Forelesning 7: Førsteordens logikk – sekventkalkyle og sunnhet

Christian Mahesh Hansen - 3. mars 2007

1 Repetisjon: Førsteordens syntaks og semantikk

Et førsteordens språk $\mathcal{L}$ består av:

1. Logiske symboler
   - konnektiver: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ og $\neg$
   - hjelpesymboler: '(' og ')' og ','
   - kvantorer: $\exists$ og $\forall$
   - variable: $\mathcal{V} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$
2. Ikke-logiske symboler:
   - en tellbar mengde konstantsymboler
   - en tellbar mengde funksjonssymboler (med aritet)
   - en tellbar mengde relasjonssymboler (med aritet)

- De ikke-logiske symbolene utgjør en *signatur*

  $\langle \underbrace{\{c_1, c_2, c_3, \ldots\}}_{konstantsymboler}; \underbrace{\{f_1, f_2, f_3, \ldots\}}_{funksjonssymboler}; \underbrace{\{R_1, R_2, R_3, \ldots\}}_{relasjonssymboler} \rangle.$

Hvis et førsteordens språk $\mathcal{L}$ er gitt, så får vi (definert induktivt):

1. Mengden $\mathcal{T}$ av termer i $\mathcal{L}$:
   - Enhver variabel og konstant er en term.
   - 1 Hvis f er et funksjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer,så er $f(t_1, ..., t_n)$ en term.
2. Mengden $\mathcal{F}$ av formler i $\mathcal{L}$:
   - 2 Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer,så er $R(t_1, \ldots, t_n)$ en (atomær) formel.
   - 3 Hvis φ og ψ er formler,så er $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ og $(\varphi \rightarrow \psi)$ formler.
   - 4 Hvis φ er en formel og x er en variabel,så er $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$ formler.

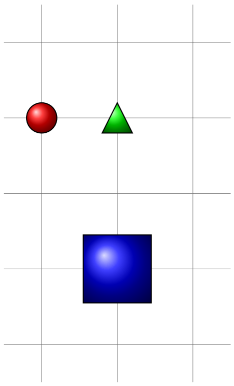
   Alle forekomster av en variabel x i φ sies å være bundet i formlene $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$ og innenfor skopet til den gjeldende kvantoren.

Hvis $\mathcal{M}$ er en modell, μ en variabeltilordning for $\mathcal{M}$, og φ er en formel, så definerte vi $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$.

- For atomære formler: $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu} \rangle \in R^{\mathcal{M},\mu}$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \neg\varphi$ hvis det *ikke* er tilfelle at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$.

- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \wedge \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ *og* $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \vee \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ *eller* $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \to \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ *impliserer* $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \forall x \varphi$ hvis $\mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\} \models \varphi$ *for alle* a i $|\mathcal{M}|$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \exists x \varphi$ hvis $\mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\} \models \varphi$ *for minst en* a i $|\mathcal{M}|$.

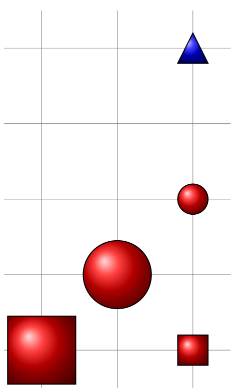
1.1 Oppfyllbarhet



- Er det slik at $\mathcal{M} \vDash \exists x \mathsf{Liten}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

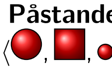
$$\begin{gathered}\mathcal{M}, \mu \models \exists x \mathsf{Liten}(x) \\ \Updownarrow \\ \text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at} \\ \mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\} \models \mathsf{Liten}(x) \\ \Updownarrow \\ \text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } x^{\mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\}} \in \mathsf{Liten}^{\mathcal{M}} \\ \Updownarrow \\ \text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mu\{x \mapsto a\}(x) \in \mathsf{Liten}^{\mathcal{M}} \\ \Updownarrow \\ \text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } a \in \mathsf{Liten}^{\mathcal{M}}\end{gathered}$$

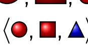
- Siden $\mathsf{Liten}^{\mathcal{M}} = \{$$\}$, kan vi konkludere med **JA**.

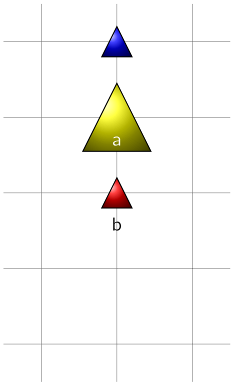


$$\begin{gathered}\mathcal{M} \models \forall x(\mathsf{Sirkel}(x) \to \exists y \exists z \mathsf{Mellom}(x, y, z)) \\ \Updownarrow \\ \text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så} \\ \mathcal{M}, \{x \mapsto a\} \models \mathsf{Sirkel}(x) \to \exists y \exists z \mathsf{Mellom}(x, y, z) \\ \Updownarrow \\ \text{for alle sirkler } a \in |\mathcal{M}| \text{ så} \\ \mathcal{M}, \{x \mapsto a\} \models \exists y \exists z \mathsf{Mellom}(x, y, z) \\ \Updownarrow \\ \text{for alle sirkler } a \in |\mathcal{M}| \text{ så} \\ \text{fins } b, c \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M}\{x \mapsto a, y \mapsto b, z \mapsto c\} \models \mathsf{Mellom}(x, y, z)\end{gathered}$$

Påstanden holder, fordi

$\langle$$\rangle \in \mathsf{Mellom}^{\mathcal{M}}$ og

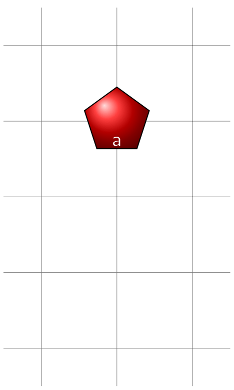
$\langle$$\rangle \in \mathsf{Mellom}^{\mathcal{M}}$.



Er følgende formler oppfyllbare samtidig?

1. $\mathsf{Stor}(a) \land \mathsf{Liten}(b)$
2. $\forall x(\mathsf{Trekant}(x))$
3. $\forall x(\mathsf{Inntil}(x, a) \lor \mathsf{Inntil}(x, b))$
4. $\neg \exists x(\mathsf{VenstreFor}(x, a) \lor \mathsf{HoyreFor}(x, a))$
5. $\forall x(\mathsf{Stor}(x) \to \exists y \mathsf{Over}(y, x))$

Svaret er JA!



Er følgende formler oppfyllbare?

1. $\neg\mathsf{Sirkel}(a) \land \neg\mathsf{Trekant}(a) \land \neg\mathsf{Firkant}(a))$

   Svaret er JA!

   La $|\mathcal{M}| = \{$⬟$\}$ og $a^{\mathcal{M}} =$ ⬟.

2. $\mathsf{Liten}(a) \land \mathsf{Stor}(a)$

   Svaret er JA!

   La $|\mathcal{M}| = \{$🚲$\}$, $a^{\mathcal{M}} =$ 🚲 og $\mathsf{Liten}^{\mathcal{M}} = \mathsf{Stor}^{\mathcal{M}} = \{$🚲$\}$

2 Førsteordens sekventkalkyle

2.1 Introduksjon

- Vi har til nå sett sekventkalkyle for utsagnslogikk.
- Vi har bevist sunnhet og kompletthet av denne kalkylen.
- Nå skal vi gjøre det samme for førsteordens logikk!
- Gitt en førsteordens formel φ, er φ gyldig?
- Husk: vi introduserte LK som et systematisk forsøk på å falsifisere.
- La oss se på et eksempel.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\neg Qa, Pa \vdash Pa}}{\neg Qa \vdash \neg Pa, Pa}}{\vdash Pa, \neg Qa \to \neg Pa} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{Qa \vdash Qa, \neg Pa}}{Qa, \neg Qa \vdash \neg Pa}}{Qa \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{Pa \to Qa \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\dfrac{\forall x(Px \to Qx) \vdash \neg Qa \to \neg Pa}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}}
$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
  - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x.
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Da må delformelen være sann uansett hva vi setter inn for x.
  - Spesielt må delformelen være sann når vi setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene og lukke.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{{\color{gray}\forall x(Px \to Qx),} \neg Qa, Pa, Po \to Qo \vdash Pa}}{{\color{gray}\forall x(Px \to Qx),} \neg Qa, Po \to Qo \vdash \neg Pa, Pa}}{{\color{gray}\forall x(Px \to Qx),} Po \to Qo \vdash Pa, \neg Qa \to \neg Pa} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{{\color{gray}\forall x(Px \to Qx),} Qa, Po \to Qo \vdash Qa, \neg Pa}}{{\color{gray}\forall x(Px \to Qx),} Qa, \neg Qa, Po \to Qo \vdash \neg Pa}}{{\color{gray}\forall x(Px \to Qx),} Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\dfrac{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}}
$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Hva skal vi sette inn for x? Vi bruker en *dummykonstant* o.
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o. Setter inn a.
- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x!
  - Vi må ta kopi av $\forall$-formelen når vi setter inn for x.
  - Setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene og lukke.

Motivasjon

- Vi skal nå definere sekventkalkylen LK for førsteordens logikk.
- Vi trenger slutningsregler for formler med kvantorene $\forall/\exists$.
- Fra de foregående eksemplene har vi:
  - Hvis vi skal oppfylle en formel $\forall x\varphi$ så må vi oppfylle $\varphi[t/x]$ for alle valg av term t.
  - I tillegg trenger vi en ekstra kopi av $\forall x\varphi$.
  - Hvis vi skal falsifisere $\forall x\varphi$ må vi velge et *vitne* – et ubrukt konstantsymbol a – slik at $\varphi[a/x]$ er usann.
  - Å oppfylle/falsifisere $\exists$-formler blir dualt.
- Vi skal nå definere begreper som *sekvent*, *aksiom*, *utledning* og *bevis* for førsteordens språk.

2.2 Sekventer og aksiomer

Definisjon 2.1 (Parameter)**.** *La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og la* par *være en tellbart uendelig mengde av konstantsymboler, kalt* parametre*, forskjellige fra konstantsymbolene i $\mathcal{L}$. La $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$ være førsteordens språket man får ved å ta med disse som konstantsymboler.*

Definisjon 2.2 (Sekvent)**.** *En* sekvent *er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av lukkede førsteordens formler i $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$.*

Definisjon 2.3 (Aksiom)**.** *Et* aksiom *er en sekvent på formen $\Gamma, A \vdash A, \Delta$ slik at A er en atomær formel.*

Oppgave. *Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?*

- $Px \vdash Qx$
- $\forall xPx \vdash \exists xQx$
- $Pa, \forall x(Qx \to Rx) \vdash Qb \to Rb$
- $\forall xPx, Pa \vdash Pa, \exists xPa$

Hvilke av sekventene over er aksiomer?

2.3 Sekventkalkyleregler

Definisjon 2.4 (γ-regler)**.** γ*-reglene i sekventkalkylen* LK *er:*

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\forall \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi}\ \mathsf{R}\exists$$

t er en lukket term

Merk: kopieringen av hovedformelen i γ-reglene medfører at bevissøk i førsteordens logikk ikke nødvendigvis behøver å terminere!

Definisjon 2.5 (δ-regler)**.** *δ-reglene i sekventkalkylen* LK *er:*

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta}\,\mathrm{L}\exists \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\varphi}\,\mathrm{R}\forall$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen.

- γ-reglene erstatter den bundne variabelen med en lukket term.
- δ-reglene erstatter den bundne variabelen med et konstantsymbol.
- Det betyr at hvis hovedformelen er lukket, så er også de aktive formlene lukkede.
- γ- og δ-reglene er derfor *veldefinerte* i den forstand at alle sekventer forblir lukket.

Definisjon 2.6 (Slutningsreglene i førsteordens LK)**.** *Slutningsreglene i førsteordens* LK *er α- og β-reglene fra utsagnslogisk* LK *og γ- og δ-reglene.*

2.4 Slutninger

- Som i utsagnslogikk definerer reglene *slutninger* ved at vi erstatter symbolene i reglene med lukkede førsteordens formler:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\,\mathrm{L}\forall \;\Bigg|\; \frac{Pa, \forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa \vdash Qa}{Pa, \forall x(Px \to Qx) \vdash Qa}\,\mathrm{L}\forall$$

- Begrepene innført i tilknytning til regler/slutninger i utsagnslogisk LK gjelder også i førsteordens LK:
- Sekventene *over* streken kalles *premisser*.
- Sekventen *under* streken kalles *konklusjon*.
- Teksten til høyre for streken er regelens *navn*.
- Formelen som forekommer eksplisitt i konklusjonen kalles *hovedformel*.
- Formlene som forekommer eksplisitt i premissene kalles *aktive formler*.
- Formlene som forekommer i Γ og Δ kalles *ekstraformler*.

2.5 Utledninger

- *Ett-premissregler*: α-, γ- og δ-reglene.
- *To-premissregler*: β-reglene.

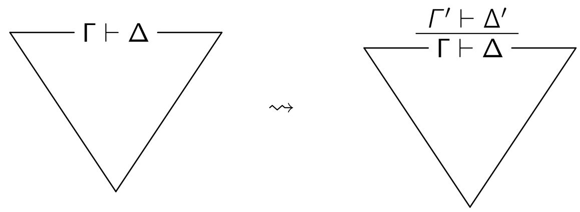
Definisjon 2.7 (LK-utledninger – basistilfelle)**.** *En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$, hvor Γ og Δ er multimengder av lukkede førsteordens formler i $\mathcal{L}$, er en* LK-utledning*.*

$$\Gamma \vdash \Delta$$

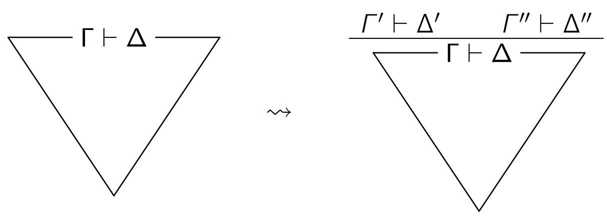
Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og løvsekvent.

- Merk: språket $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$ brukes ikke i rotsekventen, men kun for å introdusere nye parametre i δ-reglene.

Definisjon 2.8 (LK-utledninger – ett-premissutvidelse)**.** *Hvis det finnes en* LK*-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en ett-premisslutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premiss $\Gamma' \vdash \Delta'$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en* LK-utledning*.*



Definisjon 2.9 (LK-utledninger – to-premissutvidelse)**.** *Hvis det finnes en* LK*-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en to-premisslutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premisser $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en* LK-utledning*.*



2.6 Bevis

Definisjon 2.10 (LK-bevis)**.** *Et* LK-bevis *er en* LK*-utledning der alle løvsekventene er aksiomer.*

Definisjon 2.11 (LK-bevisbar)**.** *En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er* LK-bevisbar *hvis det finnes et* LK*-bevis med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.*

2.7 Eksempler

Eksempel 1

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\forall x Px, Pa \vdash Pa}}{\forall x Px \vdash Pa}}{\forall x Px \vdash \forall x Px}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x Px \vdash \forall x Px$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig, noe som er lett å se:
  - Envher modell som oppfyller antecedenten, må oppfylle succedenten.
- At sekventen er gyldig følger også fra sunnhetsteoremet.

Eksempel 2

$$
\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\forall x Px, Po \vdash \exists x Px, Po}}{\forall x Px \vdash \exists x Px, Po}}{\forall x Px \vdash \exists x Px}
$$

- Dette viser at sekventen $\forall x Px \vdash \exists x Px$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\forall x Px$ sann.
  - Domenet må bestå av minst ett element e.
  - Siden $\mathcal{M} \models \forall x Px$ sann, gjelder også $\mathcal{M}, \{x \mapsto e\} \models Px$.
  - Siden $\mathcal{M}, \{x \mapsto e\} \models Px$, gjelder også $\mathcal{M} \models \exists x Px$.
- At sekventen er gyldig følger også fra sunnhetsteoremet.

Eksempel 3

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \ \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \ \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \ \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \ \vdash \forall x Px} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \ \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \ \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \ \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \ \vdash \forall x Qx}}{\forall x(Px \land Qx) \ \vdash \forall x Px \land \forall x Qx}
$$

- Dette viser at sekventen $\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\forall x(Px \land Qx)$ sann.
  - Velg et vilkårlig element e i domenet til $\mathcal{M}$.
  - Ved antakelsen gjelder $\mathcal{M}, \{x \mapsto e\} \models Px \land Qx$.
  - Da må også $\mathcal{M}, \{x \mapsto e\} \models Px$ og $\mathcal{M}, \{x \mapsto e\} \models Qx$ gjelde.
  - Siden e var vilkårlig valgt, må $\mathcal{M}$ også gjøre $\forall x Px$ og $\forall x Qx$ sanne.
- At sekventen er gyldig følger også fra sunnhetsteoremet.

Eksempel 4

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\forall x Lxa, Lba \ \vdash Lba, \exists y Lby}}{\forall x Lxa, Lba \ \vdash \exists y Lby}}{\forall x Lxa \ \vdash \exists y Lby}}{\forall x Lxa \ \vdash \forall x \exists y Lxy}}{\exists y \forall x Lxy \ \vdash \forall x \exists y Lxy}
$$

- Dette viser at sekventen $\exists y \forall x Lxy \vdash \forall x \exists y Lxy$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\exists y \forall x Lxy$ sann.
  - Da fins det et element a slik at $\mathcal{M}, \{y \mapsto a\} \models \forall x Lxy$.
  - For å vise at $\forall x \exists y Lxy$ er sann i $\mathcal{M}$, velg et vilkårlig element b.
  - Det er nok å vise at $\mathcal{M}, \{x \mapsto b\} \models \exists y Lxy$.
  - Vi har at $\mathcal{M}, \{y \mapsto a, x \mapsto b\} \models Lxy$ er sann i $\mathcal{M}$, siden $\mathcal{M}, \{y \mapsto a\} \models \forall x Lxy$.
  - "Hvis det fins en som blir likt av alle, så har alle noen de liker."
- At sekventen er gyldig følger også fra sunnhetsteoremet.

Eksempel 5

$$
\begin{array}{c}
\vdots \\
{\color{gray}\forall x\exists yLxy}, Lbc, Loa \vdash Lba, Ldc, {\color{gray}\exists y\forall xLxy} \\
\hline
{\color{gray}\forall x\exists yLxy}, Lbc, Loa \vdash Lba, \forall xLxc, {\color{gray}\exists y\forall xLxy} \\
\hline
{\color{gray}\forall x\exists yLxy}, Lbc, Loa \vdash Lba, \exists y\forall xLxy{\color{gray}\exists y\forall xLxy} \\
\hline
{\color{gray}\forall x\exists yLxy}, \exists yLby, Loa \vdash Lba, {\color{gray}\exists y\forall xLxy} \\
\hline
{\color{gray}\forall x\exists yLxy}\forall x\exists yLxy, Loa \vdash Lba, {\color{gray}\exists y\forall xLxy} \\
\hline
{\color{gray}\forall x\exists yLxy}, Loa \vdash \forall xLxa, {\color{gray}\exists y\forall xLxy} \\
\hline
{\color{gray}\forall x\exists yLxy}, Loa \vdash \exists y\forall xLxy \\
\hline
{\color{gray}\forall x\exists yLxy}, \exists yLoy \vdash \exists y\forall xLxy \\
\hline
\forall x\exists yLxy \vdash \exists y\forall xLxy
\end{array}
$$

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists y \forall x Lxy$.
- Kan vi klare å lage en motmodell?
  - Når vi kommer til kompletthet, så skal vi se at det *alltid* fins en motmodell for ikke-bevisbare sekventer.
- **JA**, la $\mathcal{M} = \{a, b\}$ og la $L^{\mathcal{M}} = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$.
- "Alle liker seg selv og ingen andre."
- Da vil $\mathcal{M} \models \forall x \exists y Lxy$.
  - $\mathcal{M}, \{x \mapsto a\} \models \exists y Lxy$, siden $\mathcal{M}, \{x \mapsto a, y \mapsto a\} \models Lxy$.
  - $\mathcal{M}, \{x \mapsto b\} \models \exists y Lxy$, siden $\mathcal{M}, \{x \mapsto b, y \mapsto b\} \models Lxy$.
- Og $\mathcal{M} \not\models \exists y \forall x Lyx$.
  - $\mathcal{M}, \{y \mapsto a\} \not\models \forall x Lxy$, siden $\mathcal{M}, \{x \mapsto b, y \mapsto a\} \not\models Lxy$.
  - $\mathcal{M}, \{y \mapsto b\} \not\models \forall x Lxy$, siden $\mathcal{M}, \{x \mapsto a, y \mapsto b\} \not\models Lxy$.

Eksempel 6

$$
\begin{array}{rl}
 & \times \\
Po, Pa & \vdash \forall x Px, Pa, \exists x(Px \to \forall x Px) \\
\hline
Po & \vdash Pa, Pa \to \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px) \\
\hline
Po & \vdash Pa, \exists x(Px \to \forall x Px) \exists x(Px \to \forall x Px) \\
\hline
Po & \vdash \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px) \\
\hline
 & \vdash Po \to \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px) \\
\hline
 & \vdash \exists x(Px \to \forall x Px)
\end{array}
$$

- Dette viser at sekventen $\vdash \exists x(Px \to \forall x Px)$ er bevisbar.
- "Det fins en x slik at hvis x liker fotball, så liker alle fotball."
- Dette er ikke den samme påstanden som: "Hvis det fins en x som liker fotball, så liker alle fotball."
- Oppgave: vis at formelen er gyldig. Argumenter for at formelen er sann i enhver modell.

3 Sunnhet av førsteordens sekventkalkyle

3.1 Overblikk

- Vi skal nå vise at enhver sekvent som kan bevises ved å bruke LK-reglene er gyldig.
- Hvis vi kunne bevise noe som *ikke* var gyldig, så ville LK ha vært *ukorrekt* eller *usunn*...

Definisjon 3.1 (Sunnhet)**.** *En sekventkalkyle er sunn hvis enhver sekvent som er bevisbar i kalkylen, er gyldig.*

Teorem 3.1 (Sunnhet)**.** *Sekventkalkylen* LK *for førsteordens logikk er sunn.*

3.2 Antakelser om førsteordens språk

- Vi antar i beviset at et førsteordens språk $\mathcal{L}$ er gitt.
- En rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ består altså av lukkede $\mathcal{L}$-formler.
- Fra antakelsen om at $\Gamma \vdash \Delta$ er bevisbar, skal vi vise at $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig.
- Med *gyldig* mener vi *gyldig i alle $\mathcal{L}$-modeller*.
- I en utledning av $\Gamma \vdash \Delta$ brukes det utvidete språket $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$.
- Vi antar derfor i sunnhetsbeviset at alle modeller er $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$-modeller.
- Når vi har vist at $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig i alle $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$-modeller, så må $\Gamma \vdash \Delta$ også være gyldig i alle $\mathcal{L}$-modeller, siden $\Gamma \vdash \Delta$ kun består av $\mathcal{L}$-formler.

3.3 Substitusjonslemma

- Sunnhet og fullstendighet gir sammenhang mellom
  - syntaks (= kalkyle)
  - semantikk ($\mathcal{M}, \mu \models \varphi$)
- Kvantorreglene bruker substitusjoner
- Semantikk av kvantorer bruker variabeltilordninger
- Vi trenger derfor en sammenhang mellom
  - substitusjoner (= syntaktiske operasjoner)
  - variabeltilordninger (= semantiske objekter)
- Substitusjonslemmaet beskriver denne sammenhangen

Lemma 3.1 (Substitusjonslemma)**.** *La $\mathcal{M}$ være en modell og μ en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. La s, t være termer og x en variabel. Da gjelder:*

$$(t[s/x])^{\mathcal{M},\mu} = t^{\mathcal{M},\mu\{x \mapsto s^{\mathcal{M},\mu}\}}$$

La φ være en formel. Hvis s er fri for x i φ, så gjelder:

$$\mathcal{M}, \mu \models \varphi[s/x] \quad \textit{hviss} \quad \mathcal{M}, \mu\{x \mapsto s^{\mathcal{M},\mu}\} \models \varphi$$

Eksempel: $a^{\mathcal{M}} = \blacktriangle$. Så gjelder:

$$(x[a/x])^{\mathcal{M},\mu} = x^{\mathcal{M},\mu\{x \mapsto \blacktriangle\}}$$

$$\mathcal{M}, \mu \models (\exists y.\mathsf{Inntil}(x, y))[x/a] \quad \text{hviss} \quad \mathcal{M}, \mu\{x \mapsto \blacktriangle\} \models \exists y.\mathsf{Inntil}(x, y)$$

3.4 Bevisstruktur

Strukturen i beviset for sunnhet

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
2. En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.
3. Alle aksiomer er gyldige.

Til slutt vises sunnhetsteoremet ved hjelp av lemmaene.

3.5 Reglene bevarer falsifiserbarhet

Definisjon 3.2. *En* LK*-regel θ er* falsifiserbarhetsbevarende *(oppover) hvis hver gang konklusjonen i en θ-slutning er falsifiserbar, så er også minst ett av premissene i slutningen falsifiserbart.*

Lemma 3.2. *Alle* LK*-reglene er falsifiserbarhetsbevarende.*

- Vi har vist at α- og β-reglene har egenskapen.
- Gjenstår å vise at γ- og δ-reglene har egenskapen.

Bevis for at L$\forall$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \ \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \ \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\forall \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.
- Siden $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ har vi at $\mathcal{M}\{x \mapsto d\} \models \varphi$ for alle $d \in |\mathcal{M}|$. (Her bruker vi semantikken av $\forall$.)
- Spesielt har vi at $\mathcal{M}, \{x \mapsto t^{\mathcal{M}}\} \models \varphi$.
- Med Substitusjonslemmaet får vi: $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$.

Bevis for at L$\exists$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \ \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \ \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\exists \qquad a \text{ er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan *ikke* uten videre anta at $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ har vi at $\mathcal{M}, \{x \mapsto d\} \models \varphi$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen $\mathcal{M}$ lager vi en ny modell $\mathcal{M}'$ på følgende måte:
  - $\mathcal{M}'$ skal være helt lik $\mathcal{M}$ bortsett fra når det gjelder tolkningen av a.
  - Parameteren a skal tolkes som elementet d, dvs. $a^{\mathcal{M}'} = d$.
- Vi konkluderer med at $\mathcal{M}'$ falsifiserer premisset:
  - Siden a ikke forekommer i konklusjonen, så må $\mathcal{M}'$ og $\mathcal{M}$ tolke formlene i Γ og Δ likt. $\mathcal{M}'$ gjør derfor alle formlene i Γ sanne og alle formlene i Δ usanne.
  - $\mathcal{M}', \{x \mapsto d\} \models \varphi$, og med substitusjonslemmaet $\mathcal{M}' \models \varphi[a/x]$.

Et eksempel

- Anta at $\mathcal{M}$ er en modell med domene $\{1, 2\}$ slik at $P^{\mathcal{M}} = \{2\}$.
- Anta at a og b er parametre slik at $a^{\mathcal{M}} = b^{\mathcal{M}} = 1$.
- Da vil $\mathcal{M} \not\models Pa$ og $\mathcal{M} \not\models Pb$.

$$\frac{Pb \vdash Pa}{\exists x Px \vdash Pa}$$

- Vi har at $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen:

  $\mathcal{M} \models \exists x Px$, siden $\mathcal{M}, \{x \mapsto 2\} \models Px$.
  $\mathcal{M} \not\models Pa$.
- Men, $\mathcal{M}$ falsifiserer ikke premisset, siden $\mathcal{M} \not\models Pb$.
- Vi lager en ny modell $\mathcal{M}'$ som er slik at $b^{\mathcal{M}'} = 2$.
- Da vil $\mathcal{M}'$ falsifiserer premisset.

Bevis for at R$\exists$ og R$\forall$ bevarer falsifiserbarhet

- beviset for R$\exists$ er dualt til det for L$\forall$
- beviset for R$\forall$ er dualt til det for L$\exists$

Lemma 3.3. *Hvis rotsekventen i en* LK*-utledning π er falsifiserbar, så er minst én av løvsekventene i π falsifiserbar.*

- Beviset går likt som for utsagnslogikk ved strukturell induksjon på LK-utledningen π.
- Basissteget (π er en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$) er trivielt, siden eneste sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er både rot- og løvsekvent.
- To induksjonssteg: ettpremiss- og topremissutvidelse.
- Begge bruker lemmaet om falsifiserbarhetsbevaring (oppover).

3.6 Alle aksiomer er gyldige

Lemma 3.4. *Alle aksiomer er gyldige.*

- Beviset går likt som for utsagnslogikk.
- Et aksiom er på formen:
$$\Gamma, P(t_1, \ldots, t_n) \vdash P(t_1, \ldots, t_n), \Delta$$
- Enhver modell som oppfyller antecedenten må oppfylle $P(t_1, \ldots, t_n)$.
- Dermed oppfylles den samme formelen $P(t_1, \ldots, t_n)$ i succedenten.

3.7 Sunnhetsbeviset

Teorem 3.2 (Sunnhet)**.** *Sekventkalkylen* LK *for førsteordens logikk er sunn.*

Bevis.

- Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ er LK-bevisbar.
- La π være et LK-bevis med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ *ikke* er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma fins det minst én løvsekvent i π som er falsifiserbar.
- Siden π er et bevis, må løvsekventen være et aksiom.
- Ved Lemma må løvsekventen være gyldig. Det gir en motsigelse.
- Da må $\Gamma \vdash \Delta$ være gyldig.

$\square$