INF3170 – Logikk

Forelesning 7: Førsteordens logikk – sekventkalkyle og sunnhet

Christian Mahesh Hansen

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

3. mars 2007

Dagens plan

Et førsteordens språk $\mathcal{L}$ består av:

1. Logiske symboler
   - konnektiver: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ og $\neg$
   - hjelpesymboler: '(' og ')' og ','
   - kvantorer: $\exists$ og $\forall$
   - variable: $\mathcal{V} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$
2. Ikke-logiske symboler:
   - en tellbar mengde konstantsymboler
   - en tellbar mengde funksjonssymboler (med aritet)
   - en tellbar mengde relasjonssymboler (med aritet)

- De ikke-logiske symbolene utgjør en signatur

$$\langle \underbrace{\{c_1, c_2, c_3, \ldots\}}_{\textit{konstantsymboler}}; \underbrace{\{f_1, f_2, f_3, \ldots\}}_{\textit{funksjonssymboler}}; \underbrace{\{R_1, R_2, R_3, \ldots\}}_{\textit{relasjonssymboler}} \rangle.$$

Hvis et førsteordens språk $\mathcal{L}$ er gitt, så får vi (definert induktivt):

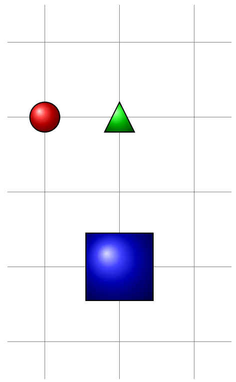
1. Mengden $\mathcal{T}$ av termer i $\mathcal{L}$:
   - Enhver variabel og konstant er en term.
   - Hvis f er et funksjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer,så er $f(t_1, ..., t_n)$ en term.
2. Mengden $\mathcal{F}$ av formler i $\mathcal{L}$:
   - Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer,så er $R(t_1, \ldots, t_n)$ en (atomær) formel.
   - Hvis φ og ψ er formler,så er $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ og $(\varphi \rightarrow \psi)$ formler.
   - Hvis φ er en formel og x er en variabel,så er $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$ formler.

   Alle forekomster av en variabel x i φ sies å være bundet i formlene $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$ og innenfor skopet til den gjeldende kvantoren.

Hvis $\mathcal{M}$ er en modell, μ en variabeltilordning for $\mathcal{M}$, og φ er en formel, så definerte vi $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$.

- For atomære formler: $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu} \rangle \in R^{\mathcal{M},\mu}$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \land \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \lor \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ eller $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \to \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ impliserer $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \forall x\varphi$ hvis $\mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\} \models \varphi$ for alle a i $|\mathcal{M}|$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \exists x\varphi$ hvis $\mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\} \models \varphi$ for minst en a i $|\mathcal{M}|$.

Oppfyllbarhet

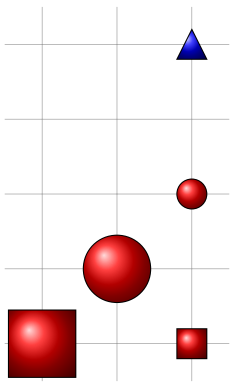


- Er det slik at $\mathcal{M} \models \exists x \mathrm{Liten}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\mathcal{M}, \mu \models \exists x \mathrm{Liten}(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\} \models \mathrm{Liten}(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } x^{\mathcal{M},\mu\{x\mapsto a\}} \in \mathrm{Liten}^{\mathcal{M}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mu\{x \mapsto a\}(x) \in \mathrm{Liten}^{\mathcal{M}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } a \in \mathrm{Liten}^{\mathcal{M}}$$

- Siden $\mathrm{Liten}^{\mathcal{M}} = \{\ ,\ \}$, kan vi konkludere med **JA**.

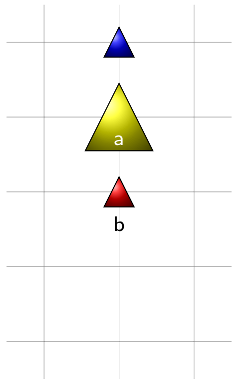
Oppfyllbarhet



$$\mathcal{M} \models \forall x(\mathrm{Sirkel}(x) \to \exists y \exists z \mathrm{Mellom}(x, y, z))$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \mathcal{M}, \{x \mapsto a\} \models \mathrm{Sirkel}(x) \to \exists y \exists z \mathrm{Mellom}(x, y, z)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{for alle sirkler } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \mathcal{M}, \{x \mapsto a\} \models \exists y \exists z \mathrm{Mellom}(x, y, z)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{for alle sirkler } a \in |\mathcal{M}| \text{ så fins } b, c \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M}\{x \mapsto a, y \mapsto b, z \mapsto c\} \models \mathrm{Mellom}(x, y, z)$$

Påstanden holder, fordi $\langle\ ,\ ,\ \rangle \in \mathrm{Mellom}^{\mathcal{M}}$ og $\langle\ ,\ ,\ \rangle \in \mathrm{Mellom}^{\mathcal{M}}$.

Oppfyllbarhet

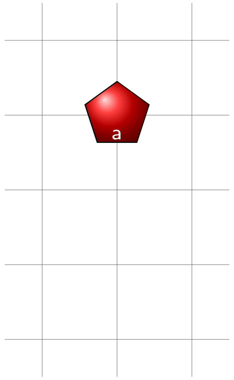


Er følgende formler oppfyllbare samtidig?

1. $\mathrm{Stor}(a) \land \mathrm{Liten}(b)$
2. $\forall x(\mathrm{Trekant}(x))$
3. $\forall x(\mathrm{Inntil}(x, a) \lor \mathrm{Inntil}(x, b))$
4. $\neg\exists x(\mathrm{VenstreFor}(x, a) \lor \mathrm{HoyreFor}(x, a))$
5. $\forall x(\mathrm{Stor}(x) \to \exists y \mathrm{Over}(y, x))$

Svaret er JA!

Oppfyllbarhet



Er følgende formler oppfyllbare?

1. $\neg\text{Sirkel}(a) \land \neg\text{Trekant}(a) \land \neg\text{Firkant}(a))$

   Svaret er JA!

   La $|\mathcal{M}| = \{⬟\}$ og $a^{\mathcal{M}} = ⬟$.

2. $\text{Liten}(a) \land \text{Stor}(a)$

   Svaret er JA!

   La $|\mathcal{M}| = \{🚲\}$, $a^{\mathcal{M}} = 🚲$ og $\text{Liten}^{\mathcal{M}} = \text{Stor}^{\mathcal{M}} = \{🚲\}$

Introduksjon

- Vi har til nå sett sekventkalkyle for utsagnslogikk.
- Vi har bevist sunnhet og kompletthet av denne kalkylen.
- Nå skal vi gjøre det samme for førsteordens logikk!
- Gitt en førsteordens formel φ, er φ gyldig?
- Husk: vi introduserte LK som et systematisk forsøk på å falsifisere.
- La oss se på et eksempel.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\neg Qa, Pa \vdash Pa}}{\neg Qa \vdash \neg Pa, Pa}}{\vdash Pa, \neg Qa \to \neg Pa} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\times}{Qa \vdash Qa, \neg Pa}}{Qa, \neg Qa \vdash \neg Pa}}{Qa \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{Pa \to Qa \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\dfrac{\forall x(Px \to Qx) \vdash \neg Qa \to \neg Pa}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
  - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x.
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Da må delformelen være sann uansett hva vi setter inn for x.
  - Spesielt må delformelen være sann når vi setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene og lukke.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\times$}
\noLine
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to Qx), \neg Qa, Pa, Po \to Qo \vdash Pa$}
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to Qx), \neg Qa, Po \to Qo \vdash \neg Pa, Pa$}
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash Pa, \neg Qa \to \neg Pa$}
\AxiomC{$\times$}
\noLine
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to Qx), Qa, Po \to Qo \vdash Qa, \neg Pa$}
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to Qx), Qa, \neg Qa, Po \to Qo \vdash \neg Pa$}
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to Qx), Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa$}
\BinaryInfC{$\forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa$}
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa$}
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)$}
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)$}
\end{prooftree}
$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Hva skal vi sette inn for x? Vi bruker en *dummykonstant* o.
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o. Setter inn a.
- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x!
  - Vi må ta kopi av $\forall$-formelen når vi setter inn for x.
  - Setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene og lukke.

Motivasjon

- Vi skal nå definere sekventkalkylen LK for førsteordens logikk.
- Vi trenger slutningsregler for formler med kvantorene $\forall/\exists$.
- Fra de foregående eksemplene har vi:
  - Hvis vi skal oppfylle en formel $\forall x\varphi$ så må vi oppfylle $\varphi[t/x]$ for alle valg av term t.
  - I tillegg trenger vi en ekstra kopi av $\forall x\varphi$.
  - Hvis vi skal falsifisere $\forall x\varphi$ må vi velge et vitne – et ubrukt konstantsymbol a – slik at $\varphi[a/x]$ er usann.
  - Å oppfylle/falsifisere $\exists$-formler blir dualt.
- Vi skal nå definere begreper som sekvent, aksiom, utledning og bevis for førsteordens språk.

Sekventer og aksiomer

Definisjon (Parameter)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og la par være en tellbart uendelig mengde av konstantsymboler, kalt parametre, forskjellige fra konstantsymbolene i $\mathcal{L}$. La $\mathcal{L}^{\text{par}}$ være førsteordens språket man får ved å ta med disse som konstantsymboler.

Definisjon (Sekvent)

En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av lukkede førsteordens formler i $\mathcal{L}^{\text{par}}$.

Definisjon (Aksiom)

Et aksiom er en sekvent på formen $\Gamma, A \vdash A, \Delta$ slik at A er en atomær formel.

Sekventer og aksiomer

Oppgave

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- $Px \vdash Qx$
- $\forall x Px \vdash \exists x Qx$
- $Pa, \forall x(Qx \to Rx) \vdash Qb \to Rb$
- $\forall x Px, Pa \vdash Pa, \exists x Pa$

Hvilke av sekventene over er aksiomer?

Sekventkalkyleregler

Definisjon (γ-regler)

γ-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\forall \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi}\ \mathsf{R}\exists$$

t er en lukket term

Merk: kopieringen av hovedformelen i γ-reglene medfører at bevissøk i førsteordens logikk ikke nødvendigvis behøver å terminere!

Sekventkalkyleregler

Definisjon (δ-regler)

δ-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\exists \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\varphi}\ \mathsf{R}\forall$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen.

Sekventkalkyleregler

- γ-reglene erstatter den bundne variabelen med en lukket term.
- δ-reglene erstatter den bundne variabelen med et konstantsymbol.
- Det betyr at hvis hovedformelen er lukket, så er også de aktive formlene lukkede.
- γ- og δ-reglene er derfor veldefinerte i den forstand at alle sekventer forblir lukket.

Definisjon (Slutningsreglene i førsteordens LK)

Slutningsreglene i førsteordens LK er α- og β-reglene fra utsagnslogisk LK og γ- og δ-reglene.

Slutninger

- Som i utsagnslogikk definerer reglene slutninger ved at vi erstatter symbolene i reglene med lukkede førsteordens formler:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\forall \quad \Bigg| \quad \frac{Pa, \forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa \vdash Qa}{Pa, \forall x(Px \to Qx) \vdash Qa}\ \mathsf{L}\forall$$

- Begrepene innført i tilknytning til regler/slutninger i utsagnslogisk LK gjelder også i førsteordens LK:
- Sekventene *over* streken kalles premisser.
- Sekventen *under* streken kalles konklusjon.
- Teksten til høyre for streken er regelens navn.
- Formelen som forekommer eksplisitt i konklusjonen kalles hovedformel.
- Formlene som forekommer eksplisitt i premissene kalles aktive formler.
- Formlene som forekommer i Γ og Δ kalles ekstraformler.

Utledninger

- Ett-premissregler: α-, γ- og δ-reglene.
- To-premissregler: β-reglene.

Definisjon (LK-utledninger – basistilfelle)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$, hvor Γ og Δ er multimengder av lukkede førsteordens formler i $\mathcal{L}$, er en LK-utledning.

$$\Gamma \vdash \Delta$$

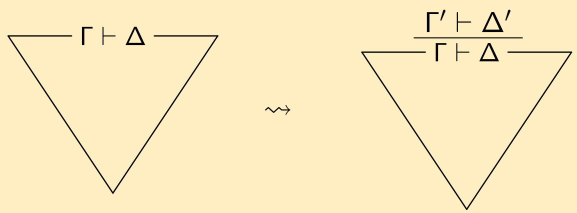
Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og løvsekvent.

- Merk: språket $\mathcal{L}^{\mathrm{par}}$ brukes ikke i rotsekventen, men kun for å introdusere nye parametre i δ-reglene.

Utledninger

Definisjon (LK-utledninger – ett-premissutvidelse)

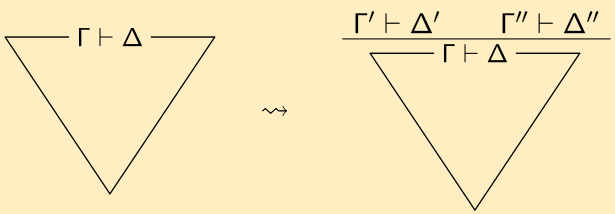
Hvis det finnes en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en ett-premisslutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premiss $\Gamma' \vdash \Delta'$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en LK-utledning.



Utledninger

Definisjon (LK-utledninger – to-premissutvidelse)

Hvis det finnes en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en to-premisslutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premisser $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en LK-utledning.



Bevis

Definisjon (LK-bevis)

Et LK-bevis er en LK-utledning der alle løvsekventene er aksiomer.

Definisjon (LK-bevisbar)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er LK-bevisbar hvis det finnes et LK-bevis med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.

Eksempel 1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall xPx, Pa \vdash Pa}}{\forall xPx \vdash Pa}}{\forall xPx \vdash \forall xPx}$$

- Dette viser at sekventen $\forall xPx \vdash \forall xPx$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig, noe som er lett å se:
  - Envher modell som oppfyller antecedenten, må oppfylle succedenten.
- At sekventen er gyldig følger også fra sunnhetsteoremet.

Eksempel 2

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall xPx, Po \vdash \exists xPx, Po}}{\forall xPx \vdash \exists xPx, Po}}{\forall xPx \vdash \exists xPx}$$

- Dette viser at sekventen $\forall xPx \vdash \exists xPx$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\forall xPx$ sann.
  - Domenet må bestå av minst ett element e.
  - Siden $\mathcal{M} \models \forall xPx$ sann, gjelder også $\mathcal{M}, \{x \mapsto e\} \models Px$.
  - Siden $\mathcal{M}, \{x \mapsto e\} \models Px$, gjelder også $\mathcal{M} \models \exists xPx$.
- At sekventen er gyldig følger også fra sunnhetsteoremet.

Eksempel 3

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall xPx} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall xQx}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall xPx \land \forall xQx}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall xPx \land \forall xQx$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\forall x(Px \land Qx)$ sann.
  - Velg et vilkårlig element e i domenet til $\mathcal{M}$.
  - Ved antakelsen gjelder $\mathcal{M}, \{x \mapsto e\} \models Px \land Qx$.
  - Da må også $\mathcal{M}, \{x \mapsto e\} \models Px$ og $\mathcal{M}, \{x \mapsto e\} \models Qx$ gjelde.
  - Siden e var vilkårlig valgt, må $\mathcal{M}$ også gjøre $\forall xPx$ og $\forall xQx$ sanne.
- At sekventen er gyldig følger også fra sunnhetsteoremet.

Eksempel 4

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall xLxa, Lba \vdash Lba, \exists yLby}}{\forall xLxa, Lba \vdash \exists yLby}}{\forall xLxa \vdash \exists yLby}}{\forall xLxa \vdash \forall x\exists yLxy}}{\exists y\forall xLxy \vdash \forall x\exists yLxy}$$

- Dette viser at sekventen $\exists y\forall xLxy \vdash \forall x\exists yLxy$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\exists y\forall xLxy$ sann.
  - Da fins det et element a slik at $\mathcal{M}, \{y \mapsto a\} \models \forall xLxy$.
  - For å vise at $\forall x\exists yLxy$ er sann i $\mathcal{M}$, velg et vilkårlig element b.
  - Det er nok å vise at $\mathcal{M}, \{x \mapsto b\} \models \exists yLxy$.
  - Vi har at $\mathcal{M}, \{y \mapsto a, x \mapsto b\} \models Lxy$ er sann i $\mathcal{M}$, siden $\mathcal{M}, \{y \mapsto a\} \models \forall xLxy$.
  - "Hvis det fins en som blir likt av alle, så har alle noen de liker."
- At sekventen er gyldig følger også fra sunnhetsteoremet.

Eksempel 5

$$
\begin{array}{rcl}
 & \vdots & \\
\forall x\exists yLxy, Lbc, Loa & \vdash & Lba, Ldc, \exists y\forall xLxy \\ \hline
\forall x\exists yLxy, Lbc, Loa & \vdash & Lba, \forall xLxc, \exists y\forall xLxy \\ \hline
\forall x\exists yLxy, Lbc, Loa & \vdash & Lba, \exists y\forall xLxy \\ \hline
\forall x\exists yLxy, \exists yLby, Loa & \vdash & Lba, \exists y\forall xLxy \\ \hline
\forall x\exists yLxy \forall x\exists yLxy, Loa & \vdash & Lba, \exists y\forall xLxy \\ \hline
\forall x\exists yLxy, Loa & \vdash & \forall xLxa, \exists y\forall xLxy \\ \hline
\forall x\exists yLxy, Loa & \vdash & \exists y\forall xLxy \\ \hline
\forall x\exists yLxy, \exists yLoy & \vdash & \exists y\forall xLxy \\ \hline
\forall x\exists yLxy & \vdash & \exists y\forall xLxy
\end{array}
$$

Eksempel 5

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x\exists yLxy \vdash \exists y\forall xLxy$.
- Kan vi klare å lage en motmodell?
  - Når vi kommer til kompletthet, så skal vi se at det *alltid* fins en motmodell for ikke-bevisbare sekventer.
- **JA**, la $\mathcal{M} = \{a, b\}$ og la $L^{\mathcal{M}} = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$.
- "Alle liker seg selv og ingen andre."
- Da vil $\mathcal{M} \models \forall x\exists yLxy$.
  - $\mathcal{M}, \{x \mapsto a\} \models \exists yLxy$, siden $\mathcal{M}, \{x \mapsto a, y \mapsto a\} \models Lxy$.
  - $\mathcal{M}, \{x \mapsto b\} \models \exists yLxy$, siden $\mathcal{M}, \{x \mapsto b, y \mapsto b\} \models Lxy$.
- Og $\mathcal{M} \not\models \exists y\forall xLyx$.
  - $\mathcal{M}, \{y \mapsto a\} \not\models \forall xLxy$, siden $\mathcal{M}, \{x \mapsto b, y \mapsto a\} \not\models Lxy$.
  - $\mathcal{M}, \{y \mapsto b\} \not\models \forall xLxy$, siden $\mathcal{M}, \{x \mapsto a, y \mapsto b\} \not\models Lxy$.

Eksempel 6

$$
\begin{array}{rcl}
 & \times & \\
Po, Pa & \vdash & \forall xPx, Pa, \exists x(Px \to \forall xPx) \\ \hline
Po & \vdash & Pa, Pa \to \forall xPx, \exists x(Px \to \forall xPx) \\ \hline
Po & \vdash & Pa, \exists x(Px \to \forall xPx) \\ \hline
Po & \vdash & \forall xPx, \exists x(Px \to \forall xPx) \\ \hline
 & \vdash & Po \to \forall xPx, \exists x(Px \to \forall xPx) \\ \hline
 & \vdash & \exists x(Px \to \forall xPx)
\end{array}
$$

- Dette viser at sekventen $\vdash \exists x(Px \to \forall xPx)$ er bevisbar.
- "Det fins en x slik at hvis x liker fotball, så liker alle fotball."
- Dette er ikke den samme påstanden som:
  "Hvis det fins en x som liker fotball, så liker alle fotball."
- Oppgave: vis at formelen er gyldig. Argumenter for at formelen er sann i enhver modell.

Overblikk

- Vi skal nå vise at enhver sekvent som kan bevises ved å bruke LK-reglene er gyldig.
- Hvis vi kunne bevise noe som *ikke* var gyldig, så ville LK ha vært ukorrekt eller usunn...

Definisjon (Sunnhet)

En sekventkalkyle er sunn hvis enhver sekvent som er bevisbar i kalkylen, er gyldig.

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK *for førsteordens logikk er sunn.*

Antakelser om førsteordens språk

- Vi antar i beviset at et førsteordens språk $\mathcal{L}$ er gitt.
- En rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ består altså av lukkede $\mathcal{L}$-formler.
- Fra antakelsen om at $\Gamma \vdash \Delta$ er bevisbar, skal vi vise at $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig.
- Med *gyldig* mener vi *gyldig i alle $\mathcal{L}$-modeller.*
- I en utledning av $\Gamma \vdash \Delta$ brukes det utvidete språket $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$.
- Vi antar derfor i sunnhetsbeviset at alle modeller er $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$-modeller.
- Når vi har vist at $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig i alle $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$-modeller, så må $\Gamma \vdash \Delta$ også være gyldig i alle $\mathcal{L}$-modeller, siden $\Gamma \vdash \Delta$ kun består av $\mathcal{L}$-formler.

Substitusjonslemma

- Sunnhet og fullstendighet gir sammenhang mellom
  - syntaks (= kalkyle)
  - semantikk ($\mathcal{M}, \mu \models \varphi$)
- Kvantorreglene bruker substitusjoner
- Semantikk av kvantorer bruker variabeltilordninger
- Vi trenger derfor en sammenhang mellom
  - substitusjoner (= syntaktiske operasjoner)
  - variabeltilordninger (= semantiske objekter)
- Substitusjonslemmaet beskriver denne sammenhangen

Substitusjonslemma

Lemma (Substitusjonslemma)

La $\mathcal{M}$ være en modell og μ en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. La s, t være termer og x en variabel. Da gjelder:

$$(t[s/x])^{\mathcal{M},\mu} = t^{\mathcal{M},\mu\{x \mapsto s^{\mathcal{M},\mu}\}}$$

La φ være en formel. Hvis s er fri for x i φ, så gjelder:

$$\mathcal{M}, \mu \models \varphi[s/x] \quad \textit{hviss} \quad \mathcal{M}, \mu\{x \mapsto s^{\mathcal{M},\mu}\} \models \varphi$$

Eksempel: $a^{\mathcal{M}} = \blacktriangle$. Så gjelder:

$$(x[a/x])^{\mathcal{M},\mu} = x^{\mathcal{M},\mu\{x \mapsto \blacktriangle\}}$$

$$\mathcal{M}, \mu \models (\exists y.\mathsf{Inntil}(x, y))[x/a] \quad \text{hviss} \quad \mathcal{M}, \mu\{x \mapsto \blacktriangle\} \models \exists y.\mathsf{Inntil}(x, y)$$

Strukturen i beviset for sunnhet

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
2. En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.
3. Alle aksiomer er gyldige.

Til slutt vises sunnhetsteoremet ved hjelp av lemmaene.

Reglene bevarer falsifiserbarhet

Definisjon

En LK-regel θ er falsifiserbarhetsbevarende (oppover) hvis hver gang konklusjonen i en θ-slutning er falsifiserbar, så er også minst ett av premissene i slutningen falsifiserbart.

Lemma

Alle LK-reglene er falsifiserbarhetsbevarende.

- Vi har vist at α- og β-reglene har egenskapen.
- Gjenstår å vise at γ- og δ-reglene har egenskapen.

Bevis for at L∀ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \ \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \ \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\forall \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.
- Siden $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ har vi at $\mathcal{M}\{x \mapsto d\} \models \varphi$ for alle $d \in |\mathcal{M}|$. (Her bruker vi semantikken av $\forall$.)
- Spesielt har vi at $\mathcal{M}, \{x \mapsto t^{\mathcal{M}}\} \models \varphi$.
- Med Substitusjonslemmaet får vi: $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$.

Bevis for at L∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \ \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \ \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\exists$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ har vi at $\mathcal{M}, \{x \mapsto d\} \models \varphi$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen $\mathcal{M}$ lager vi en ny modell $\mathcal{M}'$ på følgende måte:
  - $\mathcal{M}'$ skal være helt lik $\mathcal{M}$ bortsett fra når det gjelder tolkningen av a.
  - Parameteren a skal tolkes som elementet d, dvs. $a^{\mathcal{M}'} = d$.
- Vi konkluderer med at $\mathcal{M}'$ falsifiserer premisset:
  - Siden a ikke forekommer i konklusjonen, så må $\mathcal{M}'$ og $\mathcal{M}$ tolke formlene i Γ og Δ likt. $\mathcal{M}'$ gjør derfor alle formlene i Γ sanne og alle formlene i Δ usanne.
  - $\mathcal{M}', \{x \mapsto d\} \models \varphi$, og med substitusjonslemmaet $\mathcal{M}' \models \varphi[a/x]$.

Et eksempel

- Anta at $\mathcal{M}$ er en modell med domene $\{1, 2\}$ slik at $P^{\mathcal{M}} = \{2\}$.
- Anta at a og b er parametre slik at $a^{\mathcal{M}} = b^{\mathcal{M}} = 1$.
- Da vil $\mathcal{M} \not\models Pa$ og $\mathcal{M} \not\models Pb$.

$$\frac{Pb \vdash Pa}{\exists x Px \vdash Pa}$$

- Vi har at $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen:
  $\mathcal{M} \models \exists x Px$, siden $\mathcal{M}, \{x \mapsto 2\} \models Px$.
  $\mathcal{M} \not\models Pa$.
- Men, $\mathcal{M}$ falsifiserer ikke premisset, siden $\mathcal{M} \not\models Pb$.
- Vi lager en ny modell $\mathcal{M}'$ som er slik at $b^{\mathcal{M}'} = 2$.
- Da vil $\mathcal{M}'$ falsifiserer premisset.

Bevis for at R$\exists$ og R$\forall$ bevarer falsifiserbarhet

- beviset for R$\exists$ er dualt til det for L$\forall$
- beviset for R$\forall$ er dualt til det for L$\exists$

Reglene bevarer falsifiserbarhet

Lemma

Hvis rotsekventen i en LK-utledning π er falsifiserbar, så er minst én av løvsekventene i π falsifiserbar.

- Beviset går likt som for utsagnslogikk ved strukturell induksjon på LK-utledningen π.
- Basissteget (π er en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$) er trivielt, siden eneste sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er både rot- og løvsekvent.
- To induksjonssteg: ettpremiss- og topremissutvidelse.
- Begge bruker lemmaet om falsifiserbarhetsbevaring (oppover).

Alle aksiomer er gyldige

Lemma

Alle aksiomer er gyldige.

- Beviset går likt som for utsagnslogikk.
- Et aksiom er på formen:

$$\Gamma, P(t_1, \ldots, t_n) \vdash P(t_1, \ldots, t_n), \Delta$$

- Enhver modell som oppfyller antecedenten må oppfylle $P(t_1, \ldots, t_n)$.
- Dermed oppfylles den samme formelen $P(t_1, \ldots, t_n)$ i succedenten.

Sunnhetsbeviset

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK *for førsteordens logikk er sunn.*

Bevis.

- Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ er LK-bevisbar.
- La π være et LK-bevis med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma fins det minst én løvsekvent i π som er falsifiserbar.
- Siden π er et bevis, må løvsekventen være et aksiom.
- Ved Lemma må løvsekventen være gyldig. Det gir en motsigelse.
- Da må $\Gamma \vdash \Delta$ være gyldig.

$\square$