INF3170 – Logikk

Forelesning 6: Førsteordens logikk – syntaks og semantikk

Martin Giese

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

25. februar 2008

Dagens plan

1. Innledning til førsteordens logikk
2. Førsteordens logikk – syntaks
3. Førsteordens logikk – semantikk

1. Innledning til førsteordens logikk
   - Introduksjon
   - Overblikk
2. Førsteordens logikk – syntaks
3. Førsteordens logikk – semantikk

Introduksjon

- I utsagnslogikk kan vi analysere de logiske konnektivene $\neg$, $\wedge$, $\vee$ og $\rightarrow$, og resonnering som gjøres med slike.
- Førsteordens logikk (også kalt predikatlogikk) utvider utsagnslogikk med *kvantorer*:
  - $\exists$ (eksistenskvantoren) og
  - $\forall$ (allkvantoren).
- Vi kan med disse uttrykke påstander om at det finnes et objekt med en bestemt egenskap eller at alle objekter har en bestemt egenskap.
- Førsteordens logikk er langt rikere enn utsagnslogikk.
- Førsteordens logikk er ikke avgjørbart.

Noen eksempler

Noen påstander som vi kan representere og analysere ved førsteordens logikk er følgende:

- "Ethvert heltall er enten partall eller oddetall."
- "Det fins uendelig mange primtall."
- "Mellom to brøktall fins det annet brøktall."
- "Hvis a er mindre enn b og b er mindre enn c, så er a mindre enn c."

Flere eksempler

Av mindre matematisk art:

- "Alle Ifi-studenter er late."
- "Ingen Ifi-studenter er late."
- "Noen Ifi-studenter er late."
- "Alle Ifi-studenter som er late, får problemer på eksamen."
- "Noen Ifi-studenter som er late, får ingen problemer på eksamen."
- "Enhver Ifi-student er enten lat eller ikke lat."
- "Alle bevisbare formler er gyldige."
- "Det fins to sheriffer i byen."

Overblikk

Syntaks: førsteordens språk og formler – en utvidelse av utsagnslogikk.

Semantikk: tolkninger av førsteordens formler – modeller, sannhet, oppfyllbarhet, gyldighet.

Kalkyle: tillegg av regler.

Sunnhet: alle bevisbare sekventer er gyldige.

Kompletthet: alle gyldige sekventer er bevisbare.

Syntaks – Signaturer

Definisjon (Førsteordens språk – logiske symboler)

Alle førsteordens språk består av følgende logiske symboler:

- *De logiske konnektivene $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ og $\neg$.*
- *Hjelpesymbolene '(' og ')' og ',' .*
- *Kvantorene $\exists$ (det fins) og $\forall$ (for alle).*
- *En tellbart uendelig mengde $\mathcal{V}$ av variable $x_1, x_2, x_3, \ldots$ (vi skriver x, y, z, ..., for variable).*

Syntaks – Signaturer

Definisjon (Førsteordens språk – ikke-logiske symboler)

I tillegg består et førsteordens språk av følgende mengder av ikke-logiske symboler:

- *En tellbar mengde av konstantsymboler $c_1, c_2, c_3, \ldots$.*
- *En tellbar mengde av funksjonssymboler $f_1, f_2, f_3, \ldots$.*
- *En tellbar mengde av relasjonssymboler $R_1, R_2, R_3, \ldots$.*

Vi antar at mengdene av variable, konstant-, funksjons- og relasjonssymboler er disjunkte, og vi assosierer med ethvert funksjons- og relasjonssymbol et ikke-negativt heltall, kalt ariteten til symbolet.

Syntaks – Signaturer

Merk

- *Det eneste som skiller to førsteordens språk fra hverandre er de ikke-logiske symbolene.*

Definisjon (Signatur)

- *De ikke-logiske symbolene utgjør det som kalles en signatur.*
- *En signatur angis ved et tuppel $\langle c_1, c_2, c_3, \ldots; f_1, f_2, f_3, \ldots; R_1, R_2, R_3, \ldots \rangle$, hvor konstant-, funksjons- og relasjonssymboler er adskilt med semikolon.*

Syntaks – Termer

Definisjon (Termer)

Mengden $\mathcal{T}$ av første-ordens termer er induktivt definert som den minste mengden slik at:

- *Enhver variabel og konstant er en term.*
- *Hvis f er et funksjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer, så er $f(t_1, \ldots, t_n)$ en term.*

Eksempler på førsteordens språk

Et enkelt språk: $\langle a; f, g; P, R\rangle$

- Konstantsymboler: a
- Funksjonssymboler: f (med aritet 1) og g (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: P (med aritet 1) og R (med aritet 2)

Termer i dette språket:

- a, x, y, $\dots$, $f(a)$, $f(x)$, $f(y)$, $\dots$
- $g(a, a)$, $g(a, x)$, $g(a, y)$, $g(x, x)$, $g(x, y)$, $g(y, y)$, $\dots$
- $f(f(a))$, $f(f(x))$, $f(f(y))$, $\dots$

Notasjon

Så lenge det er entydig og ariteten er kjent, kan vi droppe parentesene og skrive fa, fx, fy, gaa, gax, ...

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for aritmetikk: $\langle 0; s, +; =\rangle$

- Konstantsymboler: 0
- Funksjonssymboler: s (med aritet 1) og $+$ (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$

Kommentarer:

- Termer: $x, y, 0, s0, ss0, sss0, +xy, +00, +(s0)0, +0s0, \dots$
- *Ikke* termer: $= (x, x), ++, +0, \dots$
- Når vi skriver $+xy$ bruker vi prefiks notasjon.
- Vi bruker også infiks notasjon og skriver: $(x + y), (0 + 0), (s0 + 0), (0 + s0), \dots$.

Eksempler på førsteordens språk

Et annet språk for aritmetikk: $\langle 0, 1; +, \times; =, <\rangle$

- Konstantsymboler: $0, 1$
- Funksjonssymboler: $+$ og $\times$ (begge med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$ og $<$ (begge med aritet 2)

Et språk for mengdelære: $\langle \emptyset; \cap, \cup; =, \in\rangle$

- Konstantsymboler: $\emptyset$
- Funksjonssymboler: $\cap$ og $\cup$ (begge med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$ og $\in$ (begge med aritet 2)

Termer: $\emptyset$, $x \cap \emptyset$, $y \cup (x \cap z)$,...

Syntaks – Formler

Definisjon (Atomær formel – førsteordens)

Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n og $t_1, \dots, t_n$ er termer, så er $R(t_1, \dots, t_n)$ en atomær formel.

Merk

- *Hvis R har aritet 0, så er R en atomær formel. Dette svarer til utsagnsvariable i utsagnslogikk.*
- *Så lenge det er entydig og ariteten er kjent skriver vi Rx, Rfa, Rafa, etc. for $R(x)$, $R(f(a))$ og $R(a, f(a))$.*

Syntaks – Formler

Definisjon (Førsteordens formler)

*Mengden $\mathcal{F}$ av **førsteordens formler** er den minste mengden slik at:*

1. *Alle atomære formler er formler.*
2. *Hvis φ og ψ er formler, så er $\neg\varphi$, $(\varphi \land \psi)$, $(\varphi \lor \psi)$ og $(\varphi \to \psi)$ formler.*
3. *Hvis φ er en formel og x er en variabel, så er $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$ formler.*

*Alle forekomster av en variabel x i φ sies å være **bundet** i formlene $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$ og innenfor **skopet** til den gjeldende kvantoren.*

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle a, b; ; \mathrm{Idol}, \mathrm{Liker}\rangle$

- Konstantsymboler: a og b
- Funksjonssymboler: (ingen)
- Relasjonssymboler: Idol (med aritet 1) og Liker (med aritet 2)

Formler i språket:

Atomære formler:

1:	Alice er et idol:	$\mathrm{Idol}(a)$
2:	Alice liker Bob:	$\mathrm{Liker}(a, b)$
3:	x liker Alice:	$\mathrm{Liker}(x, a)$

Eksempler på førsteordens formler

Signatur: $\langle a, b; -; \mathrm{Idol}, \mathrm{Liker}\rangle$

Ikke atomære formler:

4:	Alice liker alle:	$\forall x \mathrm{Liker}(a, x)$
5:	Det finnes et idol:	$\exists x \mathrm{Idol}(x)$
6:	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\mathrm{Liker}(b, x) \to \mathrm{Liker}(a, x))$
7:	Noen liker seg selv:	$\exists x \mathrm{Liker}(x, x)$
8:	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x(\mathrm{Liker}(x, x) \to \mathrm{Liker}(b, x))$
9:	Ingen liker både Alice og Bob:	$\neg\exists x(\mathrm{Liker}(x, a) \land \mathrm{Liker}(x, b))$
10:	Noen liker ikke seg selv:	$\exists x \neg\mathrm{Liker}(x, x)$
11:	Bob liker noen som liker Alice:	$\exists x(\mathrm{Liker}(b, x) \land \mathrm{Liker}(x, a))$
12:	Alle liker noen:	$\forall x(\exists y \mathrm{Liker}(x, y))$
13:	En som blir likt av alle er et idol:	$\forall x(\forall y \mathrm{Liker}(y, x) \to \mathrm{Idol}(x))$
14:	Et idol blir likt av alle:	$\forall x(\mathrm{Idol}(x) \to \forall y \mathrm{Liker}(y, x))$

Eksempler på førsteordens formler

I språket for aritmetikk $\langle 0; s, +; =\rangle$, har vi formlene

- $s0 + s0 = ss0$ - "en pluss en er to"
- $\forall x \forall y(x + y = y + x)$ - "addisjon er kommutativt"
- $\forall x \exists y(y = sx)$ - "alle tall har en etterfølger"
- $\neg\exists x(0 = sx)$ - "0 er ikke etterfølgeren til noe"
- $\exists x \exists y \neg(x = y)$ - "det fins to forskjellige objekter"

Frie variable i termer

Definisjon (Frie variable i en term)

$\mathrm{FV}(t)$ *betegner mengden av frie variable i termen* t.

Definisjon (Lukket term)

En term t *er lukket hvis* $\mathrm{FV}(t) = \emptyset$, *dvs.* t *inneholder ingen frie variable.*

Eksempel

I språket $\langle a, b; f; - \rangle$ *har vi:*

- *Termen* $f(x, a)$ *har en fri variabel* x.
- *Termen* $f(a, b)$ *har ingen frie variable og er en lukket term.*

Rekursive definisjoner

Når mengder er definert *induktivt*, så kan vi definere funksjoner over denne mengden rekursivt ved å

1. gi verdi til de "atomære" elementene (i basismengden), og
2. gi verdi til "sammensatte" elementene (fra induksjonssteget) ved å bruke verdiene som ble gitt til komponentene.

Den presise, rekursive definisjonen av FV er følgende.

Definisjon (Frie variable – definert rekursivt)

Gitt en term t, *la mengden* $\mathrm{FV}(t)$ *av frie variable i* t *være definert rekursivt ved:*

- $\mathrm{FV}(x_i) = \{x_i\}$, *for en variabel* x_i, *og*
- $\mathrm{FV}(c_i) = \emptyset$, *for en konstant* c_i, *og*
- $\mathrm{FV}(f(t_1, \ldots, t_n)) = \mathrm{FV}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{FV}(t_n)$, *for et funksjonssymbol* f *med aritet* n.

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er fri hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver $\mathrm{FV}(\varphi)$ *for mengden av frie variable i* φ.

Eksempel ($\forall x Rxy \land Pz$)

- x *er bundet*
- y *er fri*
- z *er fri*

Eksempel ($\forall x Pxy \to \forall z Pzx$)

- x *er bundet*
- x *er fri*
- y *er fri*
- z *er bundet*

Oppgave

Gi den presise, rekursive, definisjonen av frie variable i en formel.

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s *og* t *være termer og* x *en variabel. Da er* $s[t/x]$, *det vi får ved å erstatte alle forekomster av* x *i* s *med* t, *definert rekursivt ved:*

1. $y[t/x] = \begin{cases} t & \text{hvis } x = y \\ y & \text{ellers} \end{cases}$ *(når* s *er en variabel* y*).*
2. $c[t/x] = c$ *(når* s *er en konstant* c*).*
3. $f(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$ *(når* s *er en funksjonsterm* $f(t_1, \ldots, t_n)$*).*

Eksempel

- $f(x, y, a)[y/x] = f(x[y/x], y[y/x], a[y/x]) = f(y, y, a)$
- $f(y, y, a)[b/y] = f(y[b/y], y[b/y], a[b/y]) = f(b, b, a)$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[t/x]$ er definert rekursivt ved:

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$
2. $\neg\psi[t/x] = \neg(\psi[t/x])$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)[t/x] = (\varphi_1[t/x] \circ \varphi_2[t/x])$, *hvor* $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
4. $\mathsf{Q}y\psi[t/x] = \begin{cases} \mathsf{Q}y(\psi[t/x]) & \textit{hvis } x \neq y \\ \mathsf{Q}y\psi & \textit{ellers} \end{cases}$, *hvor* $\mathsf{Q} \in \{\forall, \exists\}$

Eksempel

- $(Pxy \wedge \forall xPxy)[a/x] = (Pay \wedge \forall xPxy)$
- $(Pxy \wedge \forall xPxy)[a/y] = (Pxa \wedge \forall xPxa)$

Substitusjoner

- Vi ser at substitusjon ikke blir gjort for bundne variable.
- Vi har enda et tilfelle hvor vi ønsker å forhindre substitusjon.

Eksempel

- $\exists x\mathrm{Liker}(x, y)[f(x)/y] = \exists x\mathrm{Liker}(x, f(x))$

- Her blir en variabel bundet *etter* substitusjon.
- Dette kan endre meningen til en formel på en måte som vi ikke ønsker.

Substitusjoner

Definisjon

Vi sier at t er fri for x i φ hvis ingen variabel i t blir bundet som følge av å substitutere t for x i φ.

Eksempel

Termen $f(x)$ er ikke fri for y i formelen $\exists x\mathrm{Liker}(x, y)$.

- En måte å unngå dette på er å omdøpe bundne variable først.
- F.eks. se på $\exists z\mathrm{Liker}(z, y)$ i stedet for $\exists x\mathrm{Liker}(x, y)$.
- Fra nå av antar vi at alle substitusjoner er "fri for", dvs. at ingen variable blir bundet som følge av en substitusjon.

Lukkede og åpne formler

Definisjon (Lukket/åpen formel)

En formel φ er lukket hvis $\mathrm{FV}(\varphi) = \emptyset$, dvs. φ inneholder ingen frie variable. En formel er åpen hvis den ikke inneholder noen kvantorer.

Eksempel

- *$\forall xPxa$ er lukket*
- *$\forall xPxy$ er ikke lukket*
- *Pxy er ikke lukket, men åpen*
- *Pab er åpen og lukket*

Introduksjon

- Hvordan skal vi tolke førsteordens formler?
- Hva skal $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$ bety?
- Hva gjør en formel sann / gyldig / oppfyllbar?
- Å gi en semantikk er å si noe om forholdet mellom språk og virkelighet.
  - Valuasjoner gir en semantikk for klassisk utsagnslogikk.
- I førsteordens logikk vil modeller gi oss en semantikk.

Introduksjon

En modell består intuitivt av

1. en mengde, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler slik at
   - et konstantsymbol tolkes som et element i mengden,
   - et funksjonssymbol tolkes som en funksjon på mengden, og
   - et relasjonssymbol tolkes som en relasjon på mengden.

Vi skal først definere modeller helt presist, også skal vi definere hva det vil si at en formel er sann i en modell.

Husk

Hvis D er en mengde, så består D^n av alle n-tupler av elementer fra D, for $n \geq 0$.

$$D^n = \{\langle d_1, \ldots, d_n\rangle \mid d_1, \ldots, d_n \in D\}$$

Modeller

La et førsteordens språk $\mathcal{L}$ være gitt.

Definisjon (Modell)

En modell $\mathcal{M}$ for $\mathcal{L}$ består av en ikke-tom mengde D, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og en funksjon $(\cdot)^{\mathcal{M}}$ som tolker alle ikke-logiske symboler på følgende måte:

- *Hvis c er et konstantsymbol, så er $c^{\mathcal{M}} \in D$.*
- *Hvis f er et funksjonsymbol med aritet n,så er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra $D^n = \underbrace{D \times \cdots \times D}_{n}$ til D.*
- *Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n,så er $R^{\mathcal{M}}$ en relasjon på $D^n = \underbrace{D \times \cdots \times D}_{n}$.*

Vi skriver $|\mathcal{M}|$ for domenet D til modellen $\mathcal{M}$.

Noen kommentarer

1. Et funksjonssymbol f med aritet 0 kan betraktes som en konstant.
   - Da er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra D^0 til D.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ – det tomme tuppelet – så består $f^{\mathcal{M}}$ også av kun ett element $\langle\langle\rangle, e\rangle$, hvor $e \in D$.
   - Vi kan derfor identifisere $f^{\mathcal{M}}$ med e.
2. Et relasjonssymbol R med aritet 0 kan betraktes som en utsagnsvariabel.
   - Da er $R^{\mathcal{M}}$ en delmengde av D^0.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ – det tomme tuppelet -så fins det nøyaktig to muligheter for $R^{\mathcal{M}}$.
   - Enten så er $R^{\mathcal{M}}$ tom eller så er $\langle\rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
   - Vi kan derfor tenke på mengden $\{\emptyset, \{\langle\rangle\}\}$ av delmengder av D^0 som **Bool**.
3. Et tuppel $\langle e\rangle$, hvor $e \in D$, kan vi identifisere med elementet e.
   - Når et relasjonssymbol R har aritet 1,så skriver vi derfor $\{e_1, \ldots, e_n\}$ i stedet for $\{\langle e_1\rangle, \ldots, \langle e_n\rangle\}$.
   - Vi antar derfor også at $R^{\mathcal{M}} \subseteq D$.

Hovedeksempel – et figurspråk

Relasjonssymbol	aritet
Sirkel	1
Firkant	1
Trekant	1
Stor	1
Liten	1
Mindre	2

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.
- Vi leser på denne måten:

  Sirkel(x): "x er en sirkel"

  Firkant(x): "x er en firkant"

  Trekant(x): "x er en trekant"

  Stor(x): "x er stor"

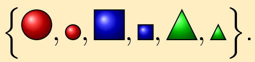
  Liten(x): "x er liten"

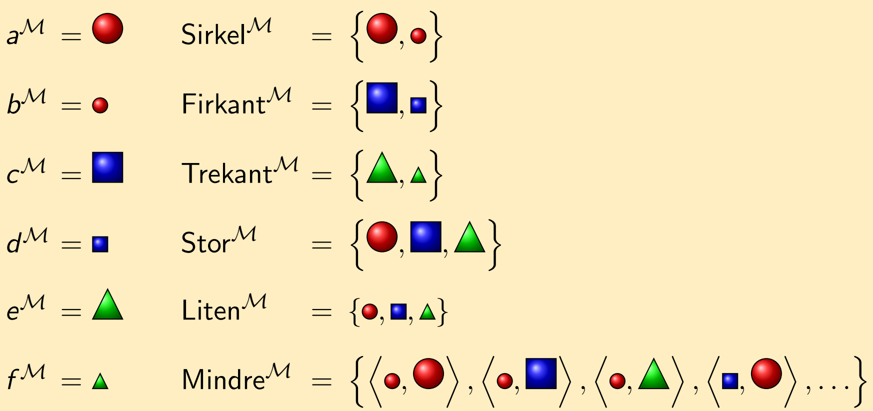
  Mindre(x, y): "x er mindre enn y"

La oss nå lage en modell for dette språket!

Hovedeksempel – et figurspråk

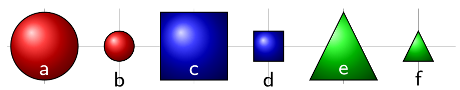
En tolkning av figurspråket

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $D =$ .



Hovedeksempel – et figurspråk

Vi foregriper begivenhetene og ser på hvilke atomære formler som er sanne og usanne i modellen $\mathcal{M}$.



Sant

- Sirkel(a)
- Firkant(c)
- Liten(b)
- Mindre(b, e)

Usant

- Trekant(a)
- Stor(b)
- Mindre(a, b)
- Mindre(a, a)

Variabeltilordninger

- En modell tolker konstantsymboler, funksjonssymboler, og relasjonssymboler, men…
- …ikke variabler. Derfor definerer vi…

Definisjon (Variabeltilordning)

La $\mathcal{M}$ være en modell. En variabeltilordning for $\mathcal{M}$ er en funksjon $\mu : \mathcal{V} \to |\mathcal{M}|$ fra mengen av variable til domenet.

- En variabeltilordning er alltid gitt relativ til en modell $\mathcal{M}$ siden den tolker variable som elementer i domenet til $\mathcal{M}$.
- For en gitt modell kan vi ha mange variabeltilordninger.
- Hvis $|\mathcal{M}| = \{1, 2, 3\}$, så kan vi ha
  - μ_1 slik at $\mu_1(x_1) = 1$, $\mu_1(x_2) = 1$, $\mu_1(x_3) = 1$, …
  - μ_2 slik at $\mu_2(x_1) = 2$, $\mu_2(x_2) = 2$, $\mu_2(x_3) = 2$, …
  - μ_3 slik at $\mu_3(x_1) = 1$, $\mu_3(x_2) = 2$, $\mu_3(x_3) = 3$, …
  - …

Modifikasjon av variabeltilordninger

Definisjon

La μ være en variabeltilordning for en modell $\mathcal{M}$, $x \in \mathcal{V}$ en variabel, og $a \in |\mathcal{M}|$ et element av domenet. Vi definerer modisikasjonen av μ på x till a, skrevet $\mu\{x \mapsto a\}$, gjennom:

$$\mu\{x \mapsto a\}(y) := \begin{cases} a & \textit{hvis } x{=}y \\ \mu(y) & \textit{ellers} \end{cases}$$

for alle variabler $y \in \mathcal{V}$.

La μ være slik at $\mu(x_1) = 1$, $\mu(x_2) = 1$, $\mu(x_3) = 1$, …

Hvis $\mu' = \mu\{x_2 \mapsto 2\}$, so er $\mu'(x_1) = 1$, $\mu'(x_2) = 2$, $\mu'(x_3) = 1$, …

Tolkning av termer

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler
- Tolkningen av variable overlates til variabeltilordningen.

Definisjon (Tolkning av termer)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Tolkningen av en term t i $\mathcal{M}$ under μ, skrevet $t^{\mathcal{M},\mu}$, defineres induktivt.

- $x^{\mathcal{M},\mu} = \mu(x)$ *for en variabel* x
- $c^{\mathcal{M},\mu} = c^{\mathcal{M}}$ *for et konstantsymbol* c
- $f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{M},\mu} = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu})$ *for en funksjonsterm*

Tolkning av formler

Definisjon (Tolkning av formler)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Vi definerer ved induksjon hva det vil si at en formel φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ; vi skriver $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ.

- *Atomære fml:* $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \ldots, t_n)$ *hvis* $\langle t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \neg\varphi$ *hvis det ikke er tilfelle at* $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \wedge \psi$ *hvis* $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ *og* $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \vee \psi$ *hvis* $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ *eller* $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \to \psi$ *hvis* $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ *impliserer* $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \forall x\varphi$ *hvis* $\mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\} \models \varphi$ *for alle* a *i* $|\mathcal{M}|$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \exists x\varphi$ *hvis* $\mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\} \models \varphi$ *for minst en* a *i* $|\mathcal{M}|$.

Koinsidenslemma

- $t^{\mathcal{M},\mu}$ er uavhengig av μ for variabler som ikke forekommer i t.
- $\mathcal{M},\mu \models \varphi$ er uavhengig av μ for variabler som ikke forekommer *fritt* i φ.

Lemma (Koinsidenslemma)

La t være en term, $\mathcal{M}$ en modell, og μ og ν to variabeltilordninger med $\mu(x) = \nu(x)$ for alle $x \in \mathrm{FV}(t)$. Da er $t^{\mathcal{M},\mu} = t^{\mathcal{M},\nu}$.
La φ være en formel, $\mathcal{M}$ en modell, og μ og ν to variabeltilordninger med $\mu(x) = \nu(x)$ for alle $x \in \mathrm{FV}(\varphi)$. Da gjelder $\mathcal{M},\mu \models \varphi$ hviss $\mathcal{M},\nu \models \varphi$.

For lukkede termer t og formler φ: skriv $t^{\mathcal{M}}$ og $\mathcal{M} \models \varphi$.

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Oppfyllbarhet)

En lukket formel φ er oppfyllbar hvis det fins en modell $\mathcal{M}$ som gjør φ sann. Vi sier også at $\mathcal{M}$ oppfyller φ og at $\mathcal{M}$ er en modell for φ.

Oppfyllbar

- $\exists x \mathrm{Liten}(x)$
- $\exists x(\mathrm{Liten}(x) \wedge \mathrm{Stor}(x))$
- $\exists x Px \to \forall x Px$

Ikke oppfyllbar

- $Pa \wedge \neg Pa$
- $\exists x(\mathrm{Liten}(x) \wedge \neg \mathrm{Liten}(x))$
- $\neg \mathrm{Stor}(a) \wedge \forall x \mathrm{Stor}(x)$

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Gyldighet)

En lukket formel φ er gyldig hvis den er sann i alle modeller $\mathcal{M}$, ellers så er den falsifiserbar.

Gyldig

- $\forall x Pxa \to \forall z Pza$
- $(\forall x Px \wedge \forall y Qy) \to \forall x Px$
- $\exists x \mathrm{Liten}(x) \vee \exists x \neg \mathrm{Liten}(x)$

Ikke gyldig (falsfiserbar)

- $\forall x Px$
- $\exists x \mathrm{Stor}(x) \to \forall x \mathrm{Stor}(x)$
- $\exists x Px \to \exists x(Px \wedge Qx)$

Oppsummering

En modell $\mathcal{M}$ for et språk $\mathcal{L}$ består av

1. en ikke-tom mengde $|\mathcal{M}|$, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler i språket.

For eksempel, hvis $\mathcal{L}$ er språket ⟨ 🚺 , 🚹 , ☕ ; 🏭 ; ♀ , ♂ ⟩, så må en modell $\mathcal{M}$ gi et domene og en tolkning til alle symbolene.

- 🚺$^{\mathcal{M}}$, 🚹$^{\mathcal{M}}$ og ☕$^{\mathcal{M}}$ må være elementer i domenet.
- 🏭$^{\mathcal{M}}$ må være en funksjon på domenet
- ♀$^{\mathcal{M}}$ og ♂$^{\mathcal{M}}$ må være relasjoner på domenet.
- Husk på ariteten til symbolene. (🏭 har aritet 2; ♀ og ♂ har aritet 1.)

Oppsummering

Hvis $\mathcal{M}$ er en modell og φ er en lukket formel, så definerte vi $\mathcal{M} \models \varphi$.

- For atomære formler: $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \wedge \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \vee \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ eller $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \rightarrow \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ impliserer $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \forall x\varphi$ hvis $\mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\} \models \varphi$ for alle $a \in |\mathcal{M}|$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \exists x\varphi$ hvis $\mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\} \models \varphi$ for minst en $a \in |\mathcal{M}|$.

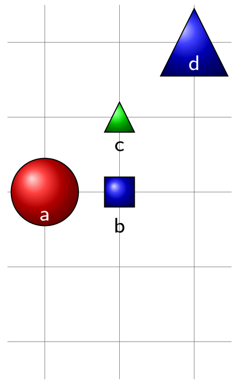
Språk og modeller – et komplekst forhold

- Ved førsteordens språk har vi fått betydelig større uttrykkskraft.
- Modeller kan være rike på struktur.
- Det er et ikke-trivielt forhold mellom språk og modeller.
- Noe av det vi er interessert i:
  - Sjekke om en formel er sann i en modell. (Modellsjekking)
  - Sjekke om en formel er oppfyllbar eller falsifiserbar.
  - Sjekke om en formel er gyldig.
  - Sjekke om formler er uavhengige av hverandre.
  - Bruke språket til å beskrive modeller, forsøke å "fange inn" og beskrive virkeligheten.

En utvidelse av figurspråket

Atomær formel	Intendert tolkning
Sirkel(x)	x er en sirkel
Firkant(x)	x er en firkant
Trekant(x)	x er en trekant
Stor(x)	x er stor
Liten(x)	x er liten
Mindre(x, y)	x er mindre enn y
Over(x, y)	x er nærmere toppen enn y
Under(x, y)	x er nærmere bunnen enn y
VenstreFor(x, y)	x er lenger til venstre enn y
HoyreFor(x, y)	x er lenger til høyre enn y
Inntil(x, y)	x er rett ved siden av, rett over eller rett under y
Mellom(x, y, z)	x, y og z er i samme kolonne, rad eller diagonal, og x er mellom y og z

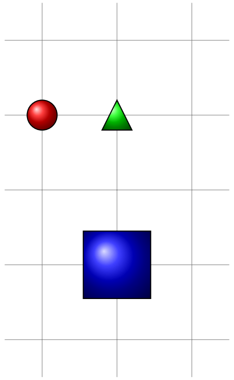
En utvidelse av figurspråket



Forklarende eksempler til semantikken:

- $a^{\mathcal{M}} =$, $b^{\mathcal{M}} =$, $c^{\mathcal{M}} =$, $d^{\mathcal{M}} =$ (vi antar at dette er alle konstantene)
- Trekant$^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- Stor$^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- Liten$^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\mathcal{M} \models$ Under(a, c) fordi $\langle a^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}} \rangle = \langle$, $\rangle \in$ Under$^{\mathcal{M}}$
- $\mathcal{M} \models \neg$Under(a, b)
- $\mathcal{M} \models$ VenstreFor(a, c) $\wedge \neg$VenstreFor(b, c)
- $\mathcal{M} \models$ Inntil(a, b) $\wedge \neg$Inntil(a, c)
- $\mathcal{M} \models$ Mellom(c, a, d) $\wedge \neg$Mellom(c, b, d)

Oppfyllbarhet av førsteordens formler

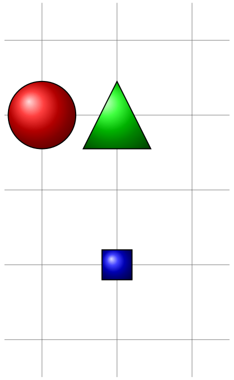


- Er det slik at $\mathcal{M} \models \exists x \mathsf{Liten}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\mathcal{M}, \mu \models \exists x \mathsf{Liten}(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at}$$
$$\mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\} \models \mathsf{Liten}(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } x^{\mathcal{M},\mu\{x \mapsto a\}} \in \mathsf{Liten}^{\mathcal{M}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mu\{x \mapsto a\}(x) \in \mathsf{Liten}^{\mathcal{M}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } a \in \mathsf{Liten}^{\mathcal{M}}$$

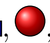
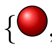
- Siden $\mathsf{Liten}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$, kan vi konkludere med **JA**.

Oppfyllbarhet av førsteordens formler



- Er det slik at $\mathcal{M} \models \forall x \mathsf{Stor}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\mathcal{M}, \mu \models \forall x \mathsf{Stor}(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\} \models \mathsf{Stor}(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } x^{\mathcal{M},\mu\{x \mapsto a\}} \in \mathsf{Stor}^{\mathcal{M}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \mu\{x \mapsto a\}(x) \in \mathsf{Stor}^{\mathcal{M}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } a \in \mathsf{Stor}^{\mathcal{M}}$$

- Siden $|\mathcal{M}| = \{$, , $\}$ og $\mathsf{Stor}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$, så kan vi konkludere med **NEI**.