# Forelesning 6: Førsteordens logikk – syntaks og semantikk

Martin Giese - 25. februar 2008

# 1 Innledning til førsteordens logikk

## 1.1 Introduksjon

- I utsagnslogikk kan vi analysere de logiske konnektivene $\neg$, $\wedge$, $\vee$ og $\rightarrow$, og resonnering som gjøres med slike.
- Førsteordens logikk (også kalt predikatlogikk) utvider utsagnslogikk med *kvantorer*:
  - $\exists$ (eksistenskvantoren) og
  - $\forall$ (allkvantoren).
- Vi kan med disse uttrykke påstander om at det finnes et objekt med en bestemt egenskap eller at alle objekter har en bestemt egenskap.
- Førsteordens logikk er langt rikere enn utsagnslogikk.
- Førsteordens logikk er ikke avgjørbart.

**Noen eksempler**

Noen påstander som vi kan representere og analysere ved førsteordens logikk er følgende:

- "Ethvert heltall er enten partall eller oddetall."
- "Det fins uendelig mange primtall."
- "Mellom to brøktall fins det annet brøktall."
- "Hvis $a$ er mindre enn $b$ og $b$ er mindre enn $c$, så er $a$ mindre enn $c$."

**Flere eksempler**

Av mindre matematisk art:

- "Alle Ifi-studenter er late."
- "Ingen Ifi-studenter er late."
- "Noen Ifi-studenter er late."
- "Alle Ifi-studenter som er late, får problemer på eksamen."
- "Noen Ifi-studenter som er late, får ingen problemer på eksamen."
- "Enhver Ifi-student er enten lat eller ikke lat."
- "Alle bevisbare formler er gyldige."
- "Det fins to sheriffer i byen."

### 1.2 Overblikk

**Syntaks:** førsteordens språk og formler – en utvidelse av utsagnslogikk.

**Semantikk:** tolkninger av førsteordens formler – modeller, sannhet, oppfyllbarhet, gyldighet.

**Kalkyle:** tillegg av regler.

**Sunnhet:** alle bevisbare sekventer er gyldige.

**Kompletthet:** alle gyldige sekventer er bevisbare.

## 2 Førsteordens logikk – syntaks

### 2.1 Syntaks – Signaturer

**Definisjon 2.1** (Førsteordens språk – logiske symboler)**.** *Alle førsteordens språk består av følgende logiske symboler:*

- *De logiske konnektivene* $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ *og* $\neg$.
- *Hjelpesymbolene '(' og ')' og ',' .*
- *Kvantorene* $\exists$ *(det fins) og* $\forall$ *(for alle).*
- *En tellbart uendelig mengde* $\mathcal{V}$ *av variable* $x_1, x_2, x_3, \ldots$ *(vi skriver* $x$, $y$, $z$, $\ldots$, *for variable).*

**Definisjon 2.2** (Førsteordens språk – ikke-logiske symboler)**.** *I tillegg består et førsteordens språk av følgende mengder av ikke-logiske symboler:*

- *En tellbar mengde av konstantsymboler* $c_1, c_2, c_3, \ldots$.
- *En tellbar mengde av funksjonssymboler* $f_1, f_2, f_3, \ldots$.
- *En tellbar mengde av relasjonssymboler* $R_1, R_2, R_3, \ldots$.

*Vi antar at mengdene av variable, konstant-, funksjons- og relasjonssymboler er disjunkte, og vi assosierer med ethvert funksjons- og relasjonssymbol et ikke-negativt heltall, kalt ariteten til symbolet.*

**Merk.**

- *Det eneste som skiller to førsteordens språk fra hverandre er de ikke-logiske symbolene.*

**Definisjon 2.3** (Signatur)**.**

- *De ikke-logiske symbolene utgjør det som kalles en signatur.*
- *En signatur angis ved et tuppel* $\langle c_1, c_2, c_3, \ldots; f_1, f_2, f_3, \ldots; R_1, R_2, R_3, \ldots \rangle$, *hvor konstant-, funksjons- og relasjonssymboler er adskilt med semikolon.*

## 2.2 Syntaks – Termer

**Definisjon 2.4** (Termer)**.** *Mengden $\mathcal{T}$ av* første-ordens termer *er induktivt definert som den minste mengden slik at:*

- *Enhver variabel og konstant er en term.*
- *Hvis $f$ er et funksjonssymbol med aritet $n$ og $t_1, \ldots, t_n$ er termer, så er $f(t_1, ..., t_n)$ en term.*

## 2.3 Eksempler på førsteordens språk

**Et enkelt språk:** $\langle a; f, g; P, R \rangle$

- Konstantsymboler: $a$
- Funksjonssymboler: $f$ (med aritet 1) og $g$ (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $P$ (med aritet 1) og $R$ (med aritet 2)

Termer i dette språket:

- $a$, $x$, $y$, $\ldots$, $f(a)$, $f(x)$, $f(y)$, $\ldots$
- $g(a,a)$, $g(a,x)$, $g(a,y)$, $g(x,x)$, $g(x,y)$, $g(y,y)$, $\ldots$
- $f(f(a))$, $f(f(x))$, $f(f(y))$, $\ldots$

**Notasjon.** *Så lenge det er entydig og ariteten er kjent, kan vi droppe parentesene og skrive $fa$, $fx$, $fy$, $gaa$, $gax$, $\ldots$.*

**Et språk for aritmetikk:** $\langle 0; s, +; = \rangle$

- Konstantsymboler: 0
- Funksjonssymboler: $s$ (med aritet 1) og $+$ (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$

Kommentarer:

- Termer: $x, y, 0, s0, ss0, sss0, +xy, +00, +(s0)0, +0s0, \ldots$
- *Ikke* termer: $=$ (x, x), $++$, $+0, \ldots$
- Når vi skriver $+xy$ bruker vi *prefiks notasjon*.
- Vi bruker også *infiks notasjon* og skriver: $(x + y), (0 + 0), (s0 + 0), (0 + s0), \ldots$.

**Et annet språk for aritmetikk:** $\langle 0, 1; +, \times; =, < \rangle$

- Konstantsymboler: $0, 1$
- Funksjonssymboler: $+$ og $\times$ (begge med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$ og $<$ (begge med aritet 2)

**Et språk for mengdelære:** $\langle \emptyset; \cap, \cup; =, \in \rangle$

- Konstantsymboler: $\emptyset$
- Funksjonssymboler: $\cap$ og $\cup$ (begge med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$ og $\in$ (begge med aritet 2)

Termer: $\emptyset$, $x \cap \emptyset$, $y \cup (x \cap z)$,...

## 2.4 Syntaks – Formler

**Definisjon 2.5** (Atomær formel – førsteordens)**.** *Hvis $R$ er et relasjonssymbol med aritet $n$ og $t_1, \ldots, t_n$ er termer, så er $R(t_1, \ldots, t_n)$ en atomær formel.*

**Merk.**

- *Hvis $R$ har aritet 0, så er $R$ en atomær formel. Dette svarer til utsagnsvariable i utsagnslogikk.*
- *Så lenge det er entydig og ariteten er kjent skriver vi $Rx$, $Rfa$, $Rafa$, etc. for $R(x)$, $R(f(a))$ og $R(a, f(a))$.*

**Definisjon 2.6** (Førsteordens formler)**.** *Mengden $\mathcal{F}$ av førsteordens formler er den minste mengden slik at:*

1. *Alle atomære formler er formler.*
2. *Hvis $\varphi$ og $\psi$ er formler, så er $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ og $(\varphi \rightarrow \psi)$ formler.*
3. *Hvis $\varphi$ er en formel og $x$ er en variabel, så er $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$ formler.*

*Alle forekomster av en variabel $x$ i $\varphi$ sies å være bundet i formlene $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$ og innenfor skopet til den gjeldende kvantoren.*

## 2.5 Eksempler på førsteordens formler

**Et språk for beundring:** $\langle a, b; ; \mathrm{Idol}, \mathrm{Liker} \rangle$

- Konstantsymboler: $a$ og $b$
- Funksjonssymboler: (ingen)

- Relasjonssymboler: $\mathsf{Idol}$ (med aritet 1) og $\mathsf{Liker}$ (med aritet 2)

Formler i språket:

Atomære formler:

| | | |
|---|---|---|
| **1**: | Alice er et idol: | $\mathsf{Idol}(a)$ |
| **2**: | Alice liker Bob: | $\mathsf{Liker}(a, b)$ |
| **3**: | $x$ liker Alice: | $\mathsf{Liker}(x, a)$ |

Signatur: $\langle a, b; -; \mathsf{Idol}, \mathsf{Liker}\rangle$

Ikke atomære formler:

| | | |
|---|---|---|
| **4**: | Alice liker alle: | $\forall x \mathsf{Liker}(a, x)$ |
| **5**: | Det finnes et idol: | $\exists x \mathsf{Idol}(x)$ |
| **6**: | Alice liker alle som Bob liker: | $\forall x(\mathsf{Liker}(b, x) \to \mathsf{Liker}(a, x))$ |
| **7**: | Noen liker seg selv: | $\exists x \mathsf{Liker}(x, x)$ |
| **8**: | Bob liker alle som liker seg selv: | $\forall x(\mathsf{Liker}(x, x) \to \mathsf{Liker}(b, x))$ |
| **9**: | Ingen liker både Alice og Bob: | $\neg\exists x(\mathsf{Liker}(x, a) \land \mathsf{Liker}(x, b))$ |
| **10**: | Noen liker ikke seg selv: | $\exists x \neg\mathsf{Liker}(x, x)$ |
| **11**: | Bob liker noen som liker Alice: | $\exists x(\mathsf{Liker}(b, x) \land \mathsf{Liker}(x, a))$ |
| **12**: | Alle liker noen: | $\forall x(\exists y \mathsf{Liker}(x, y))$ |
| **13**: | En som blir likt av alle er et idol: | $\forall x(\forall y \mathsf{Liker}(y, x) \to \mathsf{Idol}(x))$ |
| **14**: | Et idol blir likt av alle: | $\forall x(\mathsf{Idol}(x) \to \forall y \mathsf{Liker}(y, x))$ |

I språket for aritmetikk $\langle 0; s, +; =\rangle$, har vi formlene

- $s0 + s0 = ss0$ - "en pluss en er to"
- $\forall x \forall y(x + y = y + x)$ - "addisjon er kommutativt"
- $\forall x \exists y(y = sx)$ - "alle tall har en etterfølger"
- $\neg\exists x(0 = sx)$ - "0 er ikke etterfølgeren til noe"
- $\exists x \exists y \neg(x = y)$ - "det fins to forskjellige objekter"

## 2.6 Frie variable i termer

**Definisjon 2.7** (Frie variable i en term)**.** $\mathsf{FV}(t)$ *betegner mengden av frie variable i termen $t$.*

**Definisjon 2.8** (Lukket term)**.** *En term $t$ er lukket hvis* $\mathsf{FV}(t) = \emptyset$*, dvs. $t$ inneholder ingen frie variable.*

**Eksempel.** *I språket $\langle a, b; f; -\rangle$ har vi:*

- *Termen $f(x, a)$ har en fri variabel $x$.*
- *Termen $f(a, b)$ har ingen frie variable og er en lukket term.*

### 2.7 Rekursive definisjoner

Når mengder er definert *induktivt*, så kan vi definere funksjoner over denne mengden *rekursivt* ved å

1. gi verdi til de "atomære" elementene (i basismengden), og
2. gi verdi til "sammensatte" elementene (fra induksjonssteget) ved å bruke verdiene som ble gitt til komponentene.

Den presise, rekursive definisjonen av FV er følgende.

**Definisjon 2.9** (Frie variable – definert rekursivt)**.** *Gitt en term $t$, la mengden* $\mathrm{FV}(t)$ *av* frie variable *i $t$ være definert rekursivt ved:*

- $\mathrm{FV}(x_i) = \{x_i\}$, *for en variabel $x_i$, og*
- $\mathrm{FV}(c_i) = \emptyset$, *for en konstant $c_i$, og*
- $\mathrm{FV}(f(t_1, \dots, t_n)) = \mathrm{FV}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{FV}(t_n)$, *for et funksjonssymbol $f$ med aritet $n$.*

#### Frie variable i formler

**Definisjon 2.10** (Frie variable i en formel)**.** *En variabelforekomst i en førsteordens formel er* fri *hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver* $\mathrm{FV}(\varphi)$ *for mengden av frie variable i $\varphi$.*

**Eksempel** $(\forall x Rxy \land Pz)$**.**

- *$x$ er bundet*
- *$y$ er fri*
- *$z$ er fri*

**Eksempel** $(\forall x Pxy \to \forall z Pzx)$**.**

- *$x$ er bundet*
- *$x$ er fri*
- *$y$ er fri*
- *$z$ er bundet*

**Oppgave.** *Gi den presise, rekursive, definisjonen av frie variable i en formel.*

## 2.8 Substitusjoner

**Definisjon 2.11** (Substitusjon for termer)**.** *La $s$ og $t$ være termer og $x$ en variabel. Da er $s[t/x]$, det vi får ved å erstatte alle forekomster av $x$ i $s$ med $t$, definert rekursivt ved:*

1. $y[t/x] = \begin{cases} t & \text{hvis } x = y \\ y & \text{ellers} \end{cases}$ *(når $s$ er en variabel $y$).*
2. $c[t/x] = c$ *(når $s$ er en konstant $c$).*
3. $f(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$ *(når $s$ er en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$).*

**Eksempel.**

- $f(x, y, a)[y/x] = f(x[y/x], y[y/x], a[y/x]) = f(y, y, a)$
- $f(y, y, a)[b/y] = f(y[b/y], y[b/y], a[b/y]) = f(b, b, a)$

**Definisjon 2.12** (Substitusjon for formler)**.** *$\varphi[t/x]$ er definert rekursivt ved:*

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$
2. $\neg\psi[t/x] = \neg(\psi[t/x])$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)[t/x] = (\varphi_1[t/x] \circ \varphi_2[t/x])$, *hvor* $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
4. $\mathsf{Q}y\psi[t/x] = \begin{cases} \mathsf{Q}y(\psi[t/x]) & \text{hvis } x \neq y \\ \mathsf{Q}y\psi & \text{ellers} \end{cases}$, *hvor* $\mathsf{Q} \in \{\forall, \exists\}$

**Eksempel.**

- $(Pxy \wedge \forall x Pxy)[a/x] = (Pay \wedge \forall x Pxy)$
- $(Pxy \wedge \forall x Pxy)[a/y] = (Pxa \wedge \forall x Pxa)$

- Vi ser at substitusjon ikke blir gjort for bundne variable.
- Vi har enda et tilfelle hvor vi ønsker å forhindre substitusjon.

**Eksempel.**

- $\exists x \mathsf{Liker}(x, y)[f(x)/y] = \exists x \mathsf{Liker}(x, f(x))$

- Her blir en variabel bundet *etter* substitusjon.
- Dette kan endre meningen til en formel på en måte som vi ikke ønsker.

**Definisjon 2.13.** *Vi sier at $t$ er fri for $x$ i $\varphi$ hvis ingen variabel i $t$ blir bundet som følge av å substitutere $t$ for $x$ i $\varphi$.*

**Eksempel.** *Termen $f(x)$ er ikke fri for $y$ i formelen $\exists x \mathsf{Liker}(x, y)$.*

- En måte å unngå dette på er å omdøpe bundne variable først.
- F.eks. se på $\exists z \mathsf{Liker}(z, y)$ i stedet for $\exists x \mathsf{Liker}(x, y)$.
- Fra nå av antar vi at alle substitusjoner er "fri for", dvs. at ingen variable blir bundet som følge av en substitusjon.

## 2.9 Lukkede og åpne formler

**Definisjon 2.14** (Lukket/åpen formel)**.** *En formel $\varphi$ er* lukket *hvis* $\mathrm{FV}(\varphi) = \emptyset$*, dvs. $\varphi$ inneholder ingen frie variable. En formel er* åpen *hvis den ikke inneholder noen kvantorer.*

**Eksempel.**

- $\forall xPxa$ *er lukket*
- $\forall xPxy$ *er* ikke *lukket*
- $Pxy$ *er* ikke *lukket, men åpen*
- $Pab$ *er åpen* og *lukket*

# 3 Førsteordens logikk – semantikk

## 3.1 Introduksjon

- Hvordan skal vi *tolke* førsteordens formler?
- Hva skal $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$ bety?
- Hva gjør en formel *sann* / *gyldig* / *oppfyllbar*?
- Å gi en semantikk er å si noe om forholdet mellom språk og virkelighet.
  - Valuasjoner gir en semantikk for klassisk utsagnslogikk.
- I førsteordens logikk vil *modeller* gi oss en semantikk.

En modell består intuitivt av

1. en mengde, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler slik at
   - et konstantsymbol tolkes som et element i mengden,
   - et funksjonssymbol tolkes som en funksjon på mengden, og
   - et relasjonssymbol tolkes som en relasjon på mengden.

Vi skal først definere modeller helt presist, også skal vi definere hva det vil si at en formel er sann i en modell.

#### Husk

Hvis $D$ er en mengde, så består $D^n$ av alle $n$-tupler av elementer fra $D$, for $n \geq 0$.

$$D^n = \{\langle d_1, \ldots, d_n\rangle \mid d_1, \ldots, d_n \in D\}$$

## 3.2 Modeller

La et førsteordens språk $\mathcal{L}$ være gitt.

**Definisjon 3.1** (Modell)**.** *En* modell $\mathcal{M}$ *for* $\mathcal{L}$ *består av en ikke-tom mengde* $D$*, kalt* domenet *til* $\mathcal{M}$*, og en funksjon* $(\cdot)^{\mathcal{M}}$ *som tolker alle ikke-logiske symboler på følgende måte:*

- *Hvis* $c$ *er et konstantsymbol, så er* $c^{\mathcal{M}} \in D$*.*
- 1 *Hvis* $f$ *er et funksjonsymbol med aritet* $n$*,så er* $f^{\mathcal{M}}$ *en funksjon fra* $D^n = \underbrace{D \times \cdots \times D}_{n}$ *til* $D$*.*
- 2 *Hvis* $R$ *er et relasjonssymbol med aritet* $n$*,så er* $R^{\mathcal{M}}$ *en relasjon på* $D^n = \underbrace{D \times \cdots \times D}_{n}$*.*

*Vi skriver* $|\mathcal{M}|$ *for domenet* $D$ *til modellen* $\mathcal{M}$*.*

**Noen kommentarer**

1. Et funksjonssymbol $f$ med aritet 0 kan betraktes som en konstant.
   - Da er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra $D^0$ til $D$.
   - 3 Siden $D^0$ består av kun ett element $\langle\rangle$ – det tomme tuppelet – så består $f^{\mathcal{M}}$ også av kun ett element $\langle\langle\rangle, e\rangle$, hvor $e \in D$.
   - Vi kan derfor identifisere $f^{\mathcal{M}}$ med $e$.
2. Et relasjonssymbol $R$ med aritet 0 kan betraktes som en utsagnsvariabel.
   - Da er $R^{\mathcal{M}}$ en delmengde av $D^0$.
   - 4 Siden $D^0$ består av kun ett element $\langle\rangle$ – det tomme tuppelet -så fins det nøyaktig to muligheter for $R^{\mathcal{M}}$.
   - Enten så er $R^{\mathcal{M}}$ tom eller så er $\langle\rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
   - Vi kan derfor tenke på mengden $\{\emptyset, \{\langle\rangle\}\}$ av delmengder av $D^0$ som **Bool**.
3. Et tuppel $\langle e\rangle$, hvor $e \in D$, kan vi identifisere med elementet $e$.
   - 5 Når et relasjonssymbol $R$ har aritet 1,så skriver vi derfor $\{e_1, \ldots, e_n\}$ i stedet for $\{\langle e_1\rangle, \ldots, \langle e_n\rangle\}$.
   - Vi antar derfor også at $R^{\mathcal{M}} \subseteq D$.

## 3.3 Hovedeksempel – et figurspråk

| Relasjonssymbol | aritet |
|---|---|
| Sirkel | 1 |
| Firkant | 1 |
| Trekant | 1 |
| Stor | 1 |
| Liten | 1 |
| Mindre | 2 |

- Konstantsymboler: $a, b, c, d, e, f$.
- Funksjonssymboler: ingen.
- Vi leser på denne måten:

  Sirkel($x$): "$x$ er en sirkel"

  Firkant($x$): "$x$ er en firkant"

  Trekant($x$): "$x$ er en trekant"

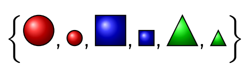
  Stor($x$): "$x$ er stor"

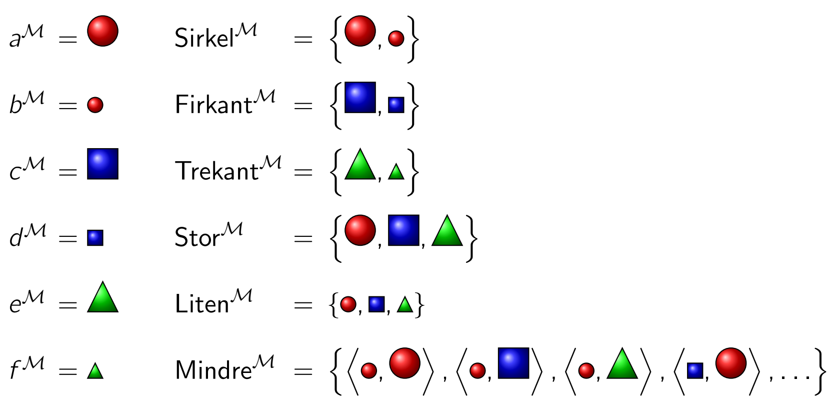
  Liten($x$): "$x$ er liten"

  Mindre($x, y$): "$x$ er mindre enn $y$"

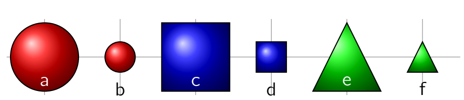
La oss nå lage en modell for dette språket!

**En tolkning av figurspråket**

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $D =$ .




Vi foregriper begivenhetene og ser på hvilke atomære formler som er sanne og usanne i modellen $\mathcal{M}$.



| **Sant** | **Usant** |
|---|---|
| • Sirkel($a$) | • Trekant($a$) |
| • Firkant($c$) | • Stor($b$) |
| • Liten($b$) | • Mindre($a, b$) |
| • Mindre($b, e$) | • Mindre($a, a$) |

### Variabeltilordninger

- En modell tolker konstantsymboler, funksjonssymboler, og relasjonssymboler, men...
- ...ikke variabler. Derfor definerer vi...

**Definisjon 3.2** (Variabeltilordning)**.** *La $\mathcal{M}$ være en modell. En* variabeltilordning *for $\mathcal{M}$ er en funksjon $\mu : \mathcal{V} \to |\mathcal{M}|$ fra mengen av variable til domenet.*

- En variabeltilordning er alltid gitt relativ til en modell $\mathcal{M}$ siden den tolker variable som elementer i domenet til $\mathcal{M}$.
- For en gitt modell kan vi ha mange variabeltilordninger.
- Hvis $|\mathcal{M}| = \{1, 2, 3\}$, så kan vi ha
  - $\mu_1$ slik at $\mu_1(x_1) = 1$, $\mu_1(x_2) = 1$, $\mu_1(x_3) = 1$, ...
  - $\mu_2$ slik at $\mu_2(x_1) = 2$, $\mu_2(x_2) = 2$, $\mu_2(x_3) = 2$, ...
  - $\mu_3$ slik at $\mu_3(x_1) = 1$, $\mu_3(x_2) = 2$, $\mu_3(x_3) = 3$, ...
  - ...

### Modifikasjon av variabeltilordninger

**Definisjon 3.3.** *La $\mu$ være en variabeltilordning for en modell $\mathcal{M}$, $x \in \mathcal{V}$ en variabel, og $a \in |\mathcal{M}|$ et element av domenet. Vi definerer* modisikasjonen av $\mu$ på $x$ till $a$*, skrevet $\mu\{x \mapsto a\}$, gjennom:*

$$\mu\{x \mapsto a\}(y) := \begin{cases} a & \textit{hvis } x{=}y \\ \mu(y) & \textit{ellers} \end{cases}$$

*for alle variabler $y \in \mathcal{V}$.*

La $\mu$ være slik at $\mu(x_1) = 1$, $\mu(x_2) = 1$, $\mu(x_3) = 1$, ...

Hvis $\mu' = \mu\{x_2 \mapsto 2\}$, so er $\mu'(x_1) = 1$, $\mu'(x_2) = 2$, $\mu'(x_3) = 1$, ...

## 3.4 Tolkning av termer og formler

### Tolkning av termer

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler
- Tolkningen av variable overlates til variabeltilordningen.

**Definisjon 3.4** (Tolkning av termer)**.** *La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. La $\mu$ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Tolkningen av en term $t$ i $\mathcal{M}$ under $\mu$, skrevet $t^{\mathcal{M},\mu}$, defineres induktivt.*

- $x^{\mathcal{M},\mu} = \mu(x)$ *for en variabel* $x$
- $c^{\mathcal{M},\mu} = c^{\mathcal{M}}$ *for et konstantsymbol* $c$
- $f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{M},\mu} = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu})$ *for en funksjonsterm*

### Tolkning av formler

**Definisjon 3.5** (Tolkning av formler)**.** *La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. La $\mu$ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Vi definerer ved induksjon hva det vil si at en formel $\varphi$ er* sann *i $\mathcal{M}$ under $\mu$; vi skriver $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ når $\varphi$ er sann i $\mathcal{M}$ under $\mu$.*

- *Atomære fml:* $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \ldots, t_n)$ *hvis* $\langle t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \neg\varphi$ *hvis det ikke er tilfelle at* $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \land \psi$ *hvis* $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ *og* $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \lor \psi$ *hvis* $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ *eller* $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \to \psi$ *hvis* $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ *impliserer* $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \forall x\varphi$ *hvis* $\mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\} \models \varphi$ *for alle* $a$ *i* $|\mathcal{M}|$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \exists x\varphi$ *hvis* $\mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\} \models \varphi$ *for minst en* $a$ *i* $|\mathcal{M}|$.

### Koinsidenslemma

- $t^{\mathcal{M},\mu}$ er uavhengig av $\mu$ for variabler som ikke forekommer i $t$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ er uavhengig av $\mu$ for variabler som ikke forekommer *fritt* i $\varphi$.

**Lemma 3.1** (Koinsidenslemma)**.** *La $t$ være en term, $\mathcal{M}$ en modell, og $\mu$ og $\nu$ to variabeltilordninger med $\mu(x) = \nu(x)$ for alle $x \in \mathrm{FV}(t)$. Da er $t^{\mathcal{M},\mu} = t^{\mathcal{M},\nu}$.*

*La $\varphi$ være en formel, $\mathcal{M}$ en modell, og $\mu$ og $\nu$ to variabeltilordninger med $\mu(x) = \nu(x)$ for alle $x \in \mathrm{FV}(\varphi)$. Da gjelder $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ hviss $\mathcal{M}, \nu \models \varphi$.*

For lukkede termer $t$ og formler $\varphi$: skriv $t^{\mathcal{M}}$ og $\mathcal{M} \models \varphi$.

**Definisjon 3.6** (Oppfyllbarhet)**.** *En lukket formel $\varphi$ er* oppfyllbar *hvis det fins en modell $\mathcal{M}$ som gjør $\varphi$ sann. Vi sier også at $\mathcal{M}$ oppfyller $\varphi$ og at $\mathcal{M}$ er en modell for $\varphi$.*

**Oppfyllbar**

- $\exists x \mathrm{Liten}(x)$
- $\exists x(\mathrm{Liten}(x) \wedge \mathrm{Stor}(x))$
- $\exists x Px \rightarrow \forall x Px$

**Ikke oppfyllbar**

- $Pa \wedge \neg Pa$
- $\exists x(\mathrm{Liten}(x) \wedge \neg \mathrm{Liten}(x))$
- $\neg \mathrm{Stor}(a) \wedge \forall x \mathrm{Stor}(x)$

**Definisjon 3.7** (Gyldighet)**.** *En lukket formel $\varphi$ er* gyldig *hvis den er sann i alle modeller $\mathcal{M}$, ellers så er den* falsifiserbar*.*

**Gyldig**

- $\forall x Pxa \rightarrow \forall z Pza$
- $(\forall x Px \wedge \forall y Qy) \rightarrow \forall x Px$
- $\exists x \mathrm{Liten}(x) \vee \exists x \neg \mathrm{Liten}(x)$

**Ikke gyldig (falsfiserbar)**

- $\forall x Px$
- $\exists x \mathrm{Stor}(x) \rightarrow \forall x \mathrm{Stor}(x)$
- $\exists x Px \rightarrow \exists x(Px \wedge Qx)$

## 3.5 Oppsummering

En modell $\mathcal{M}$ for et språk $\mathcal{L}$ består av

1. en ikke-tom mengde $|\mathcal{M}|$, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler i språket.

For eksempel, hvis $\mathcal{L}$ er språket ⟨ 🚺 , 🚹 , ☕ ; 🏭 ; ♀ , ♂ ⟩, så må en modell $\mathcal{M}$ gi et domene og en tolkning til alle symbolene.

- 🚺$^{\mathcal{M}}$, 🚹$^{\mathcal{M}}$ og ☕$^{\mathcal{M}}$ må være elementer i domenet.
- 🏭$^{\mathcal{M}}$ må være en funksjon på domenet
- ♀$^{\mathcal{M}}$ og ♂$^{\mathcal{M}}$ må være relasjoner på domenet.
- Husk på ariteten til symbolene. (🏭 har aritet 2; ♀ og ♂ har aritet 1.)

Hvis $\mathcal{M}$ er en modell og $\varphi$ er en lukket formel, så definerte vi $\mathcal{M} \models \varphi$.

- For atomære formler: $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.

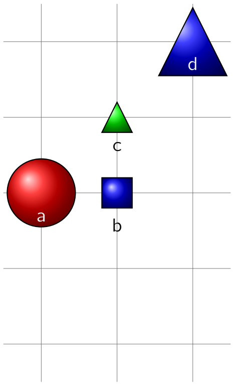
- $\mathcal{M}, \mu \models \neg\varphi$ hvis det *ikke* er tilfelle at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \wedge \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ *og* $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \vee \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ *eller* $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \rightarrow \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ *impliserer* $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \forall x\varphi$ hvis $\mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\} \models \varphi$ *for alle* $a \in |\mathcal{M}|$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \exists x\varphi$ hvis $\mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\} \models \varphi$ *for minst en* $a \in |\mathcal{M}|$.

## 3.6 Språk og modeller – et komplekst forhold

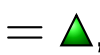
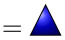
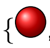
- Ved førsteordens språk har vi fått betydelig større uttrykkskraft.
- Modeller kan være rike på struktur.
- Det er et ikke-trivielt forhold mellom språk og modeller.
- Noe av det vi er interessert i:
  - Sjekke om en formel er sann i en modell. (Modellsjekking)
  - Sjekke om en formel er oppfyllbar eller falsifiserbar.
  - Sjekke om en formel er gyldig.
  - Sjekke om formler er uavhengige av hverandre.
  - Bruke språket til å beskrive modeller, forsøke å "fange inn" og beskrive virkeligheten.

## 3.7 En utvidelse av figurspråket

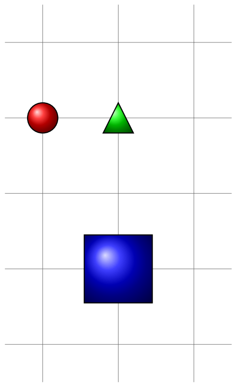
| Atomær formel | Intendert tolkning |
|---|---|
| Sirkel($x$) | $x$ er en sirkel |
| Firkant($x$) | $x$ er en firkant |
| Trekant($x$) | $x$ er en trekant |
| Stor($x$) | $x$ er stor |
| Liten($x$) | $x$ er liten |
| Mindre($x, y$) | $x$ er mindre enn y |
| Over($x, y$) | $x$ er nærmere toppen enn $y$ |
| Under($x, y$) | $x$ er nærmere bunnen enn $y$ |
| VenstreFor($x, y$) | $x$ er lenger til venstre enn $y$ |
| HoyreFor($x, y$) | $x$ er lenger til høyre enn $y$ |
| Inntil($x, y$) | $x$ er rett ved siden av, rett over eller rett under $y$ |
| Mellom($x, y, z$) | $x$, $y$ og $z$ er i samme kolonne, rad eller diagonal, og $x$ er mellom $y$ og $z$ |




Forklarende eksempler til semantikken:

- $a^{\mathcal{M}} =$ , $b^{\mathcal{M}} =$ , $c^{\mathcal{M}} =$ , $d^{\mathcal{M}} =$  (vi antar at dette er alle konstantene)
- $\mathsf{Trekant}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\mathsf{Stor}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\mathsf{Liten}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\mathcal{M} \models \mathsf{Under}(a, c)$ fordi $\langle a^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}} \rangle = \langle$, $\rangle \in \mathsf{Under}^{\mathcal{M}}$
- $\mathcal{M} \models \neg\mathsf{Under}(a, b)$
- $\mathcal{M} \models \mathsf{VenstreFor}(a, c) \wedge \neg\mathsf{VenstreFor}(b, c)$
- $\mathcal{M} \models \mathsf{Inntil}(a, b) \wedge \neg\mathsf{Inntil}(a, c)$
- $\mathcal{M} \models \mathsf{Mellom}(c, a, d) \wedge \neg\mathsf{Mellom}(c, b, d)$

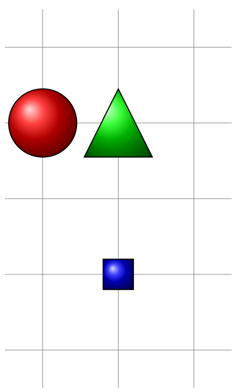
## 3.8 Oppfyllbarhet av førsteordens formler



- Er det slik at $\mathcal{M} \vDash \exists x \mathsf{Liten}(x)$ ?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\begin{gathered}
\mathcal{M}, \mu \models \exists x \mathsf{Liten}(x) \\
\Updownarrow \\
\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at} \\
\mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\} \models \mathsf{Liten}(x) \\
\Updownarrow \\
\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } x^{\mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\}} \in \mathsf{Liten}^{\mathcal{M}} \\
\Updownarrow \\
\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mu\{x \mapsto a\}(x) \in \mathsf{Liten}^{\mathcal{M}} \\
\Updownarrow \\
\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } a \in \mathsf{Liten}^{\mathcal{M}}
\end{gathered}$$

- Siden $\mathsf{Liten}^{\mathcal{M}} = \{, \}$, kan vi konkludere med **JA**.



- Er det slik at $\mathcal{M} \models \forall x \mathsf{Stor}(x)$ ?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\begin{gathered}
\mathcal{M}, \mu \models \forall x \mathsf{Stor}(x) \\
\Updownarrow \\
\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\} \models \mathsf{Stor}(x) \\
\Updownarrow \\
\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } x^{\mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\}} \in \mathsf{Stor}^{\mathcal{M}} \\
\Updownarrow \\
\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \mu\{x \mapsto a\}(x) \in \mathsf{Stor}^{\mathcal{M}} \\
\Updownarrow \\
\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } a \in \mathsf{Stor}^{\mathcal{M}}
\end{gathered}$$

- Siden $|\mathcal{M}| = \{, , \}$ og $\mathsf{Stor}^{\mathcal{M}} = \{, \}$, så kan vi konkludere med **NEI**.