ *hviss* $x \Vdash' P$
   - $x \Vdash A \wedge B$ *hviss* $x \Vdash A$ *og* $x \Vdash B$
   - $x \Vdash A \vee B$ *hviss* $x \Vdash A$ *eller* $x \Vdash B$
   - $x \Vdash A \rightarrow B$ *hviss vi for enhver* y *slik at* $x \leq y$ *har at:* *hvis* $y \Vdash A$ *så* $y \Vdash B$*.*
   - $x \Vdash \neg A$ *hviss for enhver* y *slik at* $x \leq y$*:* $y \nVdash A$

Motmodell til $\vdash (P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$



- Toppnodene y og z er klassiske valuasjoner. Vi har at
  - $y \Vdash P$. Siden $y \nVdash Q$ og ingen andre punkter er over y har vi $y \Vdash \neg Q$.
  - $z \Vdash Q$. Tilsvarende har vi $z \Vdash \neg P$.
- $x \nVdash P \rightarrow Q$ siden $x \leq y$ og $y \Vdash P$ og $y \nVdash Q$.
- $x \nVdash Q \rightarrow P$ siden $x \leq z$ og $z \Vdash Q$ og $z \nVdash P$.

Sammenheng mellom klassisk og intuisjonistisk semantikk

- Kripke-modeller som kun består av ett punkt kollapser til valuasjoner, dvs. modeller for klassisk logikk.
- Merk at dette gir et *semantisk* bevis for at alt som er gyldig intuisjonistisk, også er klassisk gyldig. For anta at en formel A ikke er klassisk gyldig. Da finnes en valuasjon v som gjør den usann. Men siden alle valuasjoner også er intuisjonistiske modeller, er A heller ikke intuisjonistisk gyldig.
- Merk hvordan de intuisjonistiske modellene generaliserer semantikken for klassisk logikk. Når vi nå skal evaluere en formel, ser vi i det generelle tilfellet ikke bare på én valuasjon: Vi ser på en mengde valuasjoner som er ordnet!

Lemma 1.2. *Monotoni gjelder for enhver formel i enhver modell, dvs.* $x \Vdash A$ *og* $x \leq y$*, så* $y \Vdash A$*.*

Bevis. Ved strukturell induksjon over oppbyggingen av formelen A:

Basissteg: A er atomær formel. Påstanden i lemmaet følger fra definisjonen av Kripke-modeller og monotoniegenskapen.

Induksjonssteg: Vi viser påstanden i lemmaet for tilfellet at A er $B \to C$. De andre tilfellene er lignende.

- Anta $x \Vdash B \to C$ og at $x \leq y$. (Må vise at $y \Vdash B \to C$.)
- Ta en vilkårlig z slik at $y \leq z$. Ved transitivitet av $\leq$ har vi at $x \leq z$.
- Ved modellbetingelsen følger at hvis $z \Vdash B$, så $z \Vdash C$.
- Siden z er et vilkårlig punkt slik at $y \leq z$, gir modellbetingelsen at $y \Vdash B \to C$.

$\square$

Intuisjonistiske generaliseringer av semantiske begreper

- En punkt i en modell tvinger Γ hvis den tvinger hver formel i Γ. Intet punkt tvinger $\emptyset$.
- Et punkt x i en Kripke-modell er en *motmodell* til en sekvent $\Gamma \vdash C$ hvis $x \Vdash \Gamma$ og $x \nVdash C$. Hvis det finnes et slikt punkt x i modellen sier vi at *Kripke-modellen* er en motmodell til sekventen.
- Merk at hvis C ikke finnes, dvs. at suksedenten er tom, vil trivielt x ikke tvinge suksedenten. Hvis Γ er tom, vil x være motmodell til $\Gamma \vdash C$ dersom den ikke tvinger C.
- Et punkt x i en Kripke-modell er en *modell for* en sekvent hvis den ikke er en motmodell til sekventen.
- En sekvent er *gyldig* i en Kripke-modell hvis alle punkter i Kripke-modellen er en modell for sekventen.
- En sekvent er *gyldig* mhp. klassen av Kripke-modeller hvis den ikke har noen motmodell, dvs. at den er gyldig i enhver modell.

1.4 Sunnhet

Sunnhetsteoremet

Sekventkalkylen LJ er *sunn* hvis enhver LJ-bevisbar sekvent er gyldig mhp. klassen av Kripke-modeller.

Teorem 1.1. *Sekventkalkylen* LJ *er sunn.*

1. Alle LJ-reglene bevarer falsifiserbarhet nedenfra og opp, evt. gyldighet ovenfra og ned.
2. En LJ-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent. Dette viser vi ved induksjon over utledningen.
3. Alle aksiomer er gyldige.

Vi viser bare det første punktet siden argumentet ellers er helt identisk til sunnhetsargumentet for LK.

Snitt-regelen bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma, A \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ \text{Snitt}$$

- Anta at det finnes en Kripke-modell og et punkt x slik at x tvinger Γ og at x ikke tvinger C.
- Enten tvinger x A eller så tvinger ikke x A.
- Hvis x ikke tvinger A, så vil Kripke-modellen være en motmodell til venstre premiss.
- Ellers vil Kripke-modellen være en motmodell til høyre premiss.

L$\vee$ **bevarer falsifiserbarhet**

Husk: $x \Vdash A \vee B$ hviss $x \Vdash A$ eller $x \Vdash B$.

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}\ \text{L}\vee$$

- Anta at det finnes en Kripke-modell og et punkt x slik at x tvinger $\Gamma, A \vee B$ og at x ikke tvinger C.
- Ved modellbetingelsen for *eller* vil x enten tvinge A eller tvinge B.
- Hvis x tvinger A, så vil Kripke-modellen være en motmodell til venstre premiss.
- Ellers vil Kripke-modellen være en motmodell til høyre premiss.

R$\vee_i$ **bevarer falsifiserbarhet:**

Husk: $x \Vdash A \vee B$ hviss $x \Vdash A$ eller $x \Vdash B$.

$$\frac{\Gamma \vdash \quad A_i}{\Gamma \vdash A_1 \vee A_2}\ \text{R}\vee_i$$

- Anta at det finnes en Kripke-modell og et punkt x slik at x tvinger Γ og at x ikke tvinger $A_1 \vee A_2$.
- Ved modellbetingelsen for $\vee$ vil x hverken tvinge A_1 eller tvinge A_2.
- Derfor vil Kripke-modellen være en motmodell til premisset både i tilfellet R$\vee_1$ og i tilfellet R$\vee_2$.

L$\rightarrow$ **bevarer falsifiserbarhet:**

Husk: $x \Vdash A \rightarrow B$ hviss for enhver y slik at $x \leq y$: hvis $y \Vdash A$, så $y \Vdash B$.

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash C}\ \mathsf{L}{\rightarrow}$$

- Anta at det finnes en Kripke-modell og et punkt x slik at x tvinger $\Gamma, A \rightarrow B$ og at x ikke tvinger C.
- Enten tvinger x A eller så tvinger ikke x A.
- Hvis x ikke tvinger A, så vil Kripke-modellen være en motmodell til venstre premiss.
- Ellers vil Kripke-modellen være en motmodell til høyre premiss.

Merk likheten med resonnementet om Snitt! Dette er ikke tilfeldig: Snitt er en generalisert L$\rightarrow$.

R$\rightarrow$ **bevarer falsifiserbarhet:**

Husk: $x \Vdash A \rightarrow B$ hviss for enhver y slik at $x \leq y$: hvis $y \Vdash A$, så $y \Vdash B$.

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}\ \mathsf{R}{\rightarrow}$$

- Anta at det finnes en Kripke-modell og et punkt x slik at x tvinger Γ og at x ikke tvinger $A \rightarrow B$.
- Ved modellbetingelsen for *implikasjon* vil det finnes et punkt y der $x \leq y$ slik at y tvinger A og y ikke tvinger B.
- Ved Lemmaet vil y tvinge Γ.
- Dermed vil y tvinge Γ, A og ikke tvinge B, dvs. at Kripke-modellen er en motmodell til premisset.

2 Konsistens

2.1 Definisjoner

To betydninger av konsistens

Definisjon 2.1 (Konsistens av sekventkalkyle)**.** *Sekventkalkylen* LJ *er* konsistent *hvis den tomme* LJ*-sekventen* $\vdash$ *ikke er bevisbar.*

- Dette gjenspeiler tolkningen av den tomme sekventen som et uttrykk for en absurditet. Ved hjelp av tynning kan vi utlede hva som helst fra den tomme sekventen.

Definisjon 2.2 (Konsistens av formelmengde)**.** *En mengde formler* Γ *er* LJ-konsistent *hvis sekventen* $\Gamma \vdash$ *ikke er bevisbar.*

- Merk at et utsagn om konsistens av en mengde Γ er en påstand om *ikke-bevisbarhet*. Dette er en kompleks påstand om en uendelig stor mengde av utledninger: Av alle LJ-utledninger er ingen av dem bevis for sekventen $\Gamma \vdash$.

2.2 Konsistens følger fra sunnhet

Teorem 2.1. *Hvis det finnes et punkt i en Kripke-modell som tvinger alle formlene i en mengde* Γ*, så er ikke sekventen* $\Gamma \vdash$ *bevisbar i* LJ*.*

Bevis. Anta at $x \Vdash \Gamma$. Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash$ er LJ-bevisbar.

- Ved Sunnhetsteoremet er $\Gamma \vdash$ gyldig.
- Siden $x \Vdash \Gamma$, må $x \Vdash \perp$, der $\perp$ står for en formel som alltid er usann. Dette er umulig.

$\square$

Eksistensen av en enkelt Kripke-modell er nok til å konkludere at intet bevis finnes. Derfor vet vi at vi ikke kan utlede $P \vee \neg P$ i LJ selv om vi bruker snitt.