INF3170 – Logikk

Forelesning 6: Førsteordens logikk – syntaks og semantikk

Martin Giese

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

25. februar 2008

Dagens plan

1. Innledning til førsteordens logikk
2. Førsteordens logikk – syntaks
3. Førsteordens logikk – semantikk

1. Innledning til førsteordens logikk
   - Introduksjon
   - Overblikk
2. Førsteordens logikk – syntaks
3. Førsteordens logikk – semantikk

Introduksjon

- I utsagnslogikk kan vi analysere de logiske konnektivene $\neg$, $\wedge$, $\vee$ og $\rightarrow$, og resonnering som gjøres med slike.

Introduksjon

- I utsagnslogikk kan vi analysere de logiske konnektivene $\neg$, $\wedge$, $\vee$ og $\rightarrow$, og resonnering som gjøres med slike.
- Førsteordens logikk (også kalt predikatlogikk) utvider utsagnslogikk med *kvantorer*:

Introduksjon

- I utsagnslogikk kan vi analysere de logiske konnektivene $\neg$, $\wedge$, $\vee$ og $\rightarrow$, og resonnering som gjøres med slike.
- Førsteordens logikk (også kalt predikatlogikk) utvider utsagnslogikk med *kvantorer*:
  - $\exists$ (eksistenskvantoren) og

Introduksjon

- I utsagnslogikk kan vi analysere de logiske konnektivene $\neg$, $\wedge$, $\vee$ og $\rightarrow$, og resonnering som gjøres med slike.
- Førsteordens logikk (også kalt predikatlogikk) utvider utsagnslogikk med *kvantorer*:
  - $\exists$ (eksistenskvantoren) og
  - $\forall$ (allkvantoren).

Introduksjon

- I utsagnslogikk kan vi analysere de logiske konnektivene $\neg$, $\wedge$, $\vee$ og $\rightarrow$, og resonnering som gjøres med slike.
- Førsteordens logikk (også kalt predikatlogikk) utvider utsagnslogikk med *kvantorer*:
  - $\exists$ (eksistenskvantoren) og
  - $\forall$ (allkvantoren).
- Vi kan med disse uttrykke påstander om at det finnes et objekt med en bestemt egenskap eller at alle objekter har en bestemt egenskap.

Introduksjon

- I utsagnslogikk kan vi analysere de logiske konnektivene $\neg$, $\wedge$, $\vee$ og $\rightarrow$, og resonnering som gjøres med slike.
- Førsteordens logikk (også kalt predikatlogikk) utvider utsagnslogikk med *kvantorer*:
  - $\exists$ (eksistenskvantoren) og
  - $\forall$ (allkvantoren).
- Vi kan med disse uttrykke påstander om at det finnes et objekt med en bestemt egenskap eller at alle objekter har en bestemt egenskap.
- Førsteordens logikk er langt rikere enn utsagnslogikk.

Introduksjon

- I utsagnslogikk kan vi analysere de logiske konnektivene $\neg$, $\wedge$, $\vee$ og $\rightarrow$, og resonnering som gjøres med slike.
- Førsteordens logikk (også kalt predikatlogikk) utvider utsagnslogikk med *kvantorer*:
  - $\exists$ (eksistenskvantoren) og
  - $\forall$ (allkvantoren).
- Vi kan med disse uttrykke påstander om at det finnes et objekt med en bestemt egenskap eller at alle objekter har en bestemt egenskap.
- Førsteordens logikk er langt rikere enn utsagnslogikk.
- Førsteordens logikk er ikke avgjørbart.

Noen eksempler

Noen påstander som vi kan representere og analysere ved førsteordens logikk er følgende:

- "Ethvert heltall er enten partall eller oddetall."

Noen eksempler

Noen påstander som vi kan representere og analysere ved førsteordens logikk er følgende:

- "Ethvert heltall er enten partall eller oddetall."
- "Det fins uendelig mange primtall."

Noen eksempler

Noen påstander som vi kan representere og analysere ved førsteordens logikk er følgende:

- "Ethvert heltall er enten partall eller oddetall."
- "Det fins uendelig mange primtall."
- "Mellom to brøktall fins det annet brøktall."

Noen eksempler

Noen påstander som vi kan representere og analysere ved førsteordens logikk er følgende:

- "Ethvert heltall er enten partall eller oddetall."
- "Det fins uendelig mange primtall."
- "Mellom to brøktall fins det annet brøktall."
- "Hvis a er mindre enn b og b er mindre enn c, så er a mindre enn c."

Flere eksempler

Av mindre matematisk art:

- "Alle Ifi-studenter er late."

Flere eksempler

Av mindre matematisk art:

- "Alle Ifi-studenter er late."
- "Ingen Ifi-studenter er late."

Flere eksempler

Av mindre matematisk art:

- "Alle Ifi-studenter er late."
- "Ingen Ifi-studenter er late."
- "Noen Ifi-studenter er late."

Flere eksempler

Av mindre matematisk art:

- "Alle Ifi-studenter er late."
- "Ingen Ifi-studenter er late."
- "Noen Ifi-studenter er late."
- "Alle Ifi-studenter som er late, får problemer på eksamen."

Flere eksempler

Av mindre matematisk art:

- "Alle Ifi-studenter er late."
- "Ingen Ifi-studenter er late."
- "Noen Ifi-studenter er late."
- "Alle Ifi-studenter som er late, får problemer på eksamen."
- "Noen Ifi-studenter som er late, får ingen problemer på eksamen."

Flere eksempler

Av mindre matematisk art:

- "Alle Ifi-studenter er late."
- "Ingen Ifi-studenter er late."
- "Noen Ifi-studenter er late."
- "Alle Ifi-studenter som er late, får problemer på eksamen."
- "Noen Ifi-studenter som er late, får ingen problemer på eksamen."
- "Enhver Ifi-student er enten lat eller ikke lat."

Flere eksempler

Av mindre matematisk art:

- "Alle Ifi-studenter er late."
- "Ingen Ifi-studenter er late."
- "Noen Ifi-studenter er late."
- "Alle Ifi-studenter som er late, får problemer på eksamen."
- "Noen Ifi-studenter som er late, får ingen problemer på eksamen."
- "Enhver Ifi-student er enten lat eller ikke lat."
- "Alle bevisbare formler er gyldige."

Flere eksempler

Av mindre matematisk art:

- "Alle Ifi-studenter er late."
- "Ingen Ifi-studenter er late."
- "Noen Ifi-studenter er late."
- "Alle Ifi-studenter som er late, får problemer på eksamen."
- "Noen Ifi-studenter som er late, får ingen problemer på eksamen."
- "Enhver Ifi-student er enten lat eller ikke lat."
- "Alle bevisbare formler er gyldige."
- "Det fins to sheriffer i byen."

Overblikk

Syntaks: førsteordens språk og formler – en utvidelse av utsagnslogikk.

Overblikk

Syntaks: førsteordens språk og formler – en utvidelse av utsagnslogikk.

Semantikk: tolkninger av førsteordens formler – modeller, sannhet, oppfyllbarhet, gyldighet.

Overblikk

Syntaks: førsteordens språk og formler – en utvidelse av utsagnslogikk.

Semantikk: tolkninger av førsteordens formler – modeller, sannhet, oppfyllbarhet, gyldighet.

Kalkyle: tillegg av regler.

Overblikk

Syntaks: førsteordens språk og formler – en utvidelse av utsagnslogikk.

Semantikk: tolkninger av førsteordens formler – modeller, sannhet, oppfyllbarhet, gyldighet.

Kalkyle: tillegg av regler.

Sunnhet: alle bevisbare sekventer er gyldige.

Overblikk

Syntaks: førsteordens språk og formler – en utvidelse av utsagnslogikk.

Semantikk: tolkninger av førsteordens formler – modeller, sannhet, oppfyllbarhet, gyldighet.

Kalkyle: tillegg av regler.

Sunnhet: alle bevisbare sekventer er gyldige.

Kompletthet: alle gyldige sekventer er bevisbare.

Syntaks – Signaturer

Definisjon (Førsteordens språk – logiske symboler)

Alle førsteordens språk består av følgende logiske symboler:

Syntaks – Signaturer

Definisjon (Førsteordens språk – logiske symboler)

Alle førsteordens språk består av følgende logiske symboler:

- *De logiske konnektivene* $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ *og* $\neg$.

Syntaks – Signaturer

Definisjon (Førsteordens språk – logiske symboler)

Alle førsteordens språk består av følgende logiske symboler:

- *De logiske konnektivene* $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ *og* $\neg$.
- *Hjelpesymbolene '(' og ')' og ',' .*

Syntaks – Signaturer

Definisjon (Førsteordens språk – logiske symboler)

Alle *førsteordens språk* *består av følgende* *logiske symboler*:

- *De logiske konnektivene* $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ *og* $\neg$.
- *Hjelpesymbolene '(' og ')' og ',' .*
- *Kvantorene* $\exists$ *(det fins) og* $\forall$ *(for alle).*

Syntaks – Signaturer

Definisjon (Førsteordens språk – logiske symboler)

Alle førsteordens språk består av følgende logiske symboler:

- *De logiske konnektivene* $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ *og* $\neg$.
- *Hjelpesymbolene '(' og ')' og ',' .*
- *Kvantorene* $\exists$ *(det fins) og* $\forall$ *(for alle).*
- *En tellbart uendelig mengde* $\mathcal{V}$ *av variable* $x_1, x_2, x_3, \ldots$ *(vi skriver* x, y, z, $\ldots$, *for variable).*

Syntaks – Signaturer

Definisjon (Førsteordens språk – ikke-logiske symboler)

I tillegg består et førsteordens språk av følgende mengder av ikke-logiske symboler:

Syntaks – Signaturer

Definisjon (Førsteordens språk – ikke-logiske symboler)

I tillegg består et førsteordens språk av følgende mengder av ikke-logiske symboler:

- *En tellbar mengde av konstantsymboler* $c_1, c_2, c_3, \ldots$.

Syntaks – Signaturer

Definisjon (Førsteordens språk – ikke-logiske symboler)

I tillegg består et førsteordens språk av følgende mengder av ikke-logiske symboler:

- *En tellbar mengde av konstantsymboler* $c_1, c_2, c_3, \ldots$.
- *En tellbar mengde av funksjonssymboler* $f_1, f_2, f_3, \ldots$.

Syntaks – Signaturer

Definisjon (Førsteordens språk – ikke-logiske symboler)

I tillegg består et førsteordens språk av følgende mengder av ikke-logiske symboler:

- *En tellbar mengde av konstantsymboler* $c_1, c_2, c_3, \ldots$.
- *En tellbar mengde av funksjonssymboler* $f_1, f_2, f_3, \ldots$.
- *En tellbar mengde av relasjonssymboler* $R_1, R_2, R_3, \ldots$.

Syntaks – Signaturer

Definisjon (Førsteordens språk – ikke-logiske symboler)

I tillegg består et førsteordens språk av følgende mengder av ikke-logiske symboler:

- *En tellbar mengde av konstantsymboler* $c_1, c_2, c_3, \ldots$.
- *En tellbar mengde av funksjonssymboler* $f_1, f_2, f_3, \ldots$.
- *En tellbar mengde av relasjonssymboler* $R_1, R_2, R_3, \ldots$.

Vi antar at mengdene av variable, konstant-, funksjons- og relasjonssymboler er disjunkte, og vi assosierer med ethvert funksjons- og relasjonssymbol et ikke-negativt heltall, kalt ariteten til symbolet.

Syntaks – Signaturer

Merk

Syntaks – Signaturer

Merk

- *Det eneste som skiller to førsteordens språk fra hverandre er de ikke-logiske symbolene.*

Syntaks – Signaturer

Merk

- *Det eneste som skiller to førsteordens språk fra hverandre er de ikke-logiske symbolene.*

Definisjon (Signatur)

Syntaks – Signaturer

Merk

- *Det eneste som skiller to førsteordens språk fra hverandre er de ikke-logiske symbolene.*

Definisjon (Signatur)

- *De ikke-logiske symbolene utgjør det som kalles en signatur.*

Syntaks – Signaturer

Merk

- *Det eneste som skiller to førsteordens språk fra hverandre er de ikke-logiske symbolene.*

Definisjon (Signatur)

- *De ikke-logiske symbolene utgjør det som kalles en signatur.*
- *En signatur angis ved et tuppel* $\langle c_1, c_2, c_3, \ldots; f_1, f_2, f_3, \ldots; R_1, R_2, R_3, \ldots \rangle$, *hvor konstant-, funksjons- og relasjonssymboler er adskilt med semikolon.*

Syntaks – Termer

Definisjon (Termer)

Mengden $\mathcal{T}$ av *første-ordens termer* *er induktivt definert som den minste mengden slik at:*

Syntaks – Termer

Definisjon (Termer)

Mengden $\mathcal{T}$ av *første-ordens termer* *er induktivt definert som den minste mengden slik at:*

- *Enhver variabel og konstant er en term.*

Syntaks – Termer

Definisjon (Termer)

Mengden $\mathcal{T}$ *av* *første-ordens termer* *er induktivt definert som den minste mengden slik at:*

- *Enhver variabel og konstant er en term.*
- *Hvis* f *er et funksjonssymbol med aritet* n *og* $t_1, \ldots, t_n$ *er termer, så er* $f(t_1, ..., t_n)$ *en term.*

Eksempler på førsteordens språk

Et enkelt språk: $\langle a; f, g; P, R \rangle$

Eksempler på førsteordens språk

Et enkelt språk: $\langle a; f, g; P, R \rangle$

- Konstantsymboler: a

Eksempler på førsteordens språk

Et enkelt språk: $\langle a; f, g; P, R \rangle$

- Konstantsymboler: a
- Funksjonssymboler: f (med aritet 1) og g (med aritet 2)

Eksempler på førsteordens språk

Et enkelt språk: $\langle a; f, g; P, R\rangle$

- Konstantsymboler: a
- Funksjonssymboler: f (med aritet 1) og g (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: P (med aritet 1) og R (med aritet 2)

Eksempler på førsteordens språk

Et enkelt språk: $\langle a; f, g; P, R \rangle$

- Konstantsymboler: a
- Funksjonssymboler: f (med aritet 1) og g (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: P (med aritet 1) og R (med aritet 2)

Termer i dette språket:

Eksempler på førsteordens språk

Et enkelt språk: $\langle a; f, g; P, R\rangle$

- Konstantsymboler: a
- Funksjonssymboler: f (med aritet 1) og g (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: P (med aritet 1) og R (med aritet 2)

Termer i dette språket:

- a, x, y, $\ldots$, $f(a)$, $f(x)$, $f(y)$, $\ldots$

Eksempler på førsteordens språk

Et enkelt språk: $\langle a; f, g; P, R \rangle$

- Konstantsymboler: a
- Funksjonssymboler: f (med aritet 1) og g (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: P (med aritet 1) og R (med aritet 2)

Termer i dette språket:

- a, x, y, $\ldots$, $f(a)$, $f(x)$, $f(y)$, $\ldots$
- $g(a, a)$, $g(a, x)$, $g(a, y)$, $g(x, x)$, $g(x, y)$, $g(y, y)$, $\ldots$

Eksempler på førsteordens språk

Et enkelt språk: $\langle a; f, g; P, R \rangle$

- Konstantsymboler: a
- Funksjonssymboler: f (med aritet 1) og g (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: P (med aritet 1) og R (med aritet 2)

Termer i dette språket:

- a, x, y, $\ldots$, $f(a)$, $f(x)$, $f(y)$, $\ldots$
- $g(a, a)$, $g(a, x)$, $g(a, y)$, $g(x, x)$, $g(x, y)$, $g(y, y)$, $\ldots$
- $f(f(a))$, $f(f(x))$, $f(f(y))$, $\ldots$

Eksempler på førsteordens språk

Et enkelt språk: $\langle a; f, g; P, R\rangle$

- Konstantsymboler: a
- Funksjonssymboler: f (med aritet 1) og g (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: P (med aritet 1) og R (med aritet 2)

Termer i dette språket:

- a, x, y, ..., $f(a)$, $f(x)$, $f(y)$, ...
- $g(a, a)$, $g(a, x)$, $g(a, y)$, $g(x, x)$, $g(x, y)$, $g(y, y)$, ...
- $f(f(a))$, $f(f(x))$, $f(f(y))$, ...

Notasjon

Så lenge det er entydig og ariteten er kjent, kan vi droppe parentesene og skrive fa, fx, fy, gaa, gax, ...

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for aritmetikk: $\langle 0; s, +; = \rangle$

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for aritmetikk: $\langle 0; s, +; = \rangle$

- Konstantsymboler: 0

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for aritmetikk: $\langle 0; s, +; = \rangle$

- Konstantsymboler: 0
- Funksjonssymboler: s (med aritet 1) og $+$ (med aritet 2)

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for aritmetikk: $\langle 0; s, +; = \rangle$

- Konstantsymboler: 0
- Funksjonssymboler: s (med aritet 1) og $+$ (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for aritmetikk: $\langle 0; s, +; = \rangle$

- Konstantsymboler: 0
- Funksjonssymboler: s (med aritet 1) og $+$ (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$

Kommentarer:

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for aritmetikk: $\langle 0; s, +; = \rangle$

- Konstantsymboler: 0
- Funksjonssymboler: s (med aritet 1) og $+$ (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$

Kommentarer:

- Termer: $x, y, 0, s0, ss0, sss0, +xy, +00, +(s0)0, +0s0, \ldots$

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for aritmetikk: $\langle 0; s, +; = \rangle$

- Konstantsymboler: 0
- Funksjonssymboler: s (med aritet 1) og $+$ (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$

Kommentarer:

- Termer: $x, y, 0, s0, ss0, sss0, +xy, +00, +(s0)0, +0s0, \dots$
- *Ikke* termer: $= (\mathrm{x}, \mathrm{x}), ++, +0, \dots$

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for aritmetikk: $\langle 0; s, +; = \rangle$

- Konstantsymboler: 0
- Funksjonssymboler: s (med aritet 1) og $+$ (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$

Kommentarer:

- Termer: $x, y, 0, s0, ss0, sss0, +xy, +00, +(s0)0, +0s0, \dots$
- *Ikke* termer: $= (\mathrm{x}, \mathrm{x}), ++, +0, \dots$
- Når vi skriver $+xy$ bruker vi prefiks notasjon.

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for aritmetikk: $\langle 0; s, +; = \rangle$

- Konstantsymboler: 0
- Funksjonssymboler: s (med aritet 1) og $+$ (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$

Kommentarer:

- Termer: $x, y, 0, s0, ss0, sss0, +xy, +00, +(s0)0, +0s0, \ldots$
- *Ikke* termer: $= (\mathrm{x}, \mathrm{x}), ++, +0, \ldots$
- Når vi skriver $+xy$ bruker vi prefiks notasjon.
- Vi bruker også infiks notasjon og skriver:
  $(x + y), (0 + 0), (s0 + 0), (0 + s0), \ldots$.

Eksempler på førsteordens språk

Et annet språk for aritmetikk: $\langle 0, 1; +, \times; =, < \rangle$

Termer: $\emptyset$, $x \cap \emptyset$, $y \cup (x \cap z)$,...

Eksempler på førsteordens språk

Et annet språk for aritmetikk: $\langle 0, 1; +, \times; =, < \rangle$

- Konstantsymboler: $0, 1$

Termer: $\emptyset$, $x \cap \emptyset$, $y \cup (x \cap z)$,...

Eksempler på førsteordens språk

Et annet språk for aritmetikk: $\langle 0, 1; +, \times; =, < \rangle$

- Konstantsymboler: $0, 1$
- Funksjonssymboler: $+$ og $\times$ (begge med aritet 2)

Termer: $\emptyset$, $x \cap \emptyset$, $y \cup (x \cap z)$,...

Eksempler på førsteordens språk

Et annet språk for aritmetikk: $\langle 0, 1; +, \times; =, < \rangle$

- Konstantsymboler: $0, 1$
- Funksjonssymboler: $+$ og $\times$ (begge med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$ og $<$ (begge med aritet 2)

Termer: $\emptyset$, $x \cap \emptyset$, $y \cup (x \cap z)$,...

Eksempler på førsteordens språk

Et annet språk for aritmetikk: $\langle 0, 1; +, \times; =, < \rangle$

- Konstantsymboler: $0, 1$
- Funksjonssymboler: $+$ og $\times$ (begge med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$ og $<$ (begge med aritet 2)

Et språk for mengdelære: $\langle \emptyset; \cap, \cup; =, \in \rangle$

Termer: $\emptyset$, $x \cap \emptyset$, $y \cup (x \cap z)$,...

Eksempler på førsteordens språk

Et annet språk for aritmetikk: $\langle 0, 1; +, \times; =, < \rangle$

- Konstantsymboler: $0, 1$
- Funksjonssymboler: $+$ og $\times$ (begge med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$ og $<$ (begge med aritet 2)

Et språk for mengdelære: $\langle \emptyset; \cap, \cup; =, \in \rangle$

- Konstantsymboler: $\emptyset$

Termer: $\emptyset$, $x \cap \emptyset$, $y \cup (x \cap z)$,...

Eksempler på førsteordens språk

Et annet språk for aritmetikk: $\langle 0, 1; +, \times; =, < \rangle$

- Konstantsymboler: $0, 1$
- Funksjonssymboler: $+$ og $\times$ (begge med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$ og $<$ (begge med aritet 2)

Et språk for mengdelære: $\langle \emptyset; \cap, \cup; =, \in \rangle$

- Konstantsymboler: $\emptyset$
- Funksjonssymboler: $\cap$ og $\cup$ (begge med aritet 2)

Termer: $\emptyset$, $x \cap \emptyset$, $y \cup (x \cap z)$,...

Eksempler på førsteordens språk

Et annet språk for aritmetikk: $\langle 0, 1; +, \times; =, < \rangle$

- Konstantsymboler: $0, 1$
- Funksjonssymboler: $+$ og $\times$ (begge med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$ og $<$ (begge med aritet 2)

Et språk for mengdelære: $\langle \emptyset; \cap, \cup; =, \in \rangle$

- Konstantsymboler: $\emptyset$
- Funksjonssymboler: $\cap$ og $\cup$ (begge med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$ og $\in$ (begge med aritet 2)

Termer: $\emptyset$, $x \cap \emptyset$, $y \cup (x \cap z)$,...

Syntaks – Formler

Definisjon (Atomær formel – førsteordens)

Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer, så er $R(t_1, \ldots, t_n)$ en atomær formel.

Syntaks – Formler

Definisjon (Atomær formel – førsteordens)

Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer, så er $R(t_1, \ldots, t_n)$ en atomær formel.

Merk

Syntaks – Formler

Definisjon (Atomær formel – førsteordens)

Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer, så er $R(t_1, \ldots, t_n)$ en atomær formel.

Merk

- *Hvis R har aritet 0, så er R en atomær formel. Dette svarer til utsagnsvariable i utsagnslogikk.*

Syntaks – Formler

Definisjon (Atomær formel – førsteordens)

Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n og $t_1, \dots, t_n$ er termer, så er $R(t_1, \dots, t_n)$ en atomær formel.

Merk

- *Hvis R har aritet 0, så er R en atomær formel. Dette svarer til utsagnsvariable i utsagnslogikk.*
- *Så lenge det er entydig og ariteten er kjent skriver vi Rx, Rfa, $Rafa$, etc. for $R(x)$, $R(f(a))$ og $R(a, f(a))$.*

Syntaks – Formler

Definisjon (Førsteordens formler)

Mengden $\mathcal{F}$ av førsteordens formler er den minste mengden slik at:

Syntaks – Formler

Definisjon (Førsteordens formler)

Mengden $\mathcal{F}$ av førsteordens formler er den minste mengden slik at:

1. *Alle atomære formler er formler.*

Syntaks – Formler

Definisjon (Førsteordens formler)

Mengden $\mathcal{F}$ av førsteordens formler er den minste mengden slik at:

1. *Alle atomære formler er formler.*
2. *Hvis φ og ψ er formler, så er $\neg\varphi$, $(\varphi \land \psi)$, $(\varphi \lor \psi)$ og $(\varphi \rightarrow \psi)$ formler.*

Syntaks – Formler

Definisjon (Førsteordens formler)

Mengden $\mathcal{F}$ av førsteordens formler er den minste mengden slik at:

1. *Alle atomære formler er formler.*
2. *Hvis φ og ψ er formler, så er $\neg\varphi$, $(\varphi \land \psi)$, $(\varphi \lor \psi)$ og $(\varphi \rightarrow \psi)$ formler.*
3. *Hvis φ er en formel og x er en variabel, så er $\forall x \varphi$ og $\exists x \varphi$ formler.*

Syntaks – Formler

Definisjon (Førsteordens formler)

Mengden $\mathcal{F}$ av førsteordens formler er den minste mengden slik at:

1. *Alle atomære formler er formler.*
2. *Hvis φ og ψ er formler, så er $\neg\varphi$, $(\varphi \land \psi)$, $(\varphi \lor \psi)$ og $(\varphi \rightarrow \psi)$ formler.*
3. *Hvis φ er en formel og x er en variabel, så er $\forall x \varphi$ og $\exists x \varphi$ formler.*

Alle forekomster av en variabel x i φ sies å være bundet i formlene $\forall x \varphi$ og $\exists x \varphi$ og innenfor skopet til den gjeldende kvantoren.

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle a, b; ; \mathrm{Idol}, \mathrm{Liker} \rangle$

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle a, b; ; \mathsf{Idol}, \mathsf{Liker}\rangle$

- Konstantsymboler: a og b

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle a, b; ; \mathrm{Idol}, \mathrm{Liker}\rangle$

- Konstantsymboler: a og b
- Funksjonssymboler: (ingen)

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle a, b; ; \mathrm{Idol}, \mathrm{Liker} \rangle$

- Konstantsymboler: a og b
- Funksjonssymboler: (ingen)
- Relasjonssymboler: Idol (med aritet 1) og Liker (med aritet 2)

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle a, b; ; \mathrm{Idol}, \mathrm{Liker} \rangle$

- Konstantsymboler: a og b
- Funksjonssymboler: (ingen)
- Relasjonssymboler: Idol (med aritet 1) og Liker (med aritet 2)

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle a, b; ; \text{Idol}, \text{Liker}\rangle$

- Konstantsymboler: a og b
- Funksjonssymboler: (ingen)
- Relasjonssymboler: Idol (med aritet 1) og Liker (med aritet 2)

Formler i språket:

Atomære formler:

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle a, b; ; \mathrm{Idol}, \mathrm{Liker} \rangle$

- Konstantsymboler: a og b
- Funksjonssymboler: (ingen)
- Relasjonssymboler: Idol (med aritet 1) og Liker (med aritet 2)

Formler i språket:

Atomære formler:

1: Alice er et idol:

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle a, b; ; \mathrm{Idol}, \mathrm{Liker} \rangle$

- Konstantsymboler: a og b
- Funksjonssymboler: (ingen)
- Relasjonssymboler: Idol (med aritet 1) og Liker (med aritet 2)

Formler i språket:

Atomære formler:

1: Alice er et idol: $\mathrm{Idol}(a)$

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle a, b; ; \mathsf{Idol}, \mathsf{Liker} \rangle$

- Konstantsymboler: a og b
- Funksjonssymboler: (ingen)
- Relasjonssymboler: Idol (med aritet 1) og Liker (med aritet 2)

Formler i språket:

Atomære formler:

1: Alice er et idol: $\mathsf{Idol}(a)$

2: Alice liker Bob:

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle a, b; ; \mathrm{Idol}, \mathrm{Liker}\rangle$

- Konstantsymboler: a og b
- Funksjonssymboler: (ingen)
- Relasjonssymboler: Idol (med aritet 1) og Liker (med aritet 2)

Formler i språket:

Atomære formler:

1: Alice er et idol: $\mathrm{Idol}(a)$

2: Alice liker Bob: $\mathrm{Liker}(a, b)$

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle a, b; ; \mathrm{Idol}, \mathrm{Liker}\rangle$

- Konstantsymboler: a og b
- Funksjonssymboler: (ingen)
- Relasjonssymboler: Idol (med aritet 1) og Liker (med aritet 2)

Formler i språket:

Atomære formler:

1: Alice er et idol: $\mathrm{Idol}(a)$

2: Alice liker Bob: $\mathrm{Liker}(a, b)$

3: x liker Alice:

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle a, b; ; \text{Idol}, \text{Liker}\rangle$

- Konstantsymboler: a og b
- Funksjonssymboler: (ingen)
- Relasjonssymboler: Idol (med aritet 1) og Liker (med aritet 2)

Formler i språket:

Atomære formler:

1:	Alice er et idol:	$\text{Idol}(a)$
2:	Alice liker Bob:	$\text{Liker}(a, b)$
3:	x liker Alice:	$\text{Liker}(x, a)$

Eksempler på førsteordens formler

Signatur: $\langle a, b; -; \mathsf{Idol}, \mathsf{Liker}\rangle$

Ikke atomære formler:

Eksempler på førsteordens formler

Signatur: $\langle a, b; -; \mathsf{Idol}, \mathsf{Liker}\rangle$

Ikke atomære formler:

4: Alice liker alle:

Eksempler på førsteordens formler

Signatur: $\langle a, b; -; \mathrm{Idol}, \mathrm{Liker}\rangle$

Ikke atomære formler:

4: Alice liker alle: $\forall x \mathrm{Liker}(a, x)$

Eksempler på førsteordens formler

Signatur: $\langle a, b; -; \text{Idol}, \text{Liker}\rangle$

Ikke atomære formler:

4: Alice liker alle: $\forall x \text{Liker}(a, x)$

5: Det finnes et idol:

Eksempler på førsteordens formler

Signatur: $\langle a, b; -; \mathsf{Idol}, \mathsf{Liker}\rangle$

Ikke atomære formler:

4: Alice liker alle: $\forall x \mathsf{Liker}(a, x)$

5: Det finnes et idol: $\exists x \mathsf{Idol}(x)$

Eksempler på førsteordens formler

Signatur: $\langle a, b; -; \mathsf{Idol}, \mathsf{Liker}\rangle$

Ikke atomære formler:

4: Alice liker alle: $\forall x \mathsf{Liker}(a, x)$

5: Det finnes et idol: $\exists x \mathsf{Idol}(x)$

6: Alice liker alle som Bob liker:

Eksempler på førsteordens formler

Signatur: $\langle a, b; -; \mathsf{Idol}, \mathsf{Liker}\rangle$

Ikke atomære formler:

4:	Alice liker alle:	$\forall x \mathsf{Liker}(a, x)$
5:	Det finnes et idol:	$\exists x \mathsf{Idol}(x)$
6:	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x (\mathsf{Liker}(b, x) \to \mathsf{Liker}(a, x))$

Eksempler på førsteordens formler

Signatur: $\langle a, b; -; \text{Idol}, \text{Liker}\rangle$

Ikke atomære formler:

4:	Alice liker alle:	$\forall x \text{Liker}(a, x)$
5:	Det finnes et idol:	$\exists x \text{Idol}(x)$
6:	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\text{Liker}(b, x) \rightarrow \text{Liker}(a, x))$
7:	Noen liker seg selv:	

Eksempler på førsteordens formler

Signatur: $\langle a, b; -; \mathsf{Idol}, \mathsf{Liker}\rangle$

Ikke atomære formler:

4:	Alice liker alle:	$\forall x \mathsf{Liker}(a, x)$
5:	Det finnes et idol:	$\exists x \mathsf{Idol}(x)$
6:	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\mathsf{Liker}(b, x) \rightarrow \mathsf{Liker}(a, x))$
7:	Noen liker seg selv:	$\exists x \mathsf{Liker}(x, x)$

Eksempler på førsteordens formler

Signatur: $\langle a, b; -; \mathrm{Idol}, \mathrm{Liker}\rangle$

Ikke atomære formler:

4:	Alice liker alle:	$\forall x \mathrm{Liker}(a, x)$
5:	Det finnes et idol:	$\exists x \mathrm{Idol}(x)$
6:	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\mathrm{Liker}(b, x) \rightarrow \mathrm{Liker}(a, x))$
7:	Noen liker seg selv:	$\exists x \mathrm{Liker}(x, x)$
8:	Bob liker alle som liker seg selv:	

Eksempler på førsteordens formler

Signatur: $\langle a, b; -; \mathrm{Idol}, \mathrm{Liker}\rangle$

Ikke atomære formler:

4:	Alice liker alle:	$\forall x \mathrm{Liker}(a, x)$
5:	Det finnes et idol:	$\exists x \mathrm{Idol}(x)$
6:	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\mathrm{Liker}(b, x) \rightarrow \mathrm{Liker}(a, x))$
7:	Noen liker seg selv:	$\exists x \mathrm{Liker}(x, x)$
8:	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x(\mathrm{Liker}(x, x) \rightarrow \mathrm{Liker}(b, x))$

Eksempler på førsteordens formler

Signatur: $\langle a, b; -; \mathsf{Idol}, \mathsf{Liker}\rangle$

Ikke atomære formler:

4:	Alice liker alle:	$\forall x \mathsf{Liker}(a, x)$
5:	Det finnes et idol:	$\exists x \mathsf{Idol}(x)$
6:	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\mathsf{Liker}(b, x) \rightarrow \mathsf{Liker}(a, x))$
7:	Noen liker seg selv:	$\exists x \mathsf{Liker}(x, x)$
8:	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x(\mathsf{Liker}(x, x) \rightarrow \mathsf{Liker}(b, x))$
9:	Ingen liker både Alice og Bob:	

Eksempler på førsteordens formler

Signatur: $\langle a, b; -; \text{Idol}, \text{Liker}\rangle$

Ikke atomære formler:

4:	Alice liker alle:	$\forall x \text{Liker}(a, x)$
5:	Det finnes et idol:	$\exists x \text{Idol}(x)$
6:	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x (\text{Liker}(b, x) \rightarrow \text{Liker}(a, x))$
7:	Noen liker seg selv:	$\exists x \text{Liker}(x, x)$
8:	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x (\text{Liker}(x, x) \rightarrow \text{Liker}(b, x))$
9:	Ingen liker både Alice og Bob:	$\neg \exists x (\text{Liker}(x, a) \wedge \text{Liker}(x, b))$

Eksempler på førsteordens formler

Signatur: $\langle a, b; -; \mathrm{Idol}, \mathrm{Liker}\rangle$

Ikke atomære formler:

4:	Alice liker alle:	$\forall x \mathrm{Liker}(a, x)$
5:	Det finnes et idol:	$\exists x \mathrm{Idol}(x)$
6:	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x (\mathrm{Liker}(b, x) \rightarrow \mathrm{Liker}(a, x))$
7:	Noen liker seg selv:	$\exists x \mathrm{Liker}(x, x)$
8:	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x (\mathrm{Liker}(x, x) \rightarrow \mathrm{Liker}(b, x))$
9:	Ingen liker både Alice og Bob:	$\neg \exists x (\mathrm{Liker}(x, a) \wedge \mathrm{Liker}(x, b))$
10:	Noen liker ikke seg selv:	

Eksempler på førsteordens formler

Signatur: $\langle a, b; -; \text{Idol}, \text{Liker}\rangle$

Ikke atomære formler:

4:	Alice liker alle:	$\forall x \text{Liker}(a, x)$
5:	Det finnes et idol:	$\exists x \text{Idol}(x)$
6:	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\text{Liker}(b, x) \rightarrow \text{Liker}(a, x))$
7:	Noen liker seg selv:	$\exists x \text{Liker}(x, x)$
8:	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x(\text{Liker}(x, x) \rightarrow \text{Liker}(b, x))$
9:	Ingen liker både Alice og Bob:	$\neg\exists x(\text{Liker}(x, a) \wedge \text{Liker}(x, b))$
10:	Noen liker ikke seg selv:	$\exists x \neg\text{Liker}(x, x)$

Eksempler på førsteordens formler

Signatur: $\langle a, b; -; \mathsf{Idol}, \mathsf{Liker}\rangle$

Ikke atomære formler:

4:	Alice liker alle:	$\forall x \mathsf{Liker}(a, x)$
5:	Det finnes et idol:	$\exists x \mathsf{Idol}(x)$
6:	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\mathsf{Liker}(b, x) \rightarrow \mathsf{Liker}(a, x))$
7:	Noen liker seg selv:	$\exists x \mathsf{Liker}(x, x)$
8:	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x(\mathsf{Liker}(x, x) \rightarrow \mathsf{Liker}(b, x))$
9:	Ingen liker både Alice og Bob:	$\neg\exists x(\mathsf{Liker}(x, a) \land \mathsf{Liker}(x, b))$
10:	Noen liker ikke seg selv:	$\exists x \neg \mathsf{Liker}(x, x)$
11:	Bob liker noen som liker Alice:	

Eksempler på førsteordens formler

Signatur: $\langle a, b; -; \mathrm{Idol}, \mathrm{Liker}\rangle$

Ikke atomære formler:

4:	Alice liker alle:	$\forall x \mathrm{Liker}(a, x)$
5:	Det finnes et idol:	$\exists x \mathrm{Idol}(x)$
6:	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\mathrm{Liker}(b, x) \rightarrow \mathrm{Liker}(a, x))$
7:	Noen liker seg selv:	$\exists x \mathrm{Liker}(x, x)$
8:	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x(\mathrm{Liker}(x, x) \rightarrow \mathrm{Liker}(b, x))$
9:	Ingen liker både Alice og Bob:	$\neg\exists x(\mathrm{Liker}(x, a) \wedge \mathrm{Liker}(x, b))$
10:	Noen liker ikke seg selv:	$\exists x \neg \mathrm{Liker}(x, x)$
11:	Bob liker noen som liker Alice:	$\exists x(\mathrm{Liker}(b, x) \wedge \mathrm{Liker}(x, a))$

Eksempler på førsteordens formler

Signatur: $\langle a, b; -; \text{Idol}, \text{Liker}\rangle$

Ikke atomære formler:

4:	Alice liker alle:	$\forall x \text{Liker}(a, x)$
5:	Det finnes et idol:	$\exists x \text{Idol}(x)$
6:	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\text{Liker}(b, x) \rightarrow \text{Liker}(a, x))$
7:	Noen liker seg selv:	$\exists x \text{Liker}(x, x)$
8:	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x(\text{Liker}(x, x) \rightarrow \text{Liker}(b, x))$
9:	Ingen liker både Alice og Bob:	$\neg\exists x(\text{Liker}(x, a) \wedge \text{Liker}(x, b))$
10:	Noen liker ikke seg selv:	$\exists x \neg\text{Liker}(x, x)$
11:	Bob liker noen som liker Alice:	$\exists x(\text{Liker}(b, x) \wedge \text{Liker}(x, a))$
12:	Alle liker noen:	

Eksempler på førsteordens formler

Signatur: $\langle a, b; -; \text{Idol}, \text{Liker}\rangle$

Ikke atomære formler:

4:	Alice liker alle:	$\forall x \text{Liker}(a, x)$
5:	Det finnes et idol:	$\exists x \text{Idol}(x)$
6:	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\text{Liker}(b, x) \rightarrow \text{Liker}(a, x))$
7:	Noen liker seg selv:	$\exists x \text{Liker}(x, x)$
8:	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x(\text{Liker}(x, x) \rightarrow \text{Liker}(b, x))$
9:	Ingen liker både Alice og Bob:	$\neg\exists x(\text{Liker}(x, a) \wedge \text{Liker}(x, b))$
10:	Noen liker ikke seg selv:	$\exists x \neg \text{Liker}(x, x)$
11:	Bob liker noen som liker Alice:	$\exists x(\text{Liker}(b, x) \wedge \text{Liker}(x, a))$
12:	Alle liker noen:	$\forall x(\exists y \text{Liker}(x, y))$

Eksempler på førsteordens formler

Signatur: $\langle a, b; -; \mathsf{Idol}, \mathsf{Liker}\rangle$

Ikke atomære formler:

4:	Alice liker alle:	$\forall x \mathsf{Liker}(a, x)$
5:	Det finnes et idol:	$\exists x \mathsf{Idol}(x)$
6:	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\mathsf{Liker}(b, x) \rightarrow \mathsf{Liker}(a, x))$
7:	Noen liker seg selv:	$\exists x \mathsf{Liker}(x, x)$
8:	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x(\mathsf{Liker}(x, x) \rightarrow \mathsf{Liker}(b, x))$
9:	Ingen liker både Alice og Bob:	$\neg\exists x(\mathsf{Liker}(x, a) \land \mathsf{Liker}(x, b))$
10:	Noen liker ikke seg selv:	$\exists x \neg \mathsf{Liker}(x, x)$
11:	Bob liker noen som liker Alice:	$\exists x(\mathsf{Liker}(b, x) \land \mathsf{Liker}(x, a))$
12:	Alle liker noen:	$\forall x(\exists y \mathsf{Liker}(x, y))$
13:	En som blir likt av alle er et idol:	

Eksempler på førsteordens formler

Signatur: $\langle a, b; -; \text{Idol}, \text{Liker}\rangle$

Ikke atomære formler:

4:	Alice liker alle:	$\forall x \text{Liker}(a, x)$
5:	Det finnes et idol:	$\exists x \text{Idol}(x)$
6:	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\text{Liker}(b, x) \rightarrow \text{Liker}(a, x))$
7:	Noen liker seg selv:	$\exists x \text{Liker}(x, x)$
8:	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x(\text{Liker}(x, x) \rightarrow \text{Liker}(b, x))$
9:	Ingen liker både Alice og Bob:	$\neg\exists x(\text{Liker}(x, a) \land \text{Liker}(x, b))$
10:	Noen liker ikke seg selv:	$\exists x \neg \text{Liker}(x, x)$
11:	Bob liker noen som liker Alice:	$\exists x(\text{Liker}(b, x) \land \text{Liker}(x, a))$
12:	Alle liker noen:	$\forall x(\exists y \text{Liker}(x, y))$
13:	En som blir likt av alle er et idol:	$\forall x(\forall y \text{Liker}(y, x) \rightarrow \text{Idol}(x))$

Eksempler på førsteordens formler

Signatur: $\langle a, b; -; \text{Idol}, \text{Liker}\rangle$

Ikke atomære formler:

4:	Alice liker alle:	$\forall x \text{Liker}(a, x)$
5:	Det finnes et idol:	$\exists x \text{Idol}(x)$
6:	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\text{Liker}(b, x) \rightarrow \text{Liker}(a, x))$
7:	Noen liker seg selv:	$\exists x \text{Liker}(x, x)$
8:	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x(\text{Liker}(x, x) \rightarrow \text{Liker}(b, x))$
9:	Ingen liker både Alice og Bob:	$\neg\exists x(\text{Liker}(x, a) \wedge \text{Liker}(x, b))$
10:	Noen liker ikke seg selv:	$\exists x \neg \text{Liker}(x, x)$
11:	Bob liker noen som liker Alice:	$\exists x(\text{Liker}(b, x) \wedge \text{Liker}(x, a))$
12:	Alle liker noen:	$\forall x(\exists y \text{Liker}(x, y))$
13:	En som blir likt av alle er et idol:	$\forall x(\forall y \text{Liker}(y, x) \rightarrow \text{Idol}(x))$
14:	Et idol blir likt av alle:	

Eksempler på førsteordens formler

Signatur: $\langle a, b; -; \mathsf{Idol}, \mathsf{Liker}\rangle$

Ikke atomære formler:

4:	Alice liker alle:	$\forall x \mathsf{Liker}(a, x)$
5:	Det finnes et idol:	$\exists x \mathsf{Idol}(x)$
6:	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\mathsf{Liker}(b, x) \rightarrow \mathsf{Liker}(a, x))$
7:	Noen liker seg selv:	$\exists x \mathsf{Liker}(x, x)$
8:	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x(\mathsf{Liker}(x, x) \rightarrow \mathsf{Liker}(b, x))$
9:	Ingen liker både Alice og Bob:	$\neg\exists x(\mathsf{Liker}(x, a) \wedge \mathsf{Liker}(x, b))$
10:	Noen liker ikke seg selv:	$\exists x \neg \mathsf{Liker}(x, x)$
11:	Bob liker noen som liker Alice:	$\exists x(\mathsf{Liker}(b, x) \wedge \mathsf{Liker}(x, a))$
12:	Alle liker noen:	$\forall x(\exists y \mathsf{Liker}(x, y))$
13:	En som blir likt av alle er et idol:	$\forall x(\forall y \mathsf{Liker}(y, x) \rightarrow \mathsf{Idol}(x))$
14:	Et idol blir likt av alle:	$\forall x(\mathsf{Idol}(x) \rightarrow \forall y \mathsf{Liker}(y, x))$

Eksempler på førsteordens formler

I språket for aritmetikk $\langle 0; s, +; = \rangle$, har vi formlene

Eksempler på førsteordens formler

I språket for aritmetikk $\langle 0; s, +; = \rangle$, har vi formlene

- $s0 + s0 = ss0$ - "en pluss en er to"

Eksempler på førsteordens formler

I språket for aritmetikk $\langle 0; s, +; = \rangle$, har vi formlene

- $s0 + s0 = ss0$ - "en pluss en er to"
- $\forall x \forall y (x + y = y + x)$ - "addisjon er kommutativt"

Eksempler på førsteordens formler

I språket for aritmetikk $\langle 0; s, +; =\rangle$, har vi formlene

- $s0 + s0 = ss0$ - "en pluss en er to"
- $\forall x \forall y(x + y = y + x)$ - "addisjon er kommutativt"
- $\forall x \exists y(y = sx)$ - "alle tall har en etterfølger"

Eksempler på førsteordens formler

I språket for aritmetikk $\langle 0; s, +; = \rangle$, har vi formlene

- $s0 + s0 = ss0$ - "en pluss en er to"
- $\forall x \forall y (x + y = y + x)$ - "addisjon er kommutativt"
- $\forall x \exists y (y = sx)$ - "alle tall har en etterfølger"
- $\neg \exists x (0 = sx)$ - "0 er ikke etterfølgeren til noe"

Eksempler på førsteordens formler

I språket for aritmetikk $\langle 0; s, +; = \rangle$, har vi formlene

- $s0 + s0 = ss0$ - "en pluss en er to"
- $\forall x \forall y (x + y = y + x)$ - "addisjon er kommutativt"
- $\forall x \exists y (y = sx)$ - "alle tall har en etterfølger"
- $\neg \exists x (0 = sx)$ - "0 er ikke etterfølgeren til noe"
- $\exists x \exists y \neg (x = y)$ - "det fins to forskjellige objekter"

Frie variable i termer

Frie variable i termer

Definisjon (Frie variable i en term)

Frie variable i termer

Definisjon (Frie variable i en term)

FV(t) *betegner mengden av frie variable i termen* t.

Frie variable i termer

Definisjon (Frie variable i en term)

FV(t) *betegner mengden av* *frie variable* *i termen* t.

Definisjon (Lukket term)

Frie variable i termer

Definisjon (Frie variable i en term)

$\mathrm{FV}(t)$ *betegner mengden av frie variable i termen* t.

Definisjon (Lukket term)

En term t er lukket hvis $\mathrm{FV}(t) = \emptyset$, *dvs. t inneholder ingen frie variable.*

Frie variable i termer

Definisjon (Frie variable i en term)

$\mathsf{FV}(t)$ *betegner mengden av frie variable i termen* t.

Definisjon (Lukket term)

En term t *er lukket hvis* $\mathsf{FV}(t) = \emptyset$, *dvs.* t *inneholder ingen frie variable.*

Eksempel

Frie variable i termer

Definisjon (Frie variable i en term)

$\mathrm{FV}(t)$ *betegner mengden av frie variable i termen* t.

Definisjon (Lukket term)

En term t *er lukket hvis* $\mathrm{FV}(t) = \emptyset$, *dvs.* t *inneholder ingen frie variable.*

Eksempel

I språket $\langle a, b; f; - \rangle$ *har vi:*

Frie variable i termer

Definisjon (Frie variable i en term)

$\mathrm{FV}(t)$ *betegner mengden av* *frie variable* *i termen* t.

Definisjon (Lukket term)

En term t *er* *lukket* *hvis* $\mathrm{FV}(t) = \emptyset$, *dvs.* t *inneholder ingen frie variable.*

Eksempel

I språket $\langle a, b; f; - \rangle$ *har vi:*

- *Termen* $f(x, a)$ *har en fri variabel* x.

Frie variable i termer

Definisjon (Frie variable i en term)

$\mathsf{FV}(t)$ *betegner mengden av frie variable i termen* t.

Definisjon (Lukket term)

En term t *er lukket hvis* $\mathsf{FV}(t) = \emptyset$, *dvs.* t *inneholder ingen frie variable.*

Eksempel

I språket $\langle a, b; f; - \rangle$ *har vi:*

- *Termen* $f(x, a)$ *har en fri variabel* x.
- *Termen* $f(a, b)$ *har ingen frie variable og er en lukket term.*

Rekursive definisjoner

Rekursive definisjoner

Når mengder er definert *induktivt*, så kan vi definere funksjoner over denne mengden rekursivt ved å

Rekursive definisjoner

Når mengder er definert *induktivt*, så kan vi definere funksjoner over denne mengden rekursivt ved å

1. gi verdi til de "atomære" elementene (i basismengden), og

Rekursive definisjoner

Når mengder er definert *induktivt*, så kan vi definere funksjoner over denne mengden rekursivt ved å

1. gi verdi til de "atomære" elementene (i basismengden), og
2. gi verdi til "sammensatte" elementene (fra induksjonssteget) ved å bruke verdiene som ble gitt til komponentene.

Rekursive definisjoner

Når mengder er definert *induktivt*, så kan vi definere funksjoner over denne mengden rekursivt ved å

1. gi verdi til de "atomære" elementene (i basismengden), og
2. gi verdi til "sammensatte" elementene (fra induksjonssteget) ved å bruke verdiene som ble gitt til komponentene.

Den presise, rekursive definisjonen av FV er følgende.

Rekursive definisjoner

Når mengder er definert *induktivt*, så kan vi definere funksjoner over denne mengden rekursivt ved å

1. gi verdi til de “atomære” elementene (i basismengden), og
2. gi verdi til “sammensatte” elementene (fra induksjonssteget) ved å bruke verdiene som ble gitt til komponentene.

Den presise, rekursive definisjonen av FV er følgende.

Definisjon (Frie variable – definert rekursivt)

Rekursive definisjoner

Når mengder er definert *induktivt*, så kan vi definere funksjoner over denne mengden rekursivt ved å

1. gi verdi til de "atomære" elementene (i basismengden), og
2. gi verdi til "sammensatte" elementene (fra induksjonssteget) ved å bruke verdiene som ble gitt til komponentene.

Den presise, rekursive definisjonen av FV er følgende.

Definisjon (Frie variable – definert rekursivt)

Gitt en term t, la mengden $\mathrm{FV}(t)$ *av frie variable i t være definert rekursivt ved:*

Rekursive definisjoner

Når mengder er definert *induktivt*, så kan vi definere funksjoner over denne mengden rekursivt ved å

1. gi verdi til de "atomære" elementene (i basismengden), og
2. gi verdi til "sammensatte" elementene (fra induksjonssteget) ved å bruke verdiene som ble gitt til komponentene.

Den presise, rekursive definisjonen av FV er følgende.

Definisjon (Frie variable – definert rekursivt)

Gitt en term t, la mengden $\mathrm{FV}(t)$ *av frie variable i t være definert rekursivt ved:*

- $\mathrm{FV}(x_i) = \{x_i\}$, *for en variabel x_i, og*

Rekursive definisjoner

Når mengder er definert *induktivt*, så kan vi definere funksjoner over denne mengden rekursivt ved å

1. gi verdi til de "atomære" elementene (i basismengden), og
2. gi verdi til "sammensatte" elementene (fra induksjonssteget) ved å bruke verdiene som ble gitt til komponentene.

Den presise, rekursive definisjonen av FV er følgende.

Definisjon (Frie variable – definert rekursivt)

Gitt en term t, la mengden $\mathrm{FV}(t)$ *av frie variable i t være definert rekursivt ved:*

- $\mathrm{FV}(x_i) = \{x_i\}$, *for en variabel x_i, og*
- $\mathrm{FV}(c_i) = \emptyset$, *for en konstant c_i, og*

Rekursive definisjoner

Når mengder er definert *induktivt*, så kan vi definere funksjoner over denne mengden rekursivt ved å

1. gi verdi til de "atomære" elementene (i basismengden), og
2. gi verdi til "sammensatte" elementene (fra induksjonssteget) ved å bruke verdiene som ble gitt til komponentene.

Den presise, rekursive definisjonen av FV er følgende.

Definisjon (Frie variable – definert rekursivt)

Gitt en term t, la mengden $\mathrm{FV}(t)$ *av frie variable i t være definert rekursivt ved:*

- $\mathrm{FV}(x_i) = \{x_i\}$, *for en variabel x_i, og*
- $\mathrm{FV}(c_i) = \emptyset$, *for en konstant c_i, og*
- $\mathrm{FV}(f(t_1, \ldots, t_n)) = \mathrm{FV}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{FV}(t_n)$, *for et funksjonssymbol f med aritet n.*

Frie variable i formler

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er fri hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver $\mathrm{FV}(\varphi)$ *for mengden av frie variable i* φ.

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er fri hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver $\mathrm{FV}(\varphi)$ *for mengden av frie variable i* φ.

Eksempel ($\forall xRxy \land Pz$)

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er fri hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver $\mathrm{FV}(\varphi)$ *for mengden av frie variable i* φ.

Eksempel ($\forall x Rxy \wedge Pz$)

- x *er bundet*

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er fri hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver $\mathrm{FV}(\varphi)$ *for mengden av frie variable i* φ.

Eksempel ($\forall x Rxy \land Pz$)

- x *er bundet*
- y *er fri*

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er fri hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver $\mathrm{FV}(\varphi)$ *for mengden av frie variable i* φ.

Eksempel ($\forall x Rxy \land Pz$)

- x *er bundet*
- y *er fri*
- z *er fri*

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er fri hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver FV(φ) *for mengden av frie variable i* φ.

Eksempel ($\forall x Rxy \wedge Pz$)

- x *er bundet*
- y *er fri*
- z *er fri*

Eksempel ($\forall x Pxy \rightarrow \forall z Pzx$)

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er fri hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver $\mathrm{FV}(\varphi)$ *for mengden av frie variable i* φ*.*

Eksempel ($\forall x Rxy \land Pz$)

- x *er bundet*
- y *er fri*
- z *er fri*

Eksempel ($\forall x Pxy \rightarrow \forall z Pzx$)

- x *er bundet*

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er fri hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver FV(φ) *for mengden av frie variable i* φ.

Eksempel ($\forall x Rxy \land Pz$)

- x *er bundet*
- y *er fri*
- z *er fri*

Eksempel ($\forall x Pxy \to \forall z Pzx$)

- x *er bundet*
- x *er fri*

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er fri hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver FV(φ) *for mengden av frie variable i* φ*.*

Eksempel ($\forall x Rxy \land Pz$)

- x *er bundet*
- y *er fri*
- z *er fri*

Eksempel ($\forall x Pxy \to \forall z Pzx$)

- x *er bundet*
- x *er fri*
- y *er fri*

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er fri hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver FV(φ) *for mengden av frie variable i* φ.

Eksempel ($\forall xRxy \land Pz$)

- x *er bundet*
- y *er fri*
- z *er fri*

Eksempel ($\forall xPxy \rightarrow \forall zPzx$)

- x *er bundet*
- x *er fri*
- y *er fri*
- z *er bundet*

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er fri hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver $\mathrm{FV}(\varphi)$ *for mengden av frie variable i* φ*.*

Eksempel ($\forall x Rxy \land Pz$)

- x *er bundet*
- y *er fri*
- z *er fri*

Eksempel ($\forall x Pxy \rightarrow \forall z Pzx$)

- x *er bundet*
- x *er fri*
- y *er fri*
- z *er bundet*

Oppgave

Gi den presise, rekursive, definisjonen av frie variable i en formel.

Substitusjoner

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[t/x]$, det vi får ved å erstatte alle forekomster av x i s med t, definert rekursivt ved:

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[t/x]$, det vi får ved å erstatte alle forekomster av x i s med t, definert rekursivt ved:

1. $y[t/x] = \begin{cases} t & \text{hvis } x = y \\ y & \text{ellers} \end{cases}$ *(når s er en variabel y).*

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[t/x]$, det vi får ved å erstatte alle forekomster av x i s med t, definert rekursivt ved:

1. $y[t/x] = \begin{cases} t & \text{hvis } x = y \\ y & \text{ellers} \end{cases}$ *(når s er en variabel y).*
2. $c[t/x] = c$ *(når s er en konstant c).*

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[t/x]$, det vi får ved å erstatte alle forekomster av x i s med t, definert rekursivt ved:

1. $y[t/x] = \begin{cases} t & \text{hvis } x = y \\ y & \text{ellers} \end{cases}$ *(når s er en variabel y).*
2. $c[t/x] = c$ *(når s er en konstant c).*
3. $f(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$ *(når s er en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$).*

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[t/x]$, det vi får ved å erstatte alle forekomster av x i s med t, definert rekursivt ved:

1. $y[t/x] = \begin{cases} t & \text{hvis } x = y \\ y & \text{ellers} \end{cases}$ *(når s er en variabel y).*
2. $c[t/x] = c$ *(når s er en konstant c).*
3. $f(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$ *(når s er en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$).*

Eksempel

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[t/x]$, det vi får ved å erstatte alle forekomster av x i s med t, definert rekursivt ved:

1. $y[t/x] = \begin{cases} t & \text{hvis } x = y \\ y & \text{ellers} \end{cases}$ *(når s er en variabel y).*
2. $c[t/x] = c$ *(når s er en konstant c).*
3. $f(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$ *(når s er en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$).*

Eksempel

- $f(x, y, a)[y/x]$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[t/x]$, det vi får ved å erstatte alle forekomster av x i s med t, definert rekursivt ved:

1. $y[t/x] = \begin{cases} t & \text{hvis } x = y \\ y & \text{ellers} \end{cases}$ *(når s er en variabel y).*
2. $c[t/x] = c$ *(når s er en konstant c).*
3. $f(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$ *(når s er en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$).*

Eksempel

- $f(x, y, a)[y/x] = f(x[y/x], y[y/x], a[y/x])$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[t/x]$, det vi får ved å erstatte alle forekomster av x i s med t, definert rekursivt ved:

1. $y[t/x] = \begin{cases} t & \text{hvis } x = y \\ y & \text{ellers} \end{cases}$ *(når s er en variabel y).*
2. $c[t/x] = c$ *(når s er en konstant c).*
3. $f(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$ *(når s er en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$).*

Eksempel

- $f(x, y, a)[y/x] = f(x[y/x], y[y/x], a[y/x]) = f(y, y, a)$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[t/x]$, det vi får ved å erstatte alle forekomster av x i s med t, definert rekursivt ved:

1. $y[t/x] = \begin{cases} t & \text{hvis } x = y \\ y & \text{ellers} \end{cases}$ *(når s er en variabel y).*
2. $c[t/x] = c$ *(når s er en konstant c).*
3. $f(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$ *(når s er en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$).*

Eksempel

- $f(x, y, a)[y/x] = f(x[y/x], y[y/x], a[y/x]) = f(y, y, a)$
- $f(y, y, a)[b/y]$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[t/x]$, det vi får ved å erstatte alle forekomster av x i s med t, definert rekursivt ved:

1. $y[t/x] = \begin{cases} t & \text{hvis } x = y \\ y & \text{ellers} \end{cases}$ *(når s er en variabel y).*
2. $c[t/x] = c$ *(når s er en konstant c).*
3. $f(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$ *(når s er en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$).*

Eksempel

- $f(x, y, a)[y/x] = f(x[y/x], y[y/x], a[y/x]) = f(y, y, a)$
- $f(y, y, a)[b/y] = f(y[b/y], y[b/y], a[b/y])$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[t/x]$, det vi får ved å erstatte alle forekomster av x i s med t, definert rekursivt ved:

1. $y[t/x] = \begin{cases} t & \text{hvis } x = y \\ y & \text{ellers} \end{cases}$ *(når s er en variabel y).*
2. $c[t/x] = c$ *(når s er en konstant c).*
3. $f(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$ *(når s er en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$).*

Eksempel

- $f(x, y, a)[y/x] = f(x[y/x], y[y/x], a[y/x]) = f(y, y, a)$
- $f(y, y, a)[b/y] = f(y[b/y], y[b/y], a[b/y]) = f(b, b, a)$

Substitusjoner

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[t/x]$ *er definert rekursivt ved:*

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[t/x]$ *er definert rekursivt ved:*

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[t/x]$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[t/x]$ *er definert rekursivt ved:*

1. $R(t_1, \dots, t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], \dots, t_n[t/x])$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[t/x]$ *er definert rekursivt ved:*

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$
2. $\neg\psi[t/x]$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[t/x]$ er definert rekursivt ved:

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$
2. $\neg\psi[t/x] = \neg(\psi[t/x])$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[t/x]$ *er definert rekursivt ved:*

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$
2. $\neg\psi[t/x] = \neg(\psi[t/x])$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)[t/x]$ *hvor* $\circ \in \{\land, \lor, \rightarrow\}$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[t/x]$ *er definert rekursivt ved:*

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$
2. $\neg\psi[t/x] = \neg(\psi[t/x])$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)[t/x] = (\varphi_1[t/x] \circ \varphi_2[t/x])$, *hvor* $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[t/x]$ *er definert rekursivt ved:*

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$
2. $\neg\psi[t/x] = \neg(\psi[t/x])$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)[t/x] = (\varphi_1[t/x] \circ \varphi_2[t/x])$, *hvor* $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
4. $\mathrm{Q}y\psi[t/x] =$, *hvor* $\mathrm{Q} \in \{\forall, \exists\}$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[t/x]$ *er definert rekursivt ved:*

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$
2. $\neg\psi[t/x] = \neg(\psi[t/x])$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)[t/x] = (\varphi_1[t/x] \circ \varphi_2[t/x])$, *hvor* $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
4. $\mathsf{Q}y\psi[t/x] = \begin{cases} \mathsf{Q}y(\psi[t/x]) & \textit{hvis } x \neq y \\ \mathsf{Q}y\psi & \textit{ellers} \end{cases}$, *hvor* $\mathsf{Q} \in \{\forall, \exists\}$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[t/x]$ er definert rekursivt ved:

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$
2. $\neg\psi[t/x] = \neg(\psi[t/x])$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)[t/x] = (\varphi_1[t/x] \circ \varphi_2[t/x])$, *hvor* $\circ \in \{\land, \lor, \rightarrow\}$
4. $Qy\psi[t/x] = \begin{cases} Qy(\psi[t/x]) & \textit{hvis } x \neq y \\ Qy\psi & \textit{ellers} \end{cases}$, *hvor* $Q \in \{\forall, \exists\}$

Eksempel

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[t/x]$ *er definert rekursivt ved:*

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$
2. $\neg\psi[t/x] = \neg(\psi[t/x])$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)[t/x] = (\varphi_1[t/x] \circ \varphi_2[t/x])$, *hvor* $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
4. $\mathrm{Q}y\psi[t/x] = \begin{cases} \mathrm{Q}y(\psi[t/x]) & \textit{hvis } x \neq y \\ \mathrm{Q}y\psi & \textit{ellers} \end{cases}$, *hvor* $\mathrm{Q} \in \{\forall, \exists\}$

Eksempel

- $(Pxy \wedge \forall x Pxy)[a/x]$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[t/x]$ er definert rekursivt ved:

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$
2. $\neg\psi[t/x] = \neg(\psi[t/x])$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)[t/x] = (\varphi_1[t/x] \circ \varphi_2[t/x])$, *hvor* $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
4. $\mathrm{Q}y\psi[t/x] = \begin{cases} \mathrm{Q}y(\psi[t/x]) & \textit{hvis } x \neq y \\ \mathrm{Q}y\psi & \textit{ellers} \end{cases}$, *hvor* $\mathrm{Q} \in \{\forall, \exists\}$

Eksempel

- $(Pxy \wedge \forall xPxy)[a/x] = (Pay \wedge \forall xPxy)$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[t/x]$ *er definert rekursivt ved:*

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$
2. $\neg\psi[t/x] = \neg(\psi[t/x])$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)[t/x] = (\varphi_1[t/x] \circ \varphi_2[t/x])$, *hvor* $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
4. $\mathrm{Q}y\psi[t/x] = \begin{cases} \mathrm{Q}y(\psi[t/x]) & \textit{hvis } x \neq y \\ \mathrm{Q}y\psi & \textit{ellers} \end{cases}$, *hvor* $\mathrm{Q} \in \{\forall, \exists\}$

Eksempel

- $(Pxy \wedge \forall x Pxy)[a/x] = (Pay \wedge \forall x Pxy)$
- $(Pxy \wedge \forall x Pxy)[a/y]$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[t/x]$ *er definert rekursivt ved:*

1. $R(t_1, \dots, t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], \dots, t_n[t/x])$
2. $\neg\psi[t/x] = \neg(\psi[t/x])$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)[t/x] = (\varphi_1[t/x] \circ \varphi_2[t/x])$, *hvor* $\circ \in \{\land, \lor, \to\}$
4. $\mathsf{Q}y\psi[t/x] = \begin{cases} \mathsf{Q}y(\psi[t/x]) & \textit{hvis } x \neq y \\ \mathsf{Q}y\psi & \textit{ellers} \end{cases}$, *hvor* $\mathsf{Q} \in \{\forall, \exists\}$

Eksempel

- $(Pxy \land \forall xPxy)[a/x] = (Pay \land \forall xPxy)$
- $(Pxy \land \forall xPxy)[a/y] = (Pxa \land \forall xPxa)$

Substitusjoner

Substitusjoner

- Vi ser at substitusjon ikke blir gjort for bundne variable.

Substitusjoner

- Vi ser at substitusjon ikke blir gjort for bundne variable.
- Vi har enda et tilfelle hvor vi ønsker å forhindre substitusjon.

Substitusjoner

- Vi ser at substitusjon ikke blir gjort for bundne variable.
- Vi har enda et tilfelle hvor vi ønsker å forhindre substitusjon.

Eksempel

Substitusjoner

- Vi ser at substitusjon ikke blir gjort for bundne variable.
- Vi har enda et tilfelle hvor vi ønsker å forhindre substitusjon.

Eksempel

- $\exists x \text{Liker}(x, y)[f(x)/y]$

Substitusjoner

- Vi ser at substitusjon ikke blir gjort for bundne variable.
- Vi har enda et tilfelle hvor vi ønsker å forhindre substitusjon.

Eksempel

- $\exists x \mathrm{Liker}(x, y)[f(x)/y] = \exists x \mathrm{Liker}(x, f(x))$

Substitusjoner

- Vi ser at substitusjon ikke blir gjort for bundne variable.
- Vi har enda et tilfelle hvor vi ønsker å forhindre substitusjon.

Eksempel

- $\exists x \text{Liker}(x, y)[f(x)/y] = \exists x \text{Liker}(x, f(x))$

- Her blir en variabel bundet *etter* substitusjon.

Substitusjoner

- Vi ser at substitusjon ikke blir gjort for bundne variable.
- Vi har enda et tilfelle hvor vi ønsker å forhindre substitusjon.

Eksempel

- $\exists x \mathrm{Liker}(x, y)[f(x)/y] = \exists x \mathrm{Liker}(x, f(x))$

- Her blir en variabel bundet *etter* substitusjon.
- Dette kan endre meningen til en formel på en måte som vi ikke ønsker.

Substitusjoner

Definisjon

Substitusjoner

Definisjon

Vi sier at t er fri for x i φ hvis ingen variabel i t blir bundet som følge av å substituere t for x i φ.

Substitusjoner

Definisjon

Vi sier at t er fri for x i φ hvis ingen variabel i t blir bundet som følge av å substitutere t for x i φ.

Eksempel

Termen $f(x)$ er ikke fri for y i formelen $\exists x \mathrm{Liker}(x, y)$.

Substitusjoner

Definisjon

Vi sier at t er fri for x i φ hvis ingen variabel i t blir bundet som følge av å substituere t for x i φ.

Eksempel

Termen $f(x)$ er ikke fri for y i formelen $\exists x \mathrm{Liker}(x, y)$.

- En måte å unngå dette på er å omdøpe bundne variable først.

Substitusjoner

Definisjon

Vi sier at t er fri for x i φ hvis ingen variabel i t blir bundet som følge av å substituere t for x i φ.

Eksempel

Termen $f(x)$ er ikke fri for y i formelen $\exists x \mathrm{Liker}(x, y)$.

- En måte å unngå dette på er å omdøpe bundne variable først.
- F.eks. se på $\exists z \mathrm{Liker}(z, y)$ i stedet for $\exists x \mathrm{Liker}(x, y)$.

Substitusjoner

Definisjon

Vi sier at t er fri for x i φ hvis ingen variabel i t blir bundet som følge av å substitutere t for x i φ.

Eksempel

Termen $f(x)$ er ikke fri for y i formelen $\exists x \mathrm{Liker}(x, y)$.

- En måte å unngå dette på er å omdøpe bundne variable først.
- F.eks. se på $\exists z \mathrm{Liker}(z, y)$ i stedet for $\exists x \mathrm{Liker}(x, y)$.
- Fra nå av antar vi at alle substitusjoner er "fri for", dvs. at ingen variable blir bundet som følge av en substitusjon.

Lukkede og åpne formler

Lukkede og åpne formler

Definisjon (Lukket/åpen formel)

Lukkede og åpne formler

Definisjon (Lukket/åpen formel)

En formel φ *er lukket hvis* $\mathsf{FV}(\varphi) = \emptyset$*, dvs.* φ *inneholder ingen frie variable.*

Lukkede og åpne formler

Definisjon (Lukket/åpen formel)

En formel φ er lukket hvis $\mathsf{FV}(\varphi) = \emptyset$, dvs. φ inneholder ingen frie variable. En formel er åpen hvis den ikke inneholder noen kvantorer.

Lukkede og åpne formler

Definisjon (Lukket/åpen formel)

En formel φ er lukket hvis $\mathsf{FV}(\varphi) = \emptyset$, dvs. φ inneholder ingen frie variable. En formel er åpen hvis den ikke inneholder noen kvantorer.

Eksempel

Lukkede og åpne formler

Definisjon (Lukket/åpen formel)

En formel φ *er lukket hvis* $\mathsf{FV}(\varphi) = \emptyset$*, dvs.* φ *inneholder ingen frie variable. En formel er åpen hvis den ikke inneholder noen kvantorer.*

Eksempel

- $\forall x P x a$ *er lukket*

Lukkede og åpne formler

Definisjon (Lukket/åpen formel)

En formel φ er lukket hvis $\mathsf{FV}(\varphi) = \emptyset$, dvs. φ inneholder ingen frie variable. En formel er åpen hvis den ikke inneholder noen kvantorer.

Eksempel

- $\forall x Pxa$ *er lukket*
- $\forall x Pxy$ *er ikke lukket*

Lukkede og åpne formler

Definisjon (Lukket/åpen formel)

En formel φ er lukket hvis $\mathsf{FV}(\varphi) = \emptyset$, dvs. φ inneholder ingen frie variable. En formel er åpen hvis den ikke inneholder noen kvantorer.

Eksempel

- $\forall x Pxa$ *er lukket*
- $\forall x Pxy$ *er ikke lukket*
- Pxy *er ikke lukket, men åpen*

Lukkede og åpne formler

Definisjon (Lukket/åpen formel)

En formel φ *er* *lukket* *hvis* $\mathsf{FV}(\varphi) = \emptyset$*, dvs.* φ *inneholder ingen frie variable. En formel er* *åpen* *hvis den ikke inneholder noen kvantorer.*

Eksempel

- $\forall x P x a$ *er lukket*
- $\forall x P x y$ *er ikke lukket*
- Pxy *er ikke lukket, men åpen*
- Pab *er åpen og lukket*

Introduksjon

Introduksjon

- Hvordan skal vi tolke førsteordens formler?

Introduksjon

- Hvordan skal vi tolke førsteordens formler?
- Hva skal $\forall x \varphi$ og $\exists x \varphi$ bety?

Introduksjon

- Hvordan skal vi tolke førsteordens formler?
- Hva skal $\forall x \varphi$ og $\exists x \varphi$ bety?
- Hva gjør en formel sann / gyldig / oppfyllbar?

Introduksjon

- Hvordan skal vi tolke førsteordens formler?
- Hva skal $\forall x \varphi$ og $\exists x \varphi$ bety?
- Hva gjør en formel sann / gyldig / oppfyllbar?
- Å gi en semantikk er å si noe om forholdet mellom språk og virkelighet.

Introduksjon

- Hvordan skal vi tolke førsteordens formler?
- Hva skal $\forall x \varphi$ og $\exists x \varphi$ bety?
- Hva gjør en formel sann / gyldig / oppfyllbar?
- Å gi en semantikk er å si noe om forholdet mellom språk og virkelighet.
    - Valuasjoner gir en semantikk for klassisk utsagnslogikk.

Introduksjon

- Hvordan skal vi tolke førsteordens formler?
- Hva skal $\forall x \varphi$ og $\exists x \varphi$ bety?
- Hva gjør en formel sann / gyldig / oppfyllbar?
- Å gi en semantikk er å si noe om forholdet mellom språk og virkelighet.
  - Valuasjoner gir en semantikk for klassisk utsagnslogikk.
- I førsteordens logikk vil modeller gi oss en semantikk.

Introduksjon

Introduksjon

En modell består intuitivt av

Introduksjon

En modell består intuitivt av

1. en mengde, og

Introduksjon

En modell består intuitivt av

1. en mengde, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler slik at

Introduksjon

En modell består intuitivt av

1. en mengde, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler slik at
   - et konstantsymbol tolkes som et element i mengden,

Introduksjon

En modell består intuitivt av

1. en mengde, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler slik at
   - et konstantsymbol tolkes som et element i mengden,
   - et funksjonssymbol tolkes som en funksjon på mengden, og

Introduksjon

En modell består intuitivt av

1. en mengde, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler slik at
   - et konstantsymbol tolkes som et element i mengden,
   - et funksjonssymbol tolkes som en funksjon på mengden, og
   - et relasjonssymbol tolkes som en relasjon på mengden.

Introduksjon

En modell består intuitivt av

1. en mengde, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler slik at
   - et konstantsymbol tolkes som et element i mengden,
   - et funksjonssymbol tolkes som en funksjon på mengden, og
   - et relasjonssymbol tolkes som en relasjon på mengden.

Vi skal først definere modeller helt presist, også skal vi definere hva det vil si at en formel er sann i en modell.

Introduksjon

En modell består intuitivt av

1. en mengde, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler slik at
    - et konstantsymbol tolkes som et element i mengden,
    - et funksjonssymbol tolkes som en funksjon på mengden, og
    - et relasjonssymbol tolkes som en relasjon på mengden.

Vi skal først definere modeller helt presist, også skal vi definere hva det vil si at en formel er sann i en modell.

Husk

Introduksjon

En modell består intuitivt av

1. en mengde, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler slik at
   - et konstantsymbol tolkes som et element i mengden,
   - et funksjonssymbol tolkes som en funksjon på mengden, og
   - et relasjonssymbol tolkes som en relasjon på mengden.

Vi skal først definere modeller helt presist, også skal vi definere hva det vil si at en formel er sann i en modell.

Husk

Hvis D er en mengde, så består D^n av alle n-tupler av elementer fra D, for $n \geq 0$.

Introduksjon

En modell består intuitivt av

1. en mengde, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler slik at
   - et konstantsymbol tolkes som et element i mengden,
   - et funksjonssymbol tolkes som en funksjon på mengden, og
   - et relasjonssymbol tolkes som en relasjon på mengden.

Vi skal først definere modeller helt presist, også skal vi definere hva det vil si at en formel er sann i en modell.

Husk

Hvis D er en mengde, så består D^n av alle n-tupler av elementer fra D, for $n \geq 0$.

$$D^n = \{\langle d_1, \ldots, d_n \rangle \mid d_1, \ldots, d_n \in D\}$$

Modeller

Modeller

La et førsteordens språk $\mathcal{L}$ være gitt.

Modeller

La et førsteordens språk $\mathcal{L}$ være gitt.

Definisjon (Modell)

Modeller

La et førsteordens språk $\mathcal{L}$ være gitt.

Definisjon (Modell)

En modell $\mathcal{M}$ for $\mathcal{L}$ består av en ikke-tom mengde D, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og en funksjon $(\cdot)^{\mathcal{M}}$ som tolker alle ikke-logiske symboler på følgende måte:

Modeller

La et førsteordens språk $\mathcal{L}$ være gitt.

Definisjon (Modell)

En modell $\mathcal{M}$ *for* $\mathcal{L}$ *består av en ikke-tom mengde* D*, kalt* domenet *til* $\mathcal{M}$*, og en funksjon* $(\cdot)^{\mathcal{M}}$ *som tolker alle ikke-logiske symboler på følgende måte:*

- *Hvis* c *er et konstantsymbol,*

Modeller

La et førsteordens språk $\mathcal{L}$ være gitt.

Definisjon (Modell)

En modell $\mathcal{M}$ for $\mathcal{L}$ består av en ikke-tom mengde D, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og en funksjon $(\cdot)^{\mathcal{M}}$ som tolker alle ikke-logiske symboler på følgende måte:

- *Hvis c er et konstantsymbol, så er $c^{\mathcal{M}} \in D$.*

Modeller

La et førsteordens språk $\mathcal{L}$ være gitt.

Definisjon (Modell)

En modell $\mathcal{M}$ for $\mathcal{L}$ består av en ikke-tom mengde D, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og en funksjon $(\cdot)^{\mathcal{M}}$ som tolker alle ikke-logiske symboler på følgende måte:

- *Hvis c er et konstantsymbol, så er $c^{\mathcal{M}} \in D$.*
- *Hvis f er et funksjonsymbol med aritet n,*

Modeller

La et førsteordens språk $\mathcal{L}$ være gitt.

Definisjon (Modell)

En modell $\mathcal{M}$ for $\mathcal{L}$ består av en ikke-tom mengde D, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og en funksjon $(\cdot)^{\mathcal{M}}$ som tolker alle ikke-logiske symboler på følgende måte:

- *Hvis c er et konstantsymbol, så er $c^{\mathcal{M}} \in D$.*
- *Hvis f er et funksjonsymbol med aritet n,så er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra $D^n = \underbrace{D \times \cdots \times D}_{n}$ til D.*

Modeller

La et førsteordens språk $\mathcal{L}$ være gitt.

Definisjon (Modell)

En modell $\mathcal{M}$ for $\mathcal{L}$ består av en ikke-tom mengde D, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og en funksjon $(\cdot)^{\mathcal{M}}$ som tolker alle ikke-logiske symboler på følgende måte:

- *Hvis c er et konstantsymbol, så er $c^{\mathcal{M}} \in D$.*
- *Hvis f er et funksjonsymbol med aritet n,så er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra $D^n = \underbrace{D \times \cdots \times D}_{n}$ til D.*
- *Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n,*

Modeller

La et førsteordens språk $\mathcal{L}$ være gitt.

Definisjon (Modell)

En ***modell*** $\mathcal{M}$ *for* $\mathcal{L}$ *består av en ikke-tom mengde* D*, kalt* ***domenet*** *til* $\mathcal{M}$*, og en funksjon* $(\cdot)^{\mathcal{M}}$ *som tolker alle ikke-logiske symboler på følgende måte:*

- *Hvis* c *er et konstantsymbol, så er* $c^{\mathcal{M}} \in D$.
- *Hvis* f *er et funksjonsymbol med aritet* n*,så er* $f^{\mathcal{M}}$ *en funksjon fra* $D^n = \underbrace{D \times \cdots \times D}_{n}$ *til* D.
- *Hvis* R *er et relasjonssymbol med aritet* n*,så er* $R^{\mathcal{M}}$ *en relasjon på* $D^n = \underbrace{D \times \cdots \times D}_{n}$.

Modeller

La et førsteordens språk $\mathcal{L}$ være gitt.

Definisjon (Modell)

En modell $\mathcal{M}$ for $\mathcal{L}$ består av en ikke-tom mengde D, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og en funksjon $(\cdot)^{\mathcal{M}}$ som tolker alle ikke-logiske symboler på følgende måte:

- *Hvis c er et konstantsymbol, så er $c^{\mathcal{M}} \in D$.*
- *Hvis f er et funksjonsymbol med aritet n,så er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra $D^n = \underbrace{D \times \cdots \times D}_{n}$ til D.*
- *Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n,så er $R^{\mathcal{M}}$ en relasjon på $D^n = \underbrace{D \times \cdots \times D}_{n}$.*

Vi skriver $|\mathcal{M}|$ for domenet D til modellen $\mathcal{M}$.

Noen kommentarer

Noen kommentarer

1. Et funksjonssymbol f med aritet 0 kan betraktes som en konstant.

Noen kommentarer

1. Et funksjonssymbol f med aritet 0 kan betraktes som en konstant.
   - Da er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra D^0 til D.

Noen kommentarer

1. Et funksjonssymbol f med aritet 0 kan betraktes som en konstant.
   - Da er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra D^0 til D.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ – det tomme tuppelet – så består $f^{\mathcal{M}}$ også av kun ett element $\langle\langle\rangle, e\rangle$, hvor $e \in D$.

Noen kommentarer

1. Et funksjonssymbol f med aritet 0 kan betraktes som en konstant.
   - Da er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra D^0 til D.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ – det tomme tuppelet – så består $f^{\mathcal{M}}$ også av kun ett element $\langle\langle\rangle, e\rangle$, hvor $e \in D$.
   - Vi kan derfor identifisere $f^{\mathcal{M}}$ med e.

Noen kommentarer

1. Et funksjonssymbol f med aritet 0 kan betraktes som en konstant.
   - Da er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra D^0 til D.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ – det tomme tuppelet – så består $f^{\mathcal{M}}$ også av kun ett element $\langle\langle\rangle, e\rangle$, hvor $e \in D$.
   - Vi kan derfor identifisere $f^{\mathcal{M}}$ med e.
2. Et relasjonssymbol R med aritet 0 kan betraktes som en utsagnsvariabel.

Noen kommentarer

1. Et funksjonssymbol f med aritet 0 kan betraktes som en konstant.
   - Da er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra D^0 til D.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ – det tomme tuppelet – så består $f^{\mathcal{M}}$ også av kun ett element $\langle\langle\rangle, e\rangle$, hvor $e \in D$.
   - Vi kan derfor identifisere $f^{\mathcal{M}}$ med e.
2. Et relasjonssymbol R med aritet 0 kan betraktes som en utsagnsvariabel.
   - Da er $R^{\mathcal{M}}$ en delmengde av D^0.

Noen kommentarer

1. Et funksjonssymbol f med aritet 0 kan betraktes som en konstant.
   - Da er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra D^0 til D.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ – det tomme tuppelet – så består $f^{\mathcal{M}}$ også av kun ett element $\langle\langle\rangle, e\rangle$, hvor $e \in D$.
   - Vi kan derfor identifisere $f^{\mathcal{M}}$ med e.
2. Et relasjonssymbol R med aritet 0 kan betraktes som en utsagnsvariabel.
   - Da er $R^{\mathcal{M}}$ en delmengde av D^0.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ – det tomme tuppelet -så fins det nøyaktig to muligheter for $R^{\mathcal{M}}$.

Noen kommentarer

1. Et funksjonssymbol f med aritet 0 kan betraktes som en konstant.
   - Da er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra D^0 til D.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ – det tomme tuppelet – så består $f^{\mathcal{M}}$ også av kun ett element $\langle\langle\rangle, e\rangle$, hvor $e \in D$.
   - Vi kan derfor identifisere $f^{\mathcal{M}}$ med e.
2. Et relasjonssymbol R med aritet 0 kan betraktes som en utsagnsvariabel.
   - Da er $R^{\mathcal{M}}$ en delmengde av D^0.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ – det tomme tuppelet -så fins det nøyaktig to muligheter for $R^{\mathcal{M}}$.
   - Enten så er $R^{\mathcal{M}}$ tom eller så er $\langle\rangle \in R^{\mathcal{M}}$.

Noen kommentarer

1. Et funksjonssymbol f med aritet 0 kan betraktes som en konstant.
   - Da er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra D^0 til D.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ – det tomme tuppelet – så består $f^{\mathcal{M}}$ også av kun ett element $\langle\langle\rangle, e\rangle$, hvor $e \in D$.
   - Vi kan derfor identifisere $f^{\mathcal{M}}$ med e.
2. Et relasjonssymbol R med aritet 0 kan betraktes som en utsagnsvariabel.
   - Da er $R^{\mathcal{M}}$ en delmengde av D^0.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ – det tomme tuppelet -så fins det nøyaktig to muligheter for $R^{\mathcal{M}}$.
   - Enten så er $R^{\mathcal{M}}$ tom eller så er $\langle\rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
   - Vi kan derfor tenke på mengden $\{\emptyset, \{\langle\rangle\}\}$ av delmengder av D^0 som **Bool**.

Noen kommentarer

1. Et funksjonssymbol f med aritet 0 kan betraktes som en konstant.
   - Da er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra D^0 til D.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ – det tomme tuppelet – så består $f^{\mathcal{M}}$ også av kun ett element $\langle\langle\rangle, e\rangle$, hvor $e \in D$.
   - Vi kan derfor identifisere $f^{\mathcal{M}}$ med e.
2. Et relasjonssymbol R med aritet 0 kan betraktes som en utsagnsvariabel.
   - Da er $R^{\mathcal{M}}$ en delmengde av D^0.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ – det tomme tuppelet -så fins det nøyaktig to muligheter for $R^{\mathcal{M}}$.
   - Enten så er $R^{\mathcal{M}}$ tom eller så er $\langle\rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
   - Vi kan derfor tenke på mengden $\{\emptyset, \{\langle\rangle\}\}$ av delmengder av D^0 som **Bool**.
3. Et tuppel $\langle e\rangle$, hvor $e \in D$, kan vi identifisere med elementet e.

Noen kommentarer

1. Et funksjonssymbol f med aritet 0 kan betraktes som en konstant.
   - Da er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra D^0 til D.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ – det tomme tuppelet – så består $f^{\mathcal{M}}$ også av kun ett element $\langle\langle\rangle, e\rangle$, hvor $e \in D$.
   - Vi kan derfor identifisere $f^{\mathcal{M}}$ med e.
2. Et relasjonssymbol R med aritet 0 kan betraktes som en utsagnsvariabel.
   - Da er $R^{\mathcal{M}}$ en delmengde av D^0.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ – det tomme tuppelet -så fins det nøyaktig to muligheter for $R^{\mathcal{M}}$.
   - Enten så er $R^{\mathcal{M}}$ tom eller så er $\langle\rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
   - Vi kan derfor tenke på mengden $\{\emptyset, \{\langle\rangle\}\}$ av delmengder av D^0 som **Bool**.
3. Et tuppel $\langle e\rangle$, hvor $e \in D$, kan vi identifisere med elementet e.
   - Når et relasjonssymbol R har aritet 1,så skriver vi derfor $\{e_1, \ldots, e_n\}$ i stedet for $\{\langle e_1\rangle, \ldots, \langle e_n\rangle\}$.

Noen kommentarer

1. Et funksjonssymbol f med aritet 0 kan betraktes som en konstant.
   - Da er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra D^0 til D.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ – det tomme tuppelet – så består $f^{\mathcal{M}}$ også av kun ett element $\langle\langle\rangle, e\rangle$, hvor $e \in D$.
   - Vi kan derfor identifisere $f^{\mathcal{M}}$ med e.
2. Et relasjonssymbol R med aritet 0 kan betraktes som en utsagnsvariabel.
   - Da er $R^{\mathcal{M}}$ en delmengde av D^0.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ – det tomme tuppelet -så fins det nøyaktig to muligheter for $R^{\mathcal{M}}$.
   - Enten så er $R^{\mathcal{M}}$ tom eller så er $\langle\rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
   - Vi kan derfor tenke på mengden $\{\emptyset, \{\langle\rangle\}\}$ av delmengder av D^0 som **Bool**.
3. Et tuppel $\langle e\rangle$, hvor $e \in D$, kan vi identifisere med elementet e.
   - Når et relasjonssymbol R har aritet 1,så skriver vi derfor $\{e_1, \dots, e_n\}$ i stedet for $\{\langle e_1\rangle, \dots, \langle e_n\rangle\}$.
   - Vi antar derfor også at $R^{\mathcal{M}} \subseteq D$.

Hovedeksempel – et figurspråk

Hovedeksempel – et figurspråk

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.

Hovedeksempel – et figurspråk

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.

Hovedeksempel – et figurspråk

Relasjonssymbol	aritet

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.

Hovedeksempel – et figurspråk

Relasjonssymbol	aritet
Sirkel	1

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.

Hovedeksempel – et figurspråk

Relasjonssymbol	aritet
Sirkel	1

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.
- Vi leser på denne måten:

Hovedeksempel – et figurspråk

Relasjonssymbol	aritet
Sirkel	1

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.
- Vi leser på denne måten:

  Sirkel(x): "x er en sirkel"

Hovedeksempel – et figurspråk

Relasjonssymbol	aritet
Sirkel	1
Firkant	1

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.
- Vi leser på denne måten:
  Sirkel(x): "x er en sirkel"

Hovedeksempel – et figurspråk

Relasjonssymbol	aritet
Sirkel	1
Firkant	1

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.
- Vi leser på denne måten:

  Sirkel(x): "x er en sirkel"

  Firkant(x): "x er en firkant"

Hovedeksempel – et figurspråk

Relasjonssymbol	aritet
Sirkel	1
Firkant	1
Trekant	1

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.
- Vi leser på denne måten:

  Sirkel(x): "x er en sirkel"

  Firkant(x): "x er en firkant"

Hovedeksempel – et figurspråk

Relasjonssymbol	aritet
Sirkel	1
Firkant	1
Trekant	1

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.
- Vi leser på denne måten:

  Sirkel(x): "x er en sirkel"

  Firkant(x): "x er en firkant"

  Trekant(x): "x er en trekant"

Hovedeksempel – et figurspråk

Relasjonssymbol	aritet
Sirkel	1
Firkant	1
Trekant	1
Stor	1

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.
- Vi leser på denne måten:

  Sirkel(x): "x er en sirkel"

  Firkant(x): "x er en firkant"

  Trekant(x): "x er en trekant"

Hovedeksempel – et figurspråk

Relasjonssymbol	aritet
Sirkel	1
Firkant	1
Trekant	1
Stor	1

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.
- Vi leser på denne måten:

  Sirkel(x): "x er en sirkel"

  Firkant(x): "x er en firkant"

  Trekant(x): "x er en trekant"

  Stor(x): "x er stor"

Hovedeksempel – et figurspråk

Relasjonssymbol	aritet
Sirkel	1
Firkant	1
Trekant	1
Stor	1
Liten	1

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.
- Vi leser på denne måten:

  Sirkel(x): "x er en sirkel"

  Firkant(x): "x er en firkant"

  Trekant(x): "x er en trekant"

  Stor(x): "x er stor"

Hovedeksempel – et figurspråk

Relasjonssymbol	aritet
Sirkel	1
Firkant	1
Trekant	1
Stor	1
Liten	1

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.
- Vi leser på denne måten:

  Sirkel(x): "x er en sirkel"

  Firkant(x): "x er en firkant"

  Trekant(x): "x er en trekant"

  Stor(x): "x er stor"

  Liten(x): "x er liten"

Hovedeksempel – et figurspråk

Relasjonssymbol	aritet
Sirkel	1
Firkant	1
Trekant	1
Stor	1
Liten	1
Mindre	2

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.
- Vi leser på denne måten:

  Sirkel(x): "x er en sirkel"

  Firkant(x): "x er en firkant"

  Trekant(x): "x er en trekant"

  Stor(x): "x er stor"

  Liten(x): "x er liten"

Hovedeksempel – et figurspråk

Relasjonssymbol	aritet
Sirkel	1
Firkant	1
Trekant	1
Stor	1
Liten	1
Mindre	2

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.
- Vi leser på denne måten:

  Sirkel(x): "x er en sirkel"

  Firkant(x): "x er en firkant"

  Trekant(x): "x er en trekant"

  Stor(x): "x er stor"

  Liten(x): "x er liten"

  Mindre(x, y): "x er mindre enn y"

Hovedeksempel – et figurspråk

Relasjonssymbol	aritet
Sirkel	1
Firkant	1
Trekant	1
Stor	1
Liten	1
Mindre	2

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.
- Vi leser på denne måten:

  Sirkel(x): "x er en sirkel"

  Firkant(x): "x er en firkant"

  Trekant(x): "x er en trekant"

  Stor(x): "x er stor"

  Liten(x): "x er liten"

  Mindre(x, y): "x er mindre enn y"

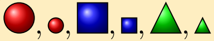
La oss nå lage en modell for dette språket!

Hovedeksempel – et figurspråk

En tolkning av figurspråket

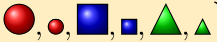
Hovedeksempel – et figurspråk

En tolkning av figurspråket

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $D = \{$  $\}$.

Hovedeksempel – et figurspråk

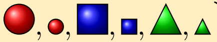
En tolkning av figurspråket

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $D = \{$  $\}$.

$a^{\mathcal{M}} =$	$\mathsf{Sirkel}^{\mathcal{M}} =$
$b^{\mathcal{M}} =$	$\mathsf{Firkant}^{\mathcal{M}} =$
$c^{\mathcal{M}} =$	$\mathsf{Trekant}^{\mathcal{M}} =$
$d^{\mathcal{M}} =$	$\mathsf{Stor}^{\mathcal{M}} =$
$e^{\mathcal{M}} =$	$\mathsf{Liten}^{\mathcal{M}} =$
$f^{\mathcal{M}} =$	$\mathsf{Mindre}^{\mathcal{M}} =$

Hovedeksempel – et figurspråk

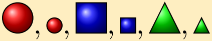
En tolkning av figurspråket

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $D = \{$  $\}$.

$a^{\mathcal{M}} =$ 		$\text{Sirkel}^{\mathcal{M}} =$	
$b^{\mathcal{M}} =$		$\text{Firkant}^{\mathcal{M}} =$	
$c^{\mathcal{M}} =$		$\text{Trekant}^{\mathcal{M}} =$	
$d^{\mathcal{M}} =$		$\text{Stor}^{\mathcal{M}} =$	
$e^{\mathcal{M}} =$		$\text{Liten}^{\mathcal{M}} =$	
$f^{\mathcal{M}} =$		$\text{Mindre}^{\mathcal{M}} =$	

Hovedeksempel – et figurspråk

En tolkning av figurspråket

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $D = \{$  $\}$.

$a^{\mathcal{M}} =$ 		$\text{Sirkel}^{\mathcal{M}}$	$=$
$b^{\mathcal{M}} =$ 		$\text{Firkant}^{\mathcal{M}}$	$=$
$c^{\mathcal{M}} =$		$\text{Trekant}^{\mathcal{M}}$	$=$
$d^{\mathcal{M}} =$		$\text{Stor}^{\mathcal{M}}$	$=$
$e^{\mathcal{M}} =$		$\text{Liten}^{\mathcal{M}}$	$=$
$f^{\mathcal{M}} =$		$\text{Mindre}^{\mathcal{M}}$	$=$

Hovedeksempel – et figurspråk

En tolkning av figurspråket

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $D = \{$, , , , , $\}$.

$a^{\mathcal{M}} =$		$\mathsf{Sirkel}^{\mathcal{M}}$	$=$
$b^{\mathcal{M}} =$		$\mathsf{Firkant}^{\mathcal{M}}$	$=$
$c^{\mathcal{M}} =$		$\mathsf{Trekant}^{\mathcal{M}}$	$=$
$d^{\mathcal{M}} =$		$\mathsf{Stor}^{\mathcal{M}}$	$=$
$e^{\mathcal{M}} =$		$\mathsf{Liten}^{\mathcal{M}}$	$=$
$f^{\mathcal{M}} =$		$\mathsf{Mindre}^{\mathcal{M}}$	$=$

Hovedeksempel – et figurspråk

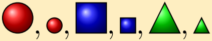
En tolkning av figurspråket

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $D = \{$, , , , , $\}$.

$a^{\mathcal{M}} =$		$\mathsf{Sirkel}^{\mathcal{M}} =$	
$b^{\mathcal{M}} =$		$\mathsf{Firkant}^{\mathcal{M}} =$	
$c^{\mathcal{M}} =$		$\mathsf{Trekant}^{\mathcal{M}} =$	
$d^{\mathcal{M}} =$		$\mathsf{Stor}^{\mathcal{M}} =$	
$e^{\mathcal{M}} =$		$\mathsf{Liten}^{\mathcal{M}} =$	
$f^{\mathcal{M}} =$		$\mathsf{Mindre}^{\mathcal{M}} =$	

Hovedeksempel – et figurspråk

En tolkning av figurspråket

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $D = \{$  $\}$.

$a^{\mathcal{M}} =$ 	$\mathsf{Sirkel}^{\mathcal{M}} =$
$b^{\mathcal{M}} =$ 	$\mathsf{Firkant}^{\mathcal{M}} =$
$c^{\mathcal{M}} =$ 	$\mathsf{Trekant}^{\mathcal{M}} =$
$d^{\mathcal{M}} =$ 	$\mathsf{Stor}^{\mathcal{M}} =$
$e^{\mathcal{M}} =$ 	$\mathsf{Liten}^{\mathcal{M}} =$
$f^{\mathcal{M}} =$	$\mathsf{Mindre}^{\mathcal{M}} =$

Hovedeksempel – et figurspråk

En tolkning av figurspråket

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $D = \{$, , , , , $\}$.

$a^{\mathcal{M}} =$		$\mathsf{Sirkel}^{\mathcal{M}}$	$=$
$b^{\mathcal{M}} =$		$\mathsf{Firkant}^{\mathcal{M}}$	$=$
$c^{\mathcal{M}} =$		$\mathsf{Trekant}^{\mathcal{M}}$	$=$
$d^{\mathcal{M}} =$		$\mathsf{Stor}^{\mathcal{M}}$	$=$
$e^{\mathcal{M}} =$		$\mathsf{Liten}^{\mathcal{M}}$	$=$
$f^{\mathcal{M}} =$		$\mathsf{Mindre}^{\mathcal{M}}$	$=$

Hovedeksempel – et figurspråk

En tolkning av figurspråket

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $D = \{$ , , , , ,  $\}$.

$a^{\mathcal{M}} =$  $\mathsf{Sirkel}^{\mathcal{M}} = \{$ ,  $\}$

$b^{\mathcal{M}} =$  $\mathsf{Firkant}^{\mathcal{M}} =$

$c^{\mathcal{M}} =$  $\mathsf{Trekant}^{\mathcal{M}} =$

$d^{\mathcal{M}} =$  $\mathsf{Stor}^{\mathcal{M}} =$

$e^{\mathcal{M}} =$  $\mathsf{Liten}^{\mathcal{M}} =$

$f^{\mathcal{M}} =$  $\mathsf{Mindre}^{\mathcal{M}} =$

Hovedeksempel – et figurspråk

En tolkning av figurspråket

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $D = \{$, , , , , $\}$.

$a^{\mathcal{M}} =$  Sirkel$^{\mathcal{M}}$ = { ,  }

$b^{\mathcal{M}} =$  Firkant$^{\mathcal{M}}$ = { ,  }

$c^{\mathcal{M}} =$  Trekant$^{\mathcal{M}} =$

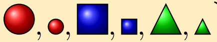
$d^{\mathcal{M}} =$  Stor$^{\mathcal{M}} =$

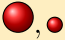
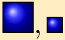
$e^{\mathcal{M}} =$  Liten$^{\mathcal{M}} =$

$f^{\mathcal{M}} =$  Mindre$^{\mathcal{M}} =$

Hovedeksempel – et figurspråk

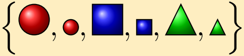
En tolkning av figurspråket

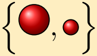
La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $D = \{$  $\}$.

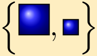
$a^{\mathcal{M}} =$ 		Sirkel$^{\mathcal{M}}$	$= \{$  $\}$
$b^{\mathcal{M}} =$ 		Firkant$^{\mathcal{M}}$	$= \{$  $\}$
$c^{\mathcal{M}} =$ 		Trekant$^{\mathcal{M}}$	$= \{$  $\}$
$d^{\mathcal{M}} =$ 		Stor$^{\mathcal{M}}$	$=$
$e^{\mathcal{M}} =$ 		Liten$^{\mathcal{M}}$	$=$
$f^{\mathcal{M}} =$ 		Mindre$^{\mathcal{M}}$	$=$

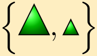
Hovedeksempel – et figurspråk

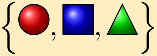
En tolkning av figurspråket

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $D =$ .

$a^{\mathcal{M}} =$  Sirkel$^{\mathcal{M}}$ $=$ 

$b^{\mathcal{M}} =$  Firkant$^{\mathcal{M}}$ $=$ 

$c^{\mathcal{M}} =$  Trekant$^{\mathcal{M}}$ $=$ 

$d^{\mathcal{M}} =$  Stor$^{\mathcal{M}}$ $=$ 

$e^{\mathcal{M}} =$  Liten$^{\mathcal{M}}$ $=$

$f^{\mathcal{M}} =$  Mindre$^{\mathcal{M}}$ $=$

Hovedeksempel – et figurspråk

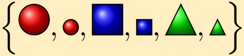
En tolkning av figurspråket

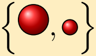
La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $D = \{$⬤, ●, ■, ▪, ▲, ▴$\}$.

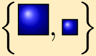
$a^{\mathcal{M}} =$ ⬤		Sirkel$^{\mathcal{M}}$	$= \{$⬤, ●$\}$
$b^{\mathcal{M}} =$ ●		Firkant$^{\mathcal{M}}$	$= \{$■, ▪$\}$
$c^{\mathcal{M}} =$ ■		Trekant$^{\mathcal{M}}$	$= \{$▲, ▴$\}$
$d^{\mathcal{M}} =$ ▪		Stor$^{\mathcal{M}}$	$= \{$⬤, ■, ▲$\}$
$e^{\mathcal{M}} =$ ▲		Liten$^{\mathcal{M}}$	$= \{$●, ▪, ▴$\}$
$f^{\mathcal{M}} =$ ▴		Mindre$^{\mathcal{M}}$	$=$

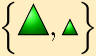
Hovedeksempel – et figurspråk

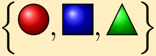
En tolkning av figurspråket

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $D =$ .

$a^{\mathcal{M}} =$  $\qquad$ $\text{Sirkel}^{\mathcal{M}} =$ 

$b^{\mathcal{M}} =$  $\qquad$ $\text{Firkant}^{\mathcal{M}} =$ 

$c^{\mathcal{M}} =$  $\qquad$ $\text{Trekant}^{\mathcal{M}} =$ 

$d^{\mathcal{M}} =$  $\qquad$ $\text{Stor}^{\mathcal{M}} =$ 

$e^{\mathcal{M}} =$  $\qquad$ $\text{Liten}^{\mathcal{M}} =$ 

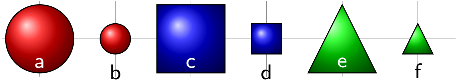
$f^{\mathcal{M}} =$  $\qquad$ $\text{Mindre}^{\mathcal{M}} =$ 

Hovedeksempel – et figurspråk

Vi foregriper begivenhetene og ser på hvilke atomære formler som er sanne og usanne i modellen $\mathcal{M}$.

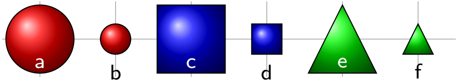
Hovedeksempel – et figurspråk

Vi foregriper begivenhetene og ser på hvilke atomære formler som er sanne og usanne i modellen $\mathcal{M}$.



Hovedeksempel – et figurspråk

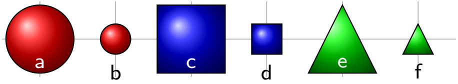
Vi foregriper begivenhetene og ser på hvilke atomære formler som er sanne og usanne i modellen $\mathcal{M}$.



Sant

Hovedeksempel – et figurspråk

Vi foregriper begivenhetene og ser på hvilke atomære formler som er sanne og usanne i modellen $\mathcal{M}$.

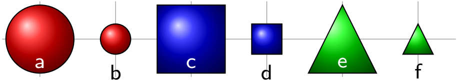


Sant

- Sirkel(a)

Hovedeksempel – et figurspråk

Vi foregriper begivenhetene og ser på hvilke atomære formler som er sanne og usanne i modellen $\mathcal{M}$.

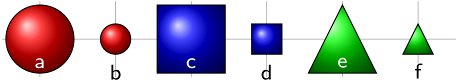


Sant

- Sirkel(a)
- Firkant(c)

Hovedeksempel – et figurspråk

Vi foregriper begivenhetene og ser på hvilke atomære formler som er sanne og usanne i modellen $\mathcal{M}$.

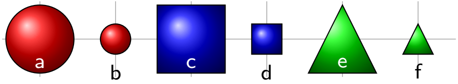


Sant

- Sirkel(a)
- Firkant(c)
- Liten(b)

Hovedeksempel – et figurspråk

Vi foregriper begivenhetene og ser på hvilke atomære formler som er sanne og usanne i modellen $\mathcal{M}$.

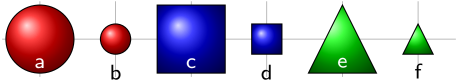


Sant

- Sirkel(a)
- Firkant(c)
- Liten(b)
- Mindre(b, e)

Hovedeksempel – et figurspråk

Vi foregriper begivenhetene og ser på hvilke atomære formler som er sanne og usanne i modellen $\mathcal{M}$.



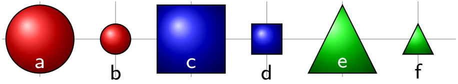
Sant

- Sirkel(a)
- Firkant(c)
- Liten(b)
- Mindre(b, e)

Usant

Hovedeksempel – et figurspråk

Vi foregriper begivenhetene og ser på hvilke atomære formler som er sanne og usanne i modellen $\mathcal{M}$.



Sant

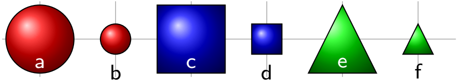
- Sirkel(a)
- Firkant(c)
- Liten(b)
- Mindre(b, e)

Usant

- Trekant(a)

Hovedeksempel – et figurspråk

Vi foregriper begivenhetene og ser på hvilke atomære formler som er sanne og usanne i modellen $\mathcal{M}$.



Sant

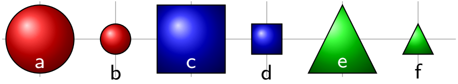
- Sirkel(a)
- Firkant(c)
- Liten(b)
- Mindre(b, e)

Usant

- Trekant(a)
- Stor(b)

Hovedeksempel – et figurspråk

Vi foregriper begivenhetene og ser på hvilke atomære formler som er sanne og usanne i modellen $\mathcal{M}$.



Sant

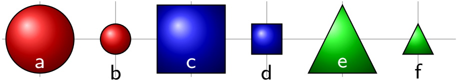
- Sirkel(a)
- Firkant(c)
- Liten(b)
- Mindre(b, e)

Usant

- Trekant(a)
- Stor(b)
- Mindre(a, b)

Hovedeksempel – et figurspråk

Vi foregriper begivenhetene og ser på hvilke atomære formler som er sanne og usanne i modellen $\mathcal{M}$.



Sant

- Sirkel(a)
- Firkant(c)
- Liten(b)
- Mindre(b, e)

Usant

- Trekant(a)
- Stor(b)
- Mindre(a, b)
- Mindre(a, a)

Variabeltilordninger

- En modell tolker konstantsymboler, funksjonssymboler, og relasjonssymboler, men. . .

Variabeltilordninger

- En modell tolker konstantsymboler, funksjonssymboler, og relasjonssymboler, men. . .
- . . . ikke variabler. Derfor definerer vi. . .

Variabeltilordninger

- En modell tolker konstantsymboler, funksjonssymboler, og relasjonssymboler, men. . .
- . . . ikke variabler. Derfor definerer vi. . .

Definisjon (Variabeltilordning)

Variabeltilordninger

- En modell tolker konstantsymboler, funksjonssymboler, og relasjonssymboler, men…
- …ikke variabler. Derfor definerer vi…

Definisjon (Variabeltilordning)

La $\mathcal{M}$ være en modell.

Variabeltilordninger

- En modell tolker konstantsymboler, funksjonssymboler, og relasjonssymboler, men. . .
- . . . ikke variabler. Derfor definerer vi. . .

Definisjon (Variabeltilordning)

La $\mathcal{M}$ være en modell. En variabeltilordning for $\mathcal{M}$ er en funksjon $\mu : \mathcal{V} \to |\mathcal{M}|$ fra mengen av variable til domenet.

Variabeltilordninger

- En modell tolker konstantsymboler, funksjonssymboler, og relasjonssymboler, men...
- ...ikke variabler. Derfor definerer vi...

Definisjon (Variabeltilordning)

La $\mathcal{M}$ være en modell. En variabeltilordning for $\mathcal{M}$ er en funksjon $\mu : \mathcal{V} \rightarrow |\mathcal{M}|$ fra mengen av variable til domenet.

- En variabeltilordning er alltid gitt relativ til en modell $\mathcal{M}$ siden den tolker variable som elementer i domenet til $\mathcal{M}$.

Variabeltilordninger

- En modell tolker konstantsymboler, funksjonssymboler, og relasjonssymboler, men. . .
- . . . ikke variabler. Derfor definerer vi. . .

Definisjon (Variabeltilordning)

La $\mathcal{M}$ være en modell. En variabeltilordning for $\mathcal{M}$ er en funksjon $\mu : \mathcal{V} \to |\mathcal{M}|$ fra mengen av variable til domenet.

- En variabeltilordning er alltid gitt relativ til en modell $\mathcal{M}$ siden den tolker variable som elementer i domenet til $\mathcal{M}$.
- For en gitt modell kan vi ha mange variabeltilordninger.

Variabeltilordninger

- En modell tolker konstantsymboler, funksjonssymboler, og relasjonssymboler, men...
- ...ikke variabler. Derfor definerer vi...

Definisjon (Variabeltilordning)

La $\mathcal{M}$ være en modell. En variabeltilordning for $\mathcal{M}$ er en funksjon $\mu : \mathcal{V} \to |\mathcal{M}|$ fra mengen av variable til domenet.

- En variabeltilordning er alltid gitt relativ til en modell $\mathcal{M}$ siden den tolker variable som elementer i domenet til $\mathcal{M}$.
- For en gitt modell kan vi ha mange variabeltilordninger.
- Hvis $|\mathcal{M}| = \{1, 2, 3\}$, så kan vi ha

Variabeltilordninger

- En modell tolker konstantsymboler, funksjonssymboler, og relasjonssymboler, men. . .
- . . . ikke variabler. Derfor definerer vi. . .

Definisjon (Variabeltilordning)

La $\mathcal{M}$ være en modell. En variabeltilordning for $\mathcal{M}$ er en funksjon $\mu : \mathcal{V} \rightarrow |\mathcal{M}|$ fra mengen av variable til domenet.

- En variabeltilordning er alltid gitt relativ til en modell $\mathcal{M}$ siden den tolker variable som elementer i domenet til $\mathcal{M}$.
- For en gitt modell kan vi ha mange variabeltilordninger.
- Hvis $|\mathcal{M}| = \{1, 2, 3\}$, så kan vi ha
  - μ_1 slik at $\mu_1(x_1) = 1$, $\mu_1(x_2) = 1$, $\mu_1(x_3) = 1$, . . .

Variabeltilordninger

- En modell tolker konstantsymboler, funksjonssymboler, og relasjonssymboler, men. . .
- . . . ikke variabler. Derfor definerer vi. . .

Definisjon (Variabeltilordning)

La $\mathcal{M}$ være en modell. En variabeltilordning for $\mathcal{M}$ er en funksjon $\mu : \mathcal{V} \to |\mathcal{M}|$ fra mengen av variable til domenet.

- En variabeltilordning er alltid gitt relativ til en modell $\mathcal{M}$ siden den tolker variable som elementer i domenet til $\mathcal{M}$.
- For en gitt modell kan vi ha mange variabeltilordninger.
- Hvis $|\mathcal{M}| = \{1, 2, 3\}$, så kan vi ha
  - μ_1 slik at $\mu_1(x_1) = 1$, $\mu_1(x_2) = 1$, $\mu_1(x_3) = 1$, . . .
  - μ_2 slik at $\mu_2(x_1) = 2$, $\mu_2(x_2) = 2$, $\mu_2(x_3) = 2$, . . .

Variabeltilordninger

- En modell tolker konstantsymboler, funksjonssymboler, og relasjonssymboler, men...
- ...ikke variabler. Derfor definerer vi...

Definisjon (Variabeltilordning)

La $\mathcal{M}$ være en modell. En variabeltilordning for $\mathcal{M}$ er en funksjon $\mu : \mathcal{V} \to |\mathcal{M}|$ fra mengen av variable til domenet.

- En variabeltilordning er alltid gitt relativ til en modell $\mathcal{M}$ siden den tolker variable som elementer i domenet til $\mathcal{M}$.
- For en gitt modell kan vi ha mange variabeltilordninger.
- Hvis $|\mathcal{M}| = \{1, 2, 3\}$, så kan vi ha
  - μ_1 slik at $\mu_1(x_1) = 1$, $\mu_1(x_2) = 1$, $\mu_1(x_3) = 1$, ...
  - μ_2 slik at $\mu_2(x_1) = 2$, $\mu_2(x_2) = 2$, $\mu_2(x_3) = 2$, ...
  - μ_3 slik at $\mu_3(x_1) = 1$, $\mu_3(x_2) = 2$, $\mu_3(x_3) = 3$, ...

Variabeltilordninger

- En modell tolker konstantsymboler, funksjonssymboler, og relasjonssymboler, men...
- ...ikke variabler. Derfor definerer vi...

Definisjon (Variabeltilordning)

La $\mathcal{M}$ være en modell. En variabeltilordning for $\mathcal{M}$ er en funksjon $\mu : \mathcal{V} \to |\mathcal{M}|$ fra mengen av variable til domenet.

- En variabeltilordning er alltid gitt relativ til en modell $\mathcal{M}$ siden den tolker variable som elementer i domenet til $\mathcal{M}$.
- For en gitt modell kan vi ha mange variabeltilordninger.
- Hvis $|\mathcal{M}| = \{1, 2, 3\}$, så kan vi ha
  - μ_1 slik at $\mu_1(x_1) = 1$, $\mu_1(x_2) = 1$, $\mu_1(x_3) = 1$, ...
  - μ_2 slik at $\mu_2(x_1) = 2$, $\mu_2(x_2) = 2$, $\mu_2(x_3) = 2$, ...
  - μ_3 slik at $\mu_3(x_1) = 1$, $\mu_3(x_2) = 2$, $\mu_3(x_3) = 3$, ...
  - ...

Modifikasjon av variabeltilordninger

Definisjon

La μ være en variabeltilordning for en modell $\mathcal{M}$, $x \in \mathcal{V}$ en variabel, og $a \in |\mathcal{M}|$ et element av domenet. Vi definerer modisikasjonen av μ på x till a, skrevet $\mu\{x \mapsto a\}$, gjennom:

$$\mu\{x \mapsto a\}(y) := \begin{cases} a & \text{hvis } x{=}y \\ \mu(y) & \text{ellers} \end{cases}$$

for alle variabler $y \in \mathcal{V}$.

Modifikasjon av variabeltilordninger

Definisjon

La μ være en variabeltilordning for en modell $\mathcal{M}$, $x \in \mathcal{V}$ en variabel, og $a \in |\mathcal{M}|$ et element av domenet. Vi definerer modisikasjonen av μ på x till a, skrevet $\mu\{x \mapsto a\}$, gjennom:

$$\mu\{x \mapsto a\}(y) := \begin{cases} a & \textit{hvis } x{=}y \\ \mu(y) & \textit{ellers} \end{cases}$$

for alle variabler $y \in \mathcal{V}$.

La μ være slik at $\mu(x_1) = 1$, $\mu(x_2) = 1$, $\mu(x_3) = 1$, ...

Modifikasjon av variabeltilordninger

Definisjon

La μ være en variabeltilordning for en modell $\mathcal{M}$, $x \in \mathcal{V}$ en variabel, og $a \in |\mathcal{M}|$ et element av domenet. Vi definerer modisikasjonen av μ på x till a, skrevet $\mu\{x \mapsto a\}$, gjennom:

$$\mu\{x \mapsto a\}(y) := \begin{cases} a & \text{hvis } x = y \\ \mu(y) & \text{ellers} \end{cases}$$

for alle variabler $y \in \mathcal{V}$.

La μ være slik at $\mu(x_1) = 1$, $\mu(x_2) = 1$, $\mu(x_3) = 1$, ...

Hvis $\mu' = \mu\{x_2 \mapsto 2\}$,

Modifikasjon av variabeltilordninger

Definisjon

La μ være en variabeltilordning for en modell $\mathcal{M}$, $x \in \mathcal{V}$ en variabel, og $a \in |\mathcal{M}|$ et element av domenet. Vi definerer modisikasjonen av μ på x till a, skrevet $\mu\{x \mapsto a\}$, gjennom:

$$\mu\{x \mapsto a\}(y) := \begin{cases} a & \textit{hvis } x{=}y \\ \mu(y) & \textit{ellers} \end{cases}$$

for alle variabler $y \in \mathcal{V}$.

La μ være slik at $\mu(x_1) = 1$, $\mu(x_2) = 1$, $\mu(x_3) = 1$, ...

Hvis $\mu' = \mu\{x_2 \mapsto 2\}$, so er $\mu'(x_1) =$

Modifikasjon av variabeltilordninger

Definisjon

La μ være en variabeltilordning for en modell $\mathcal{M}$, $x \in \mathcal{V}$ en variabel, og $a \in |\mathcal{M}|$ et element av domenet. Vi definerer modisikasjonen av μ på x till a, skrevet $\mu\{x \mapsto a\}$, gjennom:

$$\mu\{x \mapsto a\}(y) := \begin{cases} a & \text{hvis } x{=}y \\ \mu(y) & \text{ellers} \end{cases}$$

for alle variabler $y \in \mathcal{V}$.

La μ være slik at $\mu(x_1) = 1$, $\mu(x_2) = 1$, $\mu(x_3) = 1$, ...

Hvis $\mu' = \mu\{x_2 \mapsto 2\}$, so er $\mu'(x_1) = 1$,

Modifikasjon av variabeltilordninger

Definisjon

La μ være en variabeltilordning for en modell $\mathcal{M}$, $x \in \mathcal{V}$ en variabel, og $a \in |\mathcal{M}|$ et element av domenet. Vi definerer modisikasjonen av μ på x till a, skrevet $\mu\{x \mapsto a\}$, gjennom:

$$\mu\{x \mapsto a\}(y) := \begin{cases} a & \text{hvis } x{=}y \\ \mu(y) & \text{ellers} \end{cases}$$

for alle variabler $y \in \mathcal{V}$.

La μ være slik at $\mu(x_1) = 1$, $\mu(x_2) = 1$, $\mu(x_3) = 1$, ...

Hvis $\mu' = \mu\{x_2 \mapsto 2\}$, so er $\mu'(x_1) = 1$, $\mu'(x_2) =$

Modifikasjon av variabeltilordninger

Definisjon

La μ være en variabeltilordning for en modell $\mathcal{M}$, $x \in \mathcal{V}$ en variabel, og $a \in |\mathcal{M}|$ et element av domenet. Vi definerer modisikasjonen av μ på x till a, skrevet $\mu\{x \mapsto a\}$, gjennom:

$$\mu\{x \mapsto a\}(y) := \begin{cases} a & \text{hvis } x{=}y \\ \mu(y) & \text{ellers} \end{cases}$$

for alle variabler $y \in \mathcal{V}$.

La μ være slik at $\mu(x_1) = 1$, $\mu(x_2) = 1$, $\mu(x_3) = 1$, ...

Hvis $\mu' = \mu\{x_2 \mapsto 2\}$, so er $\mu'(x_1) = 1$, $\mu'(x_2) = 2$,

Modifikasjon av variabeltilordninger

Definisjon

La μ være en variabeltilordning for en modell $\mathcal{M}$, $x \in \mathcal{V}$ en variabel, og $a \in |\mathcal{M}|$ et element av domenet. Vi definerer modisikasjonen av μ på x till a, skrevet $\mu\{x \mapsto a\}$, gjennom:

$$\mu\{x \mapsto a\}(y) := \begin{cases} a & \text{hvis } x{=}y \\ \mu(y) & \text{ellers} \end{cases}$$

for alle variabler $y \in \mathcal{V}$.

La μ være slik at $\mu(x_1) = 1$, $\mu(x_2) = 1$, $\mu(x_3) = 1, \ldots$

Hvis $\mu' = \mu\{x_2 \mapsto 2\}$, so er $\mu'(x_1) = 1$, $\mu'(x_2) = 2$, $\mu'(x_3) =$

Modifikasjon av variabeltilordninger

Definisjon

La μ være en variabeltilordning for en modell $\mathcal{M}$, $x \in \mathcal{V}$ en variabel, og $a \in |\mathcal{M}|$ et element av domenet. Vi definerer modisikasjonen av μ på x till a, skrevet $\mu\{x \mapsto a\}$, gjennom:

$$\mu\{x \mapsto a\}(y) := \begin{cases} a & \text{hvis } x{=}y \\ \mu(y) & \text{ellers} \end{cases}$$

for alle variabler $y \in \mathcal{V}$.

La μ være slik at $\mu(x_1) = 1$, $\mu(x_2) = 1$, $\mu(x_3) = 1$, ...

Hvis $\mu' = \mu\{x_2 \mapsto 2\}$, so er $\mu'(x_1) = 1$, $\mu'(x_2) = 2$, $\mu'(x_3) = 1$, ...

Tolkning av termer

Tolkning av termer

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler

Tolkning av termer

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler
- Tolkningen av variable overlates til variabeltilordningen.

Tolkning av termer

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler
- Tolkningen av variable overlates til variabeltilordningen.

Definisjon (Tolkning av termer)

Tolkning av termer

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler
- Tolkningen av variable overlates til variabeltilordningen.

Definisjon (Tolkning av termer)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$.

Tolkning av termer

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler
- Tolkningen av variable overlates til variabeltilordningen.

Definisjon (Tolkning av termer)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$.

Tolkning av termer

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler
- Tolkningen av variable overlates til variabeltilordningen.

Definisjon (Tolkning av termer)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Tolkningen av en term t i $\mathcal{M}$ under μ, skrevet $t^{\mathcal{M},\mu}$, defineres induktivt.

Tolkning av termer

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler
- Tolkningen av variable overlates til variabeltilordningen.

Definisjon (Tolkning av termer)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Tolkningen av en term t i $\mathcal{M}$ under μ, skrevet $t^{\mathcal{M},\mu}$, defineres induktivt.

- $x^{\mathcal{M},\mu} =$ *for en variabel x*

Tolkning av termer

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler
- Tolkningen av variable overlates til variabeltilordningen.

Definisjon (Tolkning av termer)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Tolkningen av en term t i $\mathcal{M}$ under μ, skrevet $t^{\mathcal{M},\mu}$, defineres induktivt.

- $x^{\mathcal{M},\mu} = \mu(x)$ *for en variabel x*

Tolkning av termer

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler
- Tolkningen av variable overlates til variabeltilordningen.

Definisjon (Tolkning av termer)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Tolkningen av en term t i $\mathcal{M}$ under μ, skrevet $t^{\mathcal{M},\mu}$, defineres induktivt.

- $x^{\mathcal{M},\mu} = \mu(x)$ *for en variabel x*
- $c^{\mathcal{M},\mu} =$ *for et konstantsymbol c*

Tolkning av termer

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler
- Tolkningen av variable overlates til variabeltilordningen.

Definisjon (Tolkning av termer)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Tolkningen av en term t i $\mathcal{M}$ under μ, skrevet $t^{\mathcal{M},\mu}$, defineres induktivt.

- $x^{\mathcal{M},\mu} = \mu(x)$ *for en variabel* x
- $c^{\mathcal{M},\mu} = c^{\mathcal{M}}$ *for et konstantsymbol* c

Tolkning av termer

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler
- Tolkningen av variable overlates til variabeltilordningen.

Definisjon (Tolkning av termer)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Tolkningen av en term t i $\mathcal{M}$ under μ, skrevet $t^{\mathcal{M},\mu}$, defineres induktivt.

- $x^{\mathcal{M},\mu} = \mu(x)$ *for en variabel* x
- $c^{\mathcal{M},\mu} = c^{\mathcal{M}}$ *for et konstantsymbol* c
- $f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{M},\mu} =$ *for en funksjonsterm*

Tolkning av termer

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler
- Tolkningen av variable overlates til variabeltilordningen.

Definisjon (Tolkning av termer)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Tolkningen av en term t i $\mathcal{M}$ under μ, skrevet $t^{\mathcal{M},\mu}$, defineres induktivt.

- $x^{\mathcal{M},\mu} = \mu(x)$ *for en variabel* x
- $c^{\mathcal{M},\mu} = c^{\mathcal{M}}$ *for et konstantsymbol* c
- $f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{M},\mu} = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu})$ *for en funksjonsterm*

Tolkning av formler

Definisjon (Tolkning av formler)

Tolkning av formler

Definisjon (Tolkning av formler)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$.

Tolkning av formler

Definisjon (Tolkning av formler)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$.

Tolkning av formler

Definisjon (Tolkning av formler)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Vi definerer ved induksjon hva det vil si at en formel φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ;

Tolkning av formler

Definisjon (Tolkning av formler)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Vi definerer ved induksjon hva det vil si at en formel φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ; vi skriver $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ.

Tolkning av formler

Definisjon (Tolkning av formler)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Vi definerer ved induksjon hva det vil si at en formel φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ; vi skriver $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ.

- *Atomære fml:* $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \ldots, t_n)$ *hvis* $\langle t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.

Tolkning av formler

Definisjon (Tolkning av formler)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Vi definerer ved induksjon hva det vil si at en formel φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ; vi skriver $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ.

- *Atomære fml: $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.*
- *$\mathcal{M}, \mu \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$.*

Tolkning av formler

Definisjon (Tolkning av formler)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Vi definerer ved induksjon hva det vil si at en formel φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ; vi skriver $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ.

- *Atomære fml: $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.*
- *$\mathcal{M}, \mu \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$.*
- *$\mathcal{M}, \mu \models \varphi \wedge \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.*

Tolkning av formler

Definisjon (Tolkning av formler)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Vi definerer ved induksjon hva det vil si at en formel φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ; vi skriver $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ.

- *Atomære fml: $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.*
- *$\mathcal{M}, \mu \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$.*
- *$\mathcal{M}, \mu \models \varphi \land \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.*
- *$\mathcal{M}, \mu \models \varphi \lor \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ eller $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.*

Tolkning av formler

Definisjon (Tolkning av formler)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Vi definerer ved induksjon hva det vil si at en formel φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ; vi skriver $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ.

- *Atomære fml:* $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \ldots, t_n)$ *hvis* $\langle t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \neg\varphi$ *hvis det ikke er tilfelle at* $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \land \psi$ *hvis* $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ *og* $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \lor \psi$ *hvis* $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ *eller* $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \to \psi$ *hvis* $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ *impliserer* $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.

Tolkning av formler

Definisjon (Tolkning av formler)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Vi definerer ved induksjon hva det vil si at en formel φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ; vi skriver $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ.

- *Atomære fml:* $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \ldots, t_n)$ *hvis* $\langle t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \neg\varphi$ *hvis det ikke er tilfelle at* $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \wedge \psi$ *hvis* $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ *og* $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \vee \psi$ *hvis* $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ *eller* $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \rightarrow \psi$ *hvis* $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ *impliserer* $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \forall x \varphi$ *hvis* $\mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\} \models \varphi$ *for alle* a *i* $|\mathcal{M}|$.

Tolkning av formler

Definisjon (Tolkning av formler)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Vi definerer ved induksjon hva det vil si at en formel φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ; vi skriver $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ.

- *Atomære fml:* $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \ldots, t_n)$ *hvis* $\langle t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \neg\varphi$ *hvis det ikke er tilfelle at* $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \wedge \psi$ *hvis* $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ *og* $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \vee \psi$ *hvis* $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ *eller* $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \rightarrow \psi$ *hvis* $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ *impliserer* $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \forall x\varphi$ *hvis* $\mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\} \models \varphi$ *for alle* a *i* $|\mathcal{M}|$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \exists x\varphi$ *hvis* $\mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\} \models \varphi$ *for minst en* a *i* $|\mathcal{M}|$.

Koinsidenslemma

- $t^{\mathcal{M},\mu}$ er uavhengig av μ for variabler som ikke forekommer i t.

Koinsidenslemma

- $t^{\mathcal{M},\mu}$ er uavhengig av μ for variabler som ikke forekommer i t.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ er uavhengig av μ for variabler som ikke forekommer *fritt* i φ.

Koinsidenslemma

- $t^{\mathcal{M},\mu}$ er uavhengig av μ for variabler som ikke forekommer i t.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ er uavhengig av μ for variabler som ikke forekommer *fritt* i φ.

Lemma (Koinsidenslemma)

La t være en term, $\mathcal{M}$ en modell, og μ og ν to variabeltilordninger med $\mu(x) = \nu(x)$ for alle $x \in \mathrm{FV}(t)$. Da er $t^{\mathcal{M},\mu} = t^{\mathcal{M},\nu}$.

Koinsidenslemma

- $t^{\mathcal{M},\mu}$ er uavhengig av μ for variabler som ikke forekommer i t.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ er uavhengig av μ for variabler som ikke forekommer *fritt* i φ.

Lemma (Koinsidenslemma)

La t være en term, $\mathcal{M}$ en modell, og μ og ν to variabeltilordninger med $\mu(x) = \nu(x)$ for alle $x \in \mathrm{FV}(t)$. Da er $t^{\mathcal{M},\mu} = t^{\mathcal{M},\nu}$.
La φ være en formel, $\mathcal{M}$ en modell, og μ og ν to variabeltilordninger med $\mu(x) = \nu(x)$ for alle $x \in \mathrm{FV}(\varphi)$. Da gjelder $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ hviss $\mathcal{M}, \nu \models \varphi$.

Koinsidenslemma

- $t^{\mathcal{M},\mu}$ er uavhengig av μ for variabler som ikke forekommer i t.
- $\mathcal{M},\mu \models \varphi$ er uavhengig av μ for variabler som ikke forekommer *fritt* i φ.

Lemma (Koinsidenslemma)

La t være en term, $\mathcal{M}$ en modell, og μ og ν to variabeltilordninger med $\mu(x) = \nu(x)$ for alle $x \in \mathrm{FV}(t)$. Da er $t^{\mathcal{M},\mu} = t^{\mathcal{M},\nu}$.
La φ være en formel, $\mathcal{M}$ en modell, og μ og ν to variabeltilordninger med $\mu(x) = \nu(x)$ for alle $x \in \mathrm{FV}(\varphi)$. Da gjelder $\mathcal{M},\mu \models \varphi$ hviss $\mathcal{M},\nu \models \varphi$.

For lukkede termer t og formler φ: skriv $t^{\mathcal{M}}$ og $\mathcal{M} \models \varphi$.

Tolkning av termer og formler

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Oppfyllbarhet)

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Oppfyllbarhet)

En lukket formel φ er oppfyllbar hvis det fins en modell $\mathcal{M}$ som gjør φ sann.

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Oppfyllbarhet)

En lukket formel φ er oppfyllbar hvis det fins en modell $\mathcal{M}$ som gjør φ sann. Vi sier også at $\mathcal{M}$ oppfyller φ og at $\mathcal{M}$ er en modell for φ.

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Oppfyllbarhet)

En lukket formel φ *er* *oppfyllbar* *hvis det fins en modell* $\mathcal{M}$ *som gjør* φ *sann. Vi sier også at* $\mathcal{M}$ *oppfyller* φ *og at* $\mathcal{M}$ *er en modell for* φ.

Oppfyllbar

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Oppfyllbarhet)

En lukket formel φ er oppfyllbar hvis det fins en modell $\mathcal{M}$ som gjør φ sann. Vi sier også at $\mathcal{M}$ oppfyller φ og at $\mathcal{M}$ er en modell for φ.

Oppfyllbar

- $\exists x \mathrm{Liten}(x)$

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Oppfyllbarhet)

En lukket formel φ er oppfyllbar hvis det fins en modell $\mathcal{M}$ som gjør φ sann. Vi sier også at $\mathcal{M}$ oppfyller φ og at $\mathcal{M}$ er en modell for φ.

Oppfyllbar

- $\exists x \mathrm{Liten}(x)$
- $\exists x(\mathrm{Liten}(x) \land \mathrm{Stor}(x))$

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Oppfyllbarhet)

En lukket formel φ er oppfyllbar hvis det fins en modell $\mathcal{M}$ som gjør φ sann. Vi sier også at $\mathcal{M}$ oppfyller φ og at $\mathcal{M}$ er en modell for φ.

Oppfyllbar

- $\exists x \mathrm{Liten}(x)$
- $\exists x (\mathrm{Liten}(x) \land \mathrm{Stor}(x))$
- $\exists x Px \rightarrow \forall x Px$

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Oppfyllbarhet)

En lukket formel φ er oppfyllbar hvis det fins en modell $\mathcal{M}$ som gjør φ sann. Vi sier også at $\mathcal{M}$ oppfyller φ og at $\mathcal{M}$ er en modell for φ.

Oppfyllbar

- $\exists x \mathrm{Liten}(x)$
- $\exists x(\mathrm{Liten}(x) \land \mathrm{Stor}(x))$
- $\exists x Px \rightarrow \forall x Px$

Ikke oppfyllbar

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Oppfyllbarhet)

En lukket formel φ er oppfyllbar hvis det fins en modell $\mathcal{M}$ som gjør φ sann. Vi sier også at $\mathcal{M}$ oppfyller φ og at $\mathcal{M}$ er en modell for φ.

Oppfyllbar

- $\exists x \text{Liten}(x)$
- $\exists x(\text{Liten}(x) \land \text{Stor}(x))$
- $\exists x Px \to \forall x Px$

Ikke oppfyllbar

- $Pa \land \neg Pa$

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Oppfyllbarhet)

En lukket formel φ er oppfyllbar hvis det fins en modell $\mathcal{M}$ som gjør φ sann. Vi sier også at $\mathcal{M}$ oppfyller φ og at $\mathcal{M}$ er en modell for φ.

Oppfyllbar

- $\exists x \mathrm{Liten}(x)$
- $\exists x(\mathrm{Liten}(x) \land \mathrm{Stor}(x))$
- $\exists x Px \rightarrow \forall x Px$

Ikke oppfyllbar

- $Pa \land \neg Pa$
- $\exists x(\mathrm{Liten}(x) \land \neg \mathrm{Liten}(x))$

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Oppfyllbarhet)

En lukket formel φ er oppfyllbar hvis det fins en modell $\mathcal{M}$ som gjør φ sann. Vi sier også at $\mathcal{M}$ oppfyller φ og at $\mathcal{M}$ er en modell for φ.

Oppfyllbar

- $\exists x \mathrm{Liten}(x)$
- $\exists x(\mathrm{Liten}(x) \land \mathrm{Stor}(x))$
- $\exists x Px \rightarrow \forall x Px$

Ikke oppfyllbar

- $Pa \land \neg Pa$
- $\exists x(\mathrm{Liten}(x) \land \neg \mathrm{Liten}(x))$
- $\neg \mathrm{Stor}(a) \land \forall x \mathrm{Stor}(x)$

Tolkning av termer og formler

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Gyldighet)

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Gyldighet)

En lukket formel φ *er* *gyldig* *hvis den er sann i alle modeller* $\mathcal{M}$

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Gyldighet)

En lukket formel φ er gyldig hvis den er sann i alle modeller $\mathcal{M}$, ellers så er den falsifiserbar.

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Gyldighet)

En lukket formel φ er gyldig hvis den er sann i alle modeller $\mathcal{M}$, ellers så er den falsifiserbar.

Gyldig

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Gyldighet)

En lukket formel φ *er* *gyldig* *hvis den er sann i alle modeller* $\mathcal{M}$*, ellers så er den* *falsifiserbar*.

Gyldig

- $\forall x Pxa \rightarrow \forall z Pza$

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Gyldighet)

En lukket formel φ er gyldig hvis den er sann i alle modeller $\mathcal{M}$, ellers så er den falsifiserbar.

Gyldig

- $\forall x Pxa \rightarrow \forall z Pza$
- $(\forall x Px \land \forall y Qy) \rightarrow \forall x Px$

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Gyldighet)

En lukket formel φ er gyldig hvis den er sann i alle modeller $\mathcal{M}$, ellers så er den falsifiserbar.

Gyldig

- $\forall xPxa \rightarrow \forall zPza$
- $(\forall xPx \land \forall yQy) \rightarrow \forall xPx$
- $\exists x\mathrm{Liten}(x) \lor \exists x\neg\mathrm{Liten}(x)$

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Gyldighet)

En lukket formel φ er gyldig hvis den er sann i alle modeller $\mathcal{M}$, ellers så er den falsifiserbar.

Gyldig

- $\forall x P x a \rightarrow \forall z P z a$
- $(\forall x P x \land \forall y Q y) \rightarrow \forall x P x$
- $\exists x \mathrm{Liten}(x) \lor \exists x \neg \mathrm{Liten}(x)$

Ikke gyldig (falsfiserbar)

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Gyldighet)

En lukket formel φ er gyldig hvis den er sann i alle modeller $\mathcal{M}$, ellers så er den falsifiserbar.

Gyldig

- $\forall x Pxa \rightarrow \forall z Pza$
- $(\forall x Px \wedge \forall y Qy) \rightarrow \forall x Px$
- $\exists x \mathrm{Liten}(x) \vee \exists x \neg \mathrm{Liten}(x)$

Ikke gyldig (falsfiserbar)

- $\forall x Px$

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Gyldighet)

En lukket formel φ er gyldig hvis den er sann i alle modeller $\mathcal{M}$, ellers så er den falsifiserbar.

Gyldig

- $\forall x Pxa \rightarrow \forall z Pza$
- $(\forall x Px \wedge \forall y Qy) \rightarrow \forall x Px$
- $\exists x \mathrm{Liten}(x) \vee \exists x \neg \mathrm{Liten}(x)$

Ikke gyldig (falsfiserbar)

- $\forall x Px$
- $\exists x \mathrm{Stor}(x) \rightarrow \forall x \mathrm{Stor}(x)$

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Gyldighet)

En lukket formel φ er gyldig hvis den er sann i alle modeller $\mathcal{M}$, ellers så er den falsifiserbar.

Gyldig

- $\forall x Pxa \rightarrow \forall z Pza$
- $(\forall x Px \land \forall y Qy) \rightarrow \forall x Px$
- $\exists x \mathrm{Liten}(x) \lor \exists x \neg \mathrm{Liten}(x)$

Ikke gyldig (falsfiserbar)

- $\forall x Px$
- $\exists x \mathrm{Stor}(x) \rightarrow \forall x \mathrm{Stor}(x)$
- $\exists x Px \rightarrow \exists x (Px \land Qx)$

Oppsummering

Oppsummering

En modell $\mathcal{M}$ for et språk $\mathcal{L}$ består av

Oppsummering

En modell $\mathcal{M}$ for et språk $\mathcal{L}$ består av

1. en ikke-tom mengde $|\mathcal{M}|$, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og

Oppsummering

En modell $\mathcal{M}$ for et språk $\mathcal{L}$ består av

1. en ikke-tom mengde $|\mathcal{M}|$, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler i språket.

Oppsummering

En modell $\mathcal{M}$ for et språk $\mathcal{L}$ består av

1. en ikke-tom mengde $|\mathcal{M}|$, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler i språket.

For eksempel, hvis $\mathcal{L}$ er språket ⟨ 🚺 , 🚹 , ☕ ; 🏭 ; ♀ , ♂ ⟩, så må en modell $\mathcal{M}$ gi et domene og en tolkning til alle symbolene.

Oppsummering

En modell $\mathcal{M}$ for et språk $\mathcal{L}$ består av

1. en ikke-tom mengde $|\mathcal{M}|$, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler i språket.

For eksempel, hvis $\mathcal{L}$ er språket $\langle$ 🚺 , 🚹 , ☕ ; 🏭 ; ♀ , ♂ $\rangle$, så må en modell $\mathcal{M}$ gi et domene og en tolkning til alle symbolene.

- 🚺$^{\mathcal{M}}$, 🚹$^{\mathcal{M}}$ og ☕$^{\mathcal{M}}$ må være elementer i domenet.

Oppsummering

En modell $\mathcal{M}$ for et språk $\mathcal{L}$ består av

1. en ikke-tom mengde $|\mathcal{M}|$, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler i språket.

For eksempel, hvis $\mathcal{L}$ er språket $\langle$ 🚺 , 🚹 , ☕ ; 🏭 ; ♀ , ♂ $\rangle$, så må en modell $\mathcal{M}$ gi et domene og en tolkning til alle symbolene.

- 🚺$^{\mathcal{M}}$, 🚹$^{\mathcal{M}}$ og ☕$^{\mathcal{M}}$ må være elementer i domenet.
- 🏭$^{\mathcal{M}}$ må være en funksjon på domenet

Oppsummering

En modell $\mathcal{M}$ for et språk $\mathcal{L}$ består av

1. en ikke-tom mengde $|\mathcal{M}|$, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler i språket.

For eksempel, hvis $\mathcal{L}$ er språket ⟨ 🚺 , 🚹 , ☕ ; 👑 ; ♀ , ♂ ⟩, så må en modell $\mathcal{M}$ gi et domene og en tolkning til alle symbolene.

- 🚺$^{\mathcal{M}}$, 🚹$^{\mathcal{M}}$ og ☕$^{\mathcal{M}}$ må være elementer i domenet.
- 👑$^{\mathcal{M}}$ må være en funksjon på domenet
- ♀$^{\mathcal{M}}$ og ♂$^{\mathcal{M}}$ må være relasjoner på domenet.

Oppsummering

En modell $\mathcal{M}$ for et språk $\mathcal{L}$ består av

1. en ikke-tom mengde $|\mathcal{M}|$, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler i språket.

For eksempel, hvis $\mathcal{L}$ er språket $\langle$ 🚺 , 🚹 , ☕ ; 🏭 ; ♀ , ♂ $\rangle$, så må en modell $\mathcal{M}$ gi et domene og en tolkning til alle symbolene.

- 🚺$^{\mathcal{M}}$, 🚹$^{\mathcal{M}}$ og ☕$^{\mathcal{M}}$ må være elementer i domenet.
- 🏭$^{\mathcal{M}}$ må være en funksjon på domenet
- ♀$^{\mathcal{M}}$ og ♂$^{\mathcal{M}}$ må være relasjoner på domenet.
- Husk på ariteten til symbolene. (🏭 har aritet 2; ♀ og ♂ har aritet 1.)

Oppsummering

Oppsummering

Hvis $\mathcal{M}$ er en modell og φ er en lukket formel, så definerte vi $\mathcal{M} \models \varphi$.

Oppsummering

Hvis $\mathcal{M}$ er en modell og φ er en lukket formel, så definerte vi $\mathcal{M} \models \varphi$.

- For atomære formler: $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.

Oppsummering

Hvis $\mathcal{M}$ er en modell og φ er en lukket formel, så definerte vi $\mathcal{M} \models \varphi$.

- For atomære formler: $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$.

Oppsummering

Hvis $\mathcal{M}$ er en modell og φ er en lukket formel, så definerte vi $\mathcal{M} \models \varphi$.

- For atomære formler: $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \wedge \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.

Oppsummering

Hvis $\mathcal{M}$ er en modell og φ er en lukket formel, så definerte vi $\mathcal{M} \models \varphi$.

- For atomære formler: $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \land \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \lor \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ eller $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.

Oppsummering

Hvis $\mathcal{M}$ er en modell og φ er en lukket formel, så definerte vi $\mathcal{M} \models \varphi$.

- For atomære formler: $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \land \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \lor \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ eller $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \rightarrow \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ impliserer $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.

Oppsummering

Hvis $\mathcal{M}$ er en modell og φ er en lukket formel, så definerte vi $\mathcal{M} \models \varphi$.

- For atomære formler: $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \land \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \lor \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ eller $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \to \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ impliserer $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \forall x\varphi$ hvis $\mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\} \models \varphi$ for alle $a \in |\mathcal{M}|$.

Oppsummering

Hvis $\mathcal{M}$ er en modell og φ er en lukket formel, så definerte vi $\mathcal{M} \models \varphi$.

- For atomære formler: $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \land \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \lor \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ eller $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \to \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ impliserer $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \forall x\varphi$ hvis $\mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\} \models \varphi$ for alle $a \in |\mathcal{M}|$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \exists x\varphi$ hvis $\mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\} \models \varphi$ for minst en $a \in |\mathcal{M}|$.

Språk og modeller – et komplekst forhold

Språk og modeller – et komplekst forhold

- Ved førsteordens språk har vi fått betydelig større uttrykkskraft.

Språk og modeller – et komplekst forhold

- Ved førsteordens språk har vi fått betydelig større uttrykkskraft.
- Modeller kan være rike på struktur.

Språk og modeller – et komplekst forhold

- Ved førsteordens språk har vi fått betydelig større uttrykkskraft.
- Modeller kan være rike på struktur.
- Det er et ikke-trivielt forhold mellom språk og modeller.

Språk og modeller – et komplekst forhold

- Ved førsteordens språk har vi fått betydelig større uttrykkskraft.
- Modeller kan være rike på struktur.
- Det er et ikke-trivielt forhold mellom språk og modeller.
- Noe av det vi er interessert i:

Språk og modeller – et komplekst forhold

- Ved førsteordens språk har vi fått betydelig større uttrykkskraft.
- Modeller kan være rike på struktur.
- Det er et ikke-trivielt forhold mellom språk og modeller.
- Noe av det vi er interessert i:
  - Sjekke om en formel er sann i en modell. (Modellsjekking)

Språk og modeller – et komplekst forhold

- Ved førsteordens språk har vi fått betydelig større uttrykkskraft.
- Modeller kan være rike på struktur.
- Det er et ikke-trivielt forhold mellom språk og modeller.
- Noe av det vi er interessert i:
  - Sjekke om en formel er sann i en modell. (Modellsjekking)
  - Sjekke om en formel er oppfyllbar eller falsifiserbar.

Språk og modeller – et komplekst forhold

- Ved førsteordens språk har vi fått betydelig større uttrykkskraft.
- Modeller kan være rike på struktur.
- Det er et ikke-trivielt forhold mellom språk og modeller.
- Noe av det vi er interessert i:
  - Sjekke om en formel er sann i en modell. (Modellsjekking)
  - Sjekke om en formel er oppfyllbar eller falsifiserbar.
  - Sjekke om en formel er gyldig.

Språk og modeller – et komplekst forhold

- Ved førsteordens språk har vi fått betydelig større uttrykkskraft.
- Modeller kan være rike på struktur.
- Det er et ikke-trivielt forhold mellom språk og modeller.
- Noe av det vi er interessert i:
  - Sjekke om en formel er sann i en modell. (Modellsjekking)
  - Sjekke om en formel er oppfyllbar eller falsifiserbar.
  - Sjekke om en formel er gyldig.
  - Sjekke om formler er uavhengige av hverandre.

Språk og modeller – et komplekst forhold

- Ved førsteordens språk har vi fått betydelig større uttrykkskraft.
- Modeller kan være rike på struktur.
- Det er et ikke-trivielt forhold mellom språk og modeller.
- Noe av det vi er interessert i:
  - Sjekke om en formel er sann i en modell. (Modellsjekking)
  - Sjekke om en formel er oppfyllbar eller falsifiserbar.
  - Sjekke om en formel er gyldig.
  - Sjekke om formler er uavhengige av hverandre.
  - Bruke språket til å beskrive modeller, forsøke å "fange inn" og beskrive virkeligheten.

En utvidelse av figurspråket

En utvidelse av figurspråket

Atomær formel	Intendert tolkning

En utvidelse av figurspråket

Atomær formel	Intendert tolkning
Sirkel(x)	x er en sirkel

En utvidelse av figurspråket

Atomær formel	Intendert tolkning
Sirkel(x)	x er en sirkel
Firkant(x)	x er en firkant

En utvidelse av figurspråket

Atomær formel	Intendert tolkning
Sirkel(x)	x er en sirkel
Firkant(x)	x er en firkant
Trekant(x)	x er en trekant

En utvidelse av figurspråket

Atomær formel	Intendert tolkning
Sirkel(x)	x er en sirkel
Firkant(x)	x er en firkant
Trekant(x)	x er en trekant
Stor(x)	x er stor

En utvidelse av figurspråket

Atomær formel	Intendert tolkning
Sirkel(x)	x er en sirkel
Firkant(x)	x er en firkant
Trekant(x)	x er en trekant
Stor(x)	x er stor
Liten(x)	x er liten

En utvidelse av figurspråket

Atomær formel	Intendert tolkning
Sirkel(x)	x er en sirkel
Firkant(x)	x er en firkant
Trekant(x)	x er en trekant
Stor(x)	x er stor
Liten(x)	x er liten
Mindre(x, y)	x er mindre enn y

En utvidelse av figurspråket

Atomær formel	Intendert tolkning
Sirkel(x)	x er en sirkel
Firkant(x)	x er en firkant
Trekant(x)	x er en trekant
Stor(x)	x er stor
Liten(x)	x er liten
Mindre(x, y)	x er mindre enn y
Over(x, y)	x er nærmere toppen enn y

En utvidelse av figurspråket

Atomær formel	Intendert tolkning
Sirkel(x)	x er en sirkel
Firkant(x)	x er en firkant
Trekant(x)	x er en trekant
Stor(x)	x er stor
Liten(x)	x er liten
Mindre(x, y)	x er mindre enn y
Over(x, y)	x er nærmere toppen enn y
Under(x, y)	x er nærmere bunnen enn y

En utvidelse av figurspråket

Atomær formel	Intendert tolkning
Sirkel(x)	x er en sirkel
Firkant(x)	x er en firkant
Trekant(x)	x er en trekant
Stor(x)	x er stor
Liten(x)	x er liten
Mindre(x, y)	x er mindre enn y
Over(x, y)	x er nærmere toppen enn y
Under(x, y)	x er nærmere bunnen enn y
VenstreFor(x, y)	x er lenger til venstre enn y

En utvidelse av figurspråket

Atomær formel	Intendert tolkning
Sirkel(x)	x er en sirkel
Firkant(x)	x er en firkant
Trekant(x)	x er en trekant
Stor(x)	x er stor
Liten(x)	x er liten
Mindre(x, y)	x er mindre enn y
Over(x, y)	x er nærmere toppen enn y
Under(x, y)	x er nærmere bunnen enn y
VenstreFor(x, y)	x er lenger til venstre enn y
HoyreFor(x, y)	x er lenger til høyre enn y

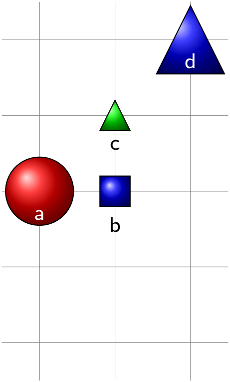
En utvidelse av figurspråket

Atomær formel	Intendert tolkning
Sirkel(x)	x er en sirkel
Firkant(x)	x er en firkant
Trekant(x)	x er en trekant
Stor(x)	x er stor
Liten(x)	x er liten
Mindre(x, y)	x er mindre enn y
Over(x, y)	x er nærmere toppen enn y
Under(x, y)	x er nærmere bunnen enn y
VenstreFor(x, y)	x er lenger til venstre enn y
HoyreFor(x, y)	x er lenger til høyre enn y
Inntil(x, y)	x er rett ved siden av, rett over eller rett under y

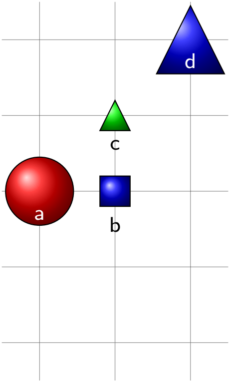
En utvidelse av figurspråket

Atomær formel	Intendert tolkning
Sirkel(x)	x er en sirkel
Firkant(x)	x er en firkant
Trekant(x)	x er en trekant
Stor(x)	x er stor
Liten(x)	x er liten
Mindre(x, y)	x er mindre enn y
Over(x, y)	x er nærmere toppen enn y
Under(x, y)	x er nærmere bunnen enn y
VenstreFor(x, y)	x er lenger til venstre enn y
HoyreFor(x, y)	x er lenger til høyre enn y
Inntil(x, y)	x er rett ved siden av, rett over eller rett under y
Mellom(x, y, z)	x, y og z er i samme kolonne, rad eller diagonal, og x er mellom y og z

En utvidelse av figurspråket

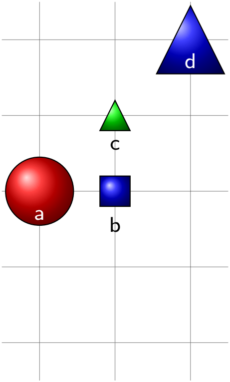


En utvidelse av figurspråket



Forklarende eksempler til semantikken:

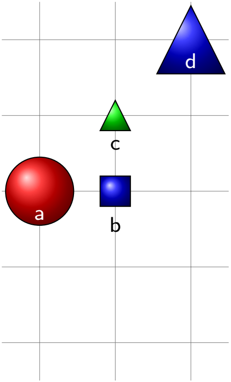
En utvidelse av figurspråket



Forklarende eksempler til semantikken:

- $a^{\mathcal{M}} =$ , $b^{\mathcal{M}} =$ , $c^{\mathcal{M}} =$ , $d^{\mathcal{M}} =$ 
  (vi antar at dette er alle konstantene)

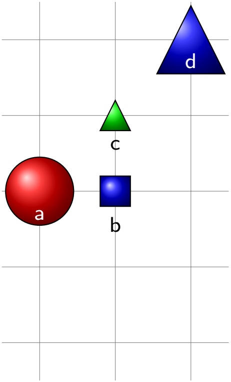
En utvidelse av figurspråket



Forklarende eksempler til semantikken:

- $a^{\mathcal{M}} =$ , $b^{\mathcal{M}} =$ , $c^{\mathcal{M}} =$ , $d^{\mathcal{M}} =$  (vi antar at dette er alle konstantene)
- $\text{Trekant}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$

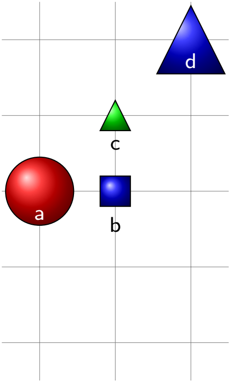
En utvidelse av figurspråket



Forklarende eksempler til semantikken:

- $a^{\mathcal{M}} =$, $b^{\mathcal{M}} =$, $c^{\mathcal{M}} =$, $d^{\mathcal{M}} =$ (vi antar at dette er alle konstantene)
- $\text{Trekant}^{\mathcal{M}} = \{ \; , \; \}$
- $\text{Stor}^{\mathcal{M}} = \{ \; , \; \}$

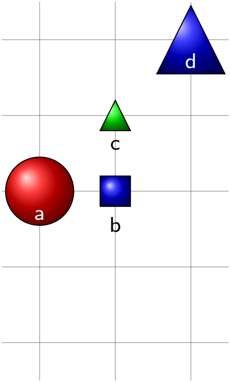
En utvidelse av figurspråket



Forklarende eksempler til semantikken:

- $a^{\mathcal{M}} =$ , $b^{\mathcal{M}} =$ , $c^{\mathcal{M}} =$ , $d^{\mathcal{M}} =$ 
  (vi antar at dette er alle konstantene)
- $\text{Trekant}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\text{Stor}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\text{Liten}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$

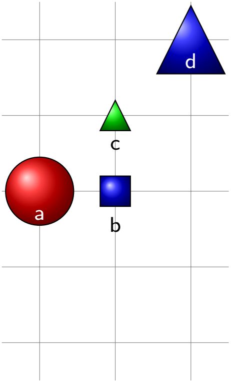
En utvidelse av figurspråket



Forklarende eksempler til semantikken:

- $a^{\mathcal{M}} =$ , $b^{\mathcal{M}} =$ , $c^{\mathcal{M}} =$ , $d^{\mathcal{M}} =$  (vi antar at dette er alle konstantene)
- $\text{Trekant}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\text{Stor}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\text{Liten}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\mathcal{M} \models \text{Under}(a, c)$

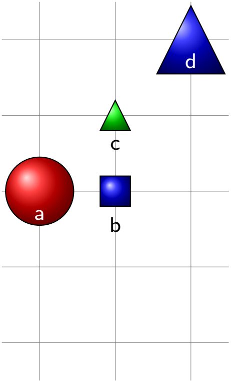
En utvidelse av figurspråket



Forklarende eksempler til semantikken:

- $a^{\mathcal{M}} =$ , $b^{\mathcal{M}} =$ , $c^{\mathcal{M}} =$ , $d^{\mathcal{M}} =$ 
  (vi antar at dette er alle konstantene)
- $\text{Trekant}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\text{Stor}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\text{Liten}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\mathcal{M} \models \text{Under}(a, c)$
  fordi $\langle a^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}} \rangle = \langle$, $\rangle \in \text{Under}^{\mathcal{M}}$

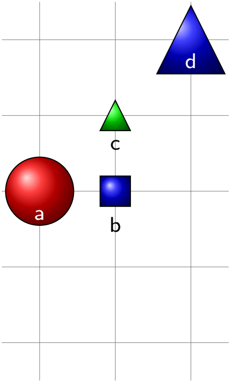
En utvidelse av figurspråket



Forklarende eksempler til semantikken:

- $a^{\mathcal{M}} =$, $b^{\mathcal{M}} =$, $c^{\mathcal{M}} =$, $d^{\mathcal{M}} =$
  (vi antar at dette er alle konstantene)
- $\text{Trekant}^{\mathcal{M}} = \{ , \}$
- $\text{Stor}^{\mathcal{M}} = \{ , \}$
- $\text{Liten}^{\mathcal{M}} = \{ , \}$
- $\mathcal{M} \models \text{Under}(a, c)$
  fordi $\langle a^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}} \rangle = \langle , \rangle \in \text{Under}^{\mathcal{M}}$
- $\mathcal{M} \models \neg\text{Under}(a, b)$

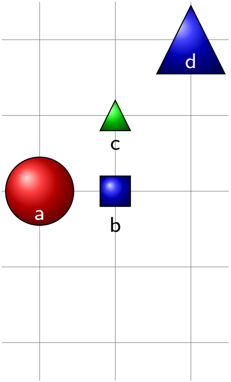
En utvidelse av figurspråket



Forklarende eksempler til semantikken:

- $a^{\mathcal{M}} =$, $b^{\mathcal{M}} =$, $c^{\mathcal{M}} =$, $d^{\mathcal{M}} =$
  (vi antar at dette er alle konstantene)
- $\text{Trekant}^{\mathcal{M}} = \{\ ,\ \}$
- $\text{Stor}^{\mathcal{M}} = \{\ ,\ \}$
- $\text{Liten}^{\mathcal{M}} = \{\ ,\ \}$
- $\mathcal{M} \models \text{Under}(a, c)$
  fordi $\langle a^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}} \rangle = \langle\ ,\ \rangle \in \text{Under}^{\mathcal{M}}$
- $\mathcal{M} \models \neg\text{Under}(a, b)$
- $\mathcal{M} \models \text{VenstreFor}(a, c) \land \neg\text{VenstreFor}(b, c)$

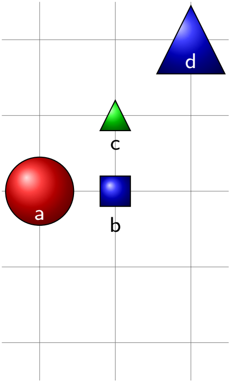
En utvidelse av figurspråket



Forklarende eksempler til semantikken:

- $a^{\mathcal{M}} =$ , $b^{\mathcal{M}} =$ , $c^{\mathcal{M}} =$ , $d^{\mathcal{M}} =$ 
  (vi antar at dette er alle konstantene)
- $\text{Trekant}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\text{Stor}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\text{Liten}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\mathcal{M} \models \text{Under}(a, c)$
  fordi $\langle a^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}} \rangle = \langle$, $\rangle \in \text{Under}^{\mathcal{M}}$
- $\mathcal{M} \models \neg\text{Under}(a, b)$
- $\mathcal{M} \models \text{VenstreFor}(a, c) \land \neg\text{VenstreFor}(b, c)$
- $\mathcal{M} \models \text{Inntil}(a, b) \land \neg\text{Inntil}(a, c)$

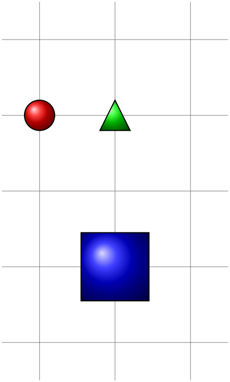
En utvidelse av figurspråket



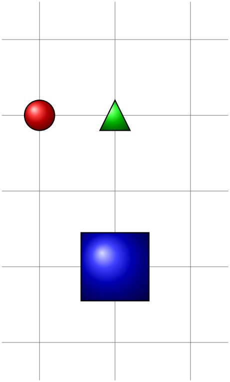
Forklarende eksempler til semantikken:

- $a^{\mathcal{M}} =$ , $b^{\mathcal{M}} =$ , $c^{\mathcal{M}} =$ , $d^{\mathcal{M}} =$ 
  (vi antar at dette er alle konstantene)
- $\text{Trekant}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\text{Stor}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\text{Liten}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\mathcal{M} \models \text{Under}(a, c)$
  fordi $\langle a^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}} \rangle = \langle$, $\rangle \in \text{Under}^{\mathcal{M}}$
- $\mathcal{M} \models \neg\text{Under}(a, b)$
- $\mathcal{M} \models \text{VenstreFor}(a, c) \land \neg\text{VenstreFor}(b, c)$
- $\mathcal{M} \models \text{Inntil}(a, b) \land \neg\text{Inntil}(a, c)$
- $\mathcal{M} \models \text{Mellom}(c, a, d) \land \neg\text{Mellom}(c, b, d)$

Oppfyllbarhet av førsteordens formler

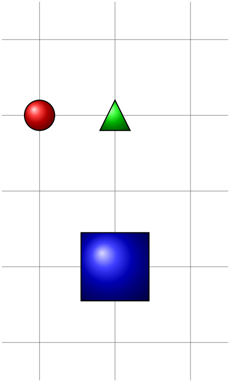


Oppfyllbarhet av førsteordens formler



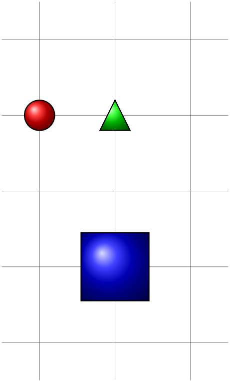
- Er det slik at $\mathcal{M} \models \exists x \mathrm{Liten}(x)$?

Oppfyllbarhet av førsteordens formler



- Er det slik at $\mathcal{M} \models \exists x \text{Liten}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

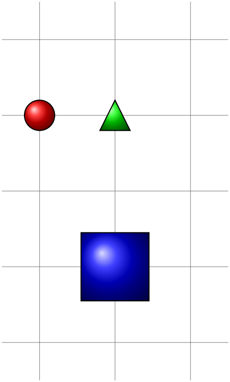
Oppfyllbarhet av førsteordens formler



- Er det slik at $\mathcal{M} \models \exists x \mathsf{Liten}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\mathcal{M}, \mu \models \exists x \mathsf{Liten}(x)$$

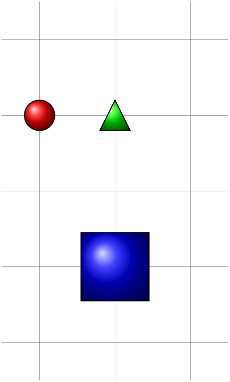
Oppfyllbarhet av førsteordens formler



- Er det slik at $\mathcal{M} \models \exists x \mathrm{Liten}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\mathcal{M}, \mu \models \exists x \mathrm{Liten}(x)$$
$$\Updownarrow$$
det fins en $a \in |\mathcal{M}|$ slik at
$$\mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\} \models \mathrm{Liten}(x)$$

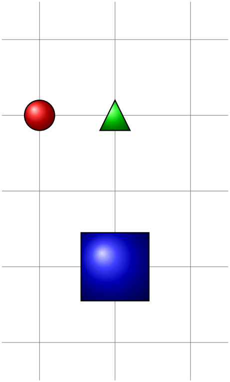
Oppfyllbarhet av førsteordens formler



- Er det slik at $\mathcal{M} \models \exists x \mathrm{Liten}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\mathcal{M}, \mu \models \exists x \mathrm{Liten}(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at}$$
$$\mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\} \models \mathrm{Liten}(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } x^{\mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\}} \in \mathrm{Liten}^{\mathcal{M}}$$

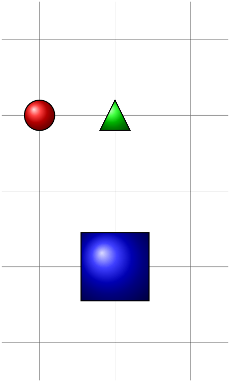
Oppfyllbarhet av førsteordens formler



- Er det slik at $\mathcal{M} \models \exists x \mathsf{Liten}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\mathcal{M}, \mu \models \exists x \mathsf{Liten}(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at}$$
$$\mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\} \models \mathsf{Liten}(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } x^{\mathcal{M},\mu\{x \mapsto a\}} \in \mathsf{Liten}^{\mathcal{M}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mu\{x \mapsto a\}(x) \in \mathsf{Liten}^{\mathcal{M}}$$

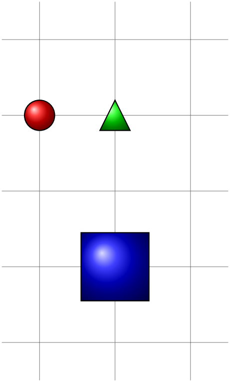
Oppfyllbarhet av førsteordens formler



- Er det slik at $\mathcal{M} \models \exists x \text{Liten}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\mathcal{M}, \mu \models \exists x \text{Liten}(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at}$$
$$\mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\} \models \text{Liten}(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } x^{\mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\}} \in \text{Liten}^{\mathcal{M}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mu\{x \mapsto a\}(x) \in \text{Liten}^{\mathcal{M}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } a \in \text{Liten}^{\mathcal{M}}$$

Oppfyllbarhet av førsteordens formler

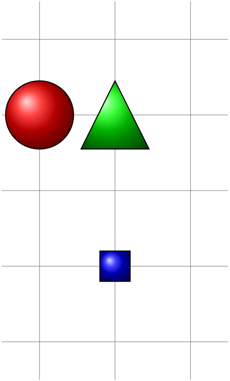


- Er det slik at $\mathcal{M} \models \exists x \mathsf{Liten}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

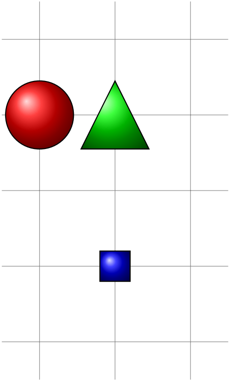
$$\mathcal{M}, \mu \models \exists x \mathsf{Liten}(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at}$$
$$\mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\} \models \mathsf{Liten}(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } x^{\mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\}} \in \mathsf{Liten}^{\mathcal{M}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mu\{x \mapsto a\}(x) \in \mathsf{Liten}^{\mathcal{M}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } a \in \mathsf{Liten}^{\mathcal{M}}$$

- Siden $\mathsf{Liten}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$, kan vi konkludere med **JA**.

Oppfyllbarhet av førsteordens formler

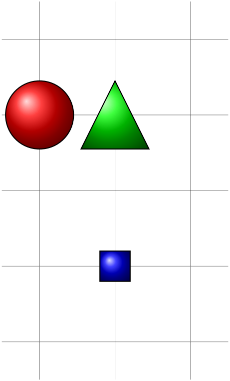


Oppfyllbarhet av førsteordens formler



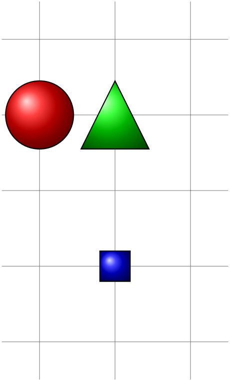
- Er det slik at $\mathcal{M} \models \forall x \mathrm{Stor}(x)$?

Oppfyllbarhet av førsteordens formler



- Er det slik at $\mathcal{M} \models \forall x \mathsf{Stor}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

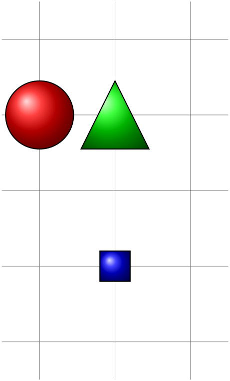
Oppfyllbarhet av førsteordens formler



- Er det slik at $\mathcal{M} \models \forall x \mathsf{Stor}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\mathcal{M}, \mu \models \forall x \mathsf{Stor}(x)$$

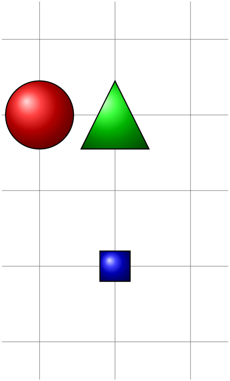
Oppfyllbarhet av førsteordens formler



- Er det slik at $\mathcal{M} \models \forall x \mathsf{Stor}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\mathcal{M}, \mu \models \forall x \mathsf{Stor}(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\} \models \mathsf{Stor}(x)$$

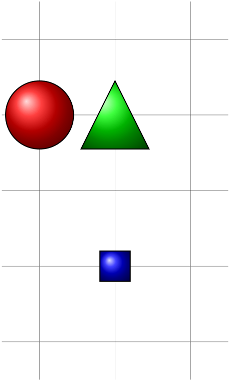
Oppfyllbarhet av førsteordens formler



- Er det slik at $\mathcal{M} \models \forall x \mathsf{Stor}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\mathcal{M}, \mu \models \forall x \mathsf{Stor}(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\} \models \mathsf{Stor}(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } x^{\mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\}} \in \mathsf{Stor}^{\mathcal{M}}$$

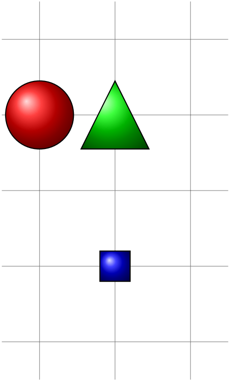
Oppfyllbarhet av førsteordens formler



- Er det slik at $\mathcal{M} \models \forall x \mathsf{Stor}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\mathcal{M}, \mu \models \forall x \mathsf{Stor}(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\} \models \mathsf{Stor}(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } x^{\mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\}} \in \mathsf{Stor}^{\mathcal{M}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \mu\{x \mapsto a\}(x) \in \mathsf{Stor}^{\mathcal{M}}$$

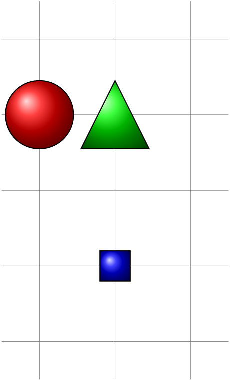
Oppfyllbarhet av førsteordens formler



- Er det slik at $\mathcal{M} \models \forall x \mathsf{Stor}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\mathcal{M}, \mu \models \forall x \mathsf{Stor}(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\} \models \mathsf{Stor}(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } x^{\mathcal{M},\mu\{x \mapsto a\}} \in \mathsf{Stor}^{\mathcal{M}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \mu\{x \mapsto a\}(x) \in \mathsf{Stor}^{\mathcal{M}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } a \in \mathsf{Stor}^{\mathcal{M}}$$

Oppfyllbarhet av førsteordens formler



- Er det slik at $\mathcal{M} \models \forall x \mathsf{Stor}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\begin{gathered}
\mathcal{M}, \mu \models \forall x \mathsf{Stor}(x) \\
\Updownarrow \\
\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\} \models \mathsf{Stor}(x) \\
\Updownarrow \\
\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } x^{\mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\}} \in \mathsf{Stor}^{\mathcal{M}} \\
\Updownarrow \\
\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \mu\{x \mapsto a\}(x) \in \mathsf{Stor}^{\mathcal{M}} \\
\Updownarrow \\
\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } a \in \mathsf{Stor}^{\mathcal{M}}
\end{gathered}$$

- Siden $|\mathcal{M}| = \{$, , $\}$ og $\mathsf{Stor}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$, så kan vi konkludere med **NEI**.