

INF4170 – Logikk

Forelesning 8: Førsteordens logikk – kompletthet

Martin Giese

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

10. mars 2008



Dagens plan

- 1 Repetisjon: Kalkyle og Sunnhet av LK
- 2 Kompletthet av LK

Sekventkalkyleregler

Definisjon (γ -regler)

γ -reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta} \text{L}\forall$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi} \text{R}\exists$$

t er en *lukket* term

Merk: kopieringen av hovedformelen i γ -reglene medfører at bevissøk i førsteordens logikk ikke nødvendigvis behøver å terminere!

Sekventkalkyleregler

Definisjon (δ -regler)

δ -reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} \text{L}\exists \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi} \text{R}\forall$$

a er en parameter som *ikke* forekommer i konklusjonen.

Strukturen i beviset for sunnhet

Vi viser følgende lemmaer:

- 1 Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
- 2 En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.
- 3 Alle aksiomer er gyldige.

Til slutt vises sunnhetsteoremet ved hjelp av lemmaene.

Bevis for at $L\forall$ bevarer falsifiserbarhet

Bevis for at $L\forall$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta} L\forall \quad t \text{ er en lukket term}$$

Bevis for at $L\forall$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta} L\forall \quad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta$.

Bevis for at $L\forall$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta} L\forall \quad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta$.
- \mathcal{M} gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.

Bevis for at $L\forall$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta} L\forall \quad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta$.
- \mathcal{M} gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$.

Bevis for at $L\forall$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta} L\forall \quad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta$.
- \mathcal{M} gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av \mathcal{M} .

Bevis for at $L\forall$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta} L\forall \quad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta$.
- \mathcal{M} gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av \mathcal{M} .
- Siden $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ har vi at $\mathcal{M}, \{x \mapsto d\} \models \varphi$ for alle $d \in |\mathcal{M}|$.

Bevis for at $L\forall$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta} L\forall \quad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta$.
- \mathcal{M} gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av \mathcal{M} .
- Siden $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ har vi at $\mathcal{M}, \{x \mapsto d\} \models \varphi$ for alle $d \in |\mathcal{M}|$.
(Her bruker vi semantikken av \forall .)

Bevis for at $L\forall$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta} L\forall \quad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta$.
- \mathcal{M} gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av \mathcal{M} .
- Siden $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ har vi at $\mathcal{M}, \{x \mapsto d\} \models \varphi$ for alle $d \in |\mathcal{M}|$.
(Her bruker vi semantikken av \forall .)
- Spesielt har vi at $\mathcal{M}, \{x \mapsto t^{\mathcal{M}}\} \models \varphi$.

Bevis for at $L\forall$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta} L\forall \quad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta$.
- \mathcal{M} gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av \mathcal{M} .
- Siden $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ har vi at $\mathcal{M}, \{x \mapsto d\} \models \varphi$ for alle $d \in |\mathcal{M}|$.
(Her bruker vi semantikken av \forall .)
- Spesielt har vi at $\mathcal{M}, \{x \mapsto t^{\mathcal{M}}\} \models \varphi$.
- Med Substitusjonslemmaet får vi: $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$.

Bevis for at $L\exists$ bevarer falsifiserbarhet

Bevis for at $L\exists$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} L\exists$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

Bevis for at $L\exists$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} L\exists \quad a \text{ er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen}$$

- Anta at modellen \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta$.

Bevis for at $L\exists$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta} L\exists \quad a \text{ er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen}$$

- Anta at modellen \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta$.
- \mathcal{M} gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.

Bevis for at $L\exists$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} L\exists \quad a \text{ er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen}$$

- Anta at modellen \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta$.
- \mathcal{M} gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x \varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.

Bevis for at $L\exists$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} L\exists \quad a \text{ er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen}$$

- Anta at modellen \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta$.
- \mathcal{M} gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x \varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan **ikke** uten videre anta at $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.

Bevis for at $L\exists$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} L\exists \quad a \text{ er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen}$$

- Anta at modellen \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta$.
- \mathcal{M} gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x \varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \models \exists x \varphi$ har vi at $\mathcal{M}, \{x \mapsto d\} \models \varphi$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.

Bevis for at $L\exists$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} L\exists \quad a \text{ er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen}$$

- Anta at modellen \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta$.
- \mathcal{M} gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x \varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \models \exists x \varphi$ har vi at $\mathcal{M}, \{x \mapsto d\} \models \varphi$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen \mathcal{M} lager vi en ny modell \mathcal{M}' på følgende måte:

Bevis for at $L\exists$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta} L\exists \quad a \text{ er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen}$$

- Anta at modellen \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta$.
- \mathcal{M} gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ har vi at $\mathcal{M}, \{x \mapsto d\} \models \varphi$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen \mathcal{M} lager vi en ny modell \mathcal{M}' på følgende måte:
 - \mathcal{M}' skal være helt lik \mathcal{M} bortsett fra når det gjelder tolkningen av a .

Bevis for at $L\exists$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta} L\exists \quad a \text{ er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen}$$

- Anta at modellen \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta$.
- \mathcal{M} gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ har vi at $\mathcal{M}, \{x \mapsto d\} \models \varphi$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen \mathcal{M} lager vi en ny modell \mathcal{M}' på følgende måte:
 - \mathcal{M}' skal være helt lik \mathcal{M} bortsett fra når det gjelder tolkningen av a .
 - Parameteren a skal tolkes som elementet d , dvs. $a^{\mathcal{M}'} = d$.

Bevis for at $L\exists$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} L\exists \quad a \text{ er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen}$$

- Anta at modellen \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta$.
- \mathcal{M} gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x \varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \models \exists x \varphi$ har vi at $\mathcal{M}, \{x \mapsto d\} \models \varphi$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen \mathcal{M} lager vi en ny modell \mathcal{M}' på følgende måte:
 - \mathcal{M}' skal være helt lik \mathcal{M} bortsett fra når det gjelder tolkningen av a .
 - Parameteren a skal tolkes som elementet d , dvs. $a^{\mathcal{M}'} = d$.
- Vi konkluderer med at \mathcal{M}' falsifiserer premisset:

Bevis for at $L\exists$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} L\exists \quad a \text{ er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen}$$

- Anta at modellen \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta$.
- \mathcal{M} gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x \varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \models \exists x \varphi$ har vi at $\mathcal{M}, \{x \mapsto d\} \models \varphi$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen \mathcal{M} lager vi en ny modell \mathcal{M}' på følgende måte:
 - \mathcal{M}' skal være helt lik \mathcal{M} bortsett fra når det gjelder tolkningen av a .
 - Parameteren a skal tolkes som elementet d , dvs. $a^{\mathcal{M}'} = d$.
- Vi konkluderer med at \mathcal{M}' falsifiserer premisset:
 - Siden a ikke forekommer i konklusjonen, så må \mathcal{M}' og \mathcal{M} tolke formlene i Γ og Δ likt.

Bevis for at $L\exists$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta} L\exists \quad a \text{ er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen}$$

- Anta at modellen \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta$.
- \mathcal{M} gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ har vi at $\mathcal{M}, \{x \mapsto d\} \models \varphi$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen \mathcal{M} lager vi en ny modell \mathcal{M}' på følgende måte:
 - \mathcal{M}' skal være helt lik \mathcal{M} bortsett fra når det gjelder tolkningen av a .
 - Parameteren a skal tolkes som elementet d , dvs. $a^{\mathcal{M}'} = d$.
- Vi konkluderer med at \mathcal{M}' falsifiserer premisset:
 - Siden a ikke forekommer i konklusjonen, så må \mathcal{M}' og \mathcal{M} tolke formlene i Γ og Δ likt. \mathcal{M}' gjør derfor alle formlene i Γ sanne og alle formlene i Δ usanne.

Bevis for at $L\exists$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta} L\exists \quad a \text{ er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen}$$

- Anta at modellen \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta$.
- \mathcal{M} gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ har vi at $\mathcal{M}, \{x \mapsto d\} \models \varphi$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen \mathcal{M} lager vi en ny modell \mathcal{M}' på følgende måte:
 - \mathcal{M}' skal være helt lik \mathcal{M} bortsett fra når det gjelder tolkningen av a .
 - Parameteren a skal tolkes som elementet d , dvs. $a^{\mathcal{M}'} = d$.
- Vi konkluderer med at \mathcal{M}' falsifiserer premisset:
 - Siden a ikke forekommer i konklusjonen, så må \mathcal{M}' og \mathcal{M} tolke formlene i Γ og Δ likt. \mathcal{M}' gjør derfor alle formlene i Γ sanne og alle formlene i Δ usanne.
 - $\mathcal{M}', \{x \mapsto d\} \models \varphi$, og med substitusjonslemmet $\mathcal{M}' \models \varphi[a/x]$.

Kompletthet – Overblikk

Kompletthet – Overblikk

- Vi skal nå bevise at LK er komplett.

Kompletthet – Overblikk

- Vi skal nå bevise at LK er komplett.
- Ikke bare er LK sunn, den kan også vise *alle* gyldige sekvenser.

Kompletthet – Overblikk

- Vi skal nå bevise at LK er komplett.
- Ikke bare er LK sunn, den kan også vise *alle* gyldige sekvenser.
- Det er ingen “hull” i mengden av LK-bevisbare formler.

Kompletthet – Overblikk

- Vi skal nå bevise at LK er komplett.
- Ikke bare er LK sunn, den kan også vise *alle* gyldige sekvenser.
- Det er ingen “hull” i mengden av LK-bevisbare formler.
- Det er to måter å forstå “fra φ følger ψ ” på:

Kompletthet – Overblikk

- Vi skal nå bevise at LK er komplett.
- Ikke bare er LK sunn, den kan også vise *alle* gyldige sekvenser.
- Det er ingen “hull” i mengden av LK-bevisbare formler.
- Det er to måter å forstå “fra φ følger ψ ” på:
 - ① Semantisk: $\varphi \models \psi$, hvis φ er sann, så er ψ sann.

Kompletthet – Overblikk

- Vi skal nå bevise at LK er komplett.
- Ikke bare er LK sunn, den kan også vise *alle* gyldige sekvenser.
- Det er ingen “hull” i mengden av LK-bevisbare formler.
- Det er to måter å forstå “fra φ følger ψ ” på:
 - 1 Semantisk: $\varphi \models \psi$, hvis φ er sann, så er ψ sann.
 - 2 Syntaktisk: $\varphi \vdash \psi$, det fins et bevis for sekvensen $\varphi \vdash \psi$ / fra antakelsen φ , så kan ψ bevises.

Kompletthet – Overblikk

- Vi skal nå bevise at LK er komplett.
- Ikke bare er LK sunn, den kan også vise *alle* gyldige sekvenser.
- Det er ingen “hull” i mengden av LK-bevisbare formler.
- Det er to måter å forstå “fra φ følger ψ ” på:
 - 1 Semantisk: $\varphi \models \psi$, hvis φ er sann, så er ψ sann.
 - 2 Syntaktisk: $\varphi \vdash \psi$, det fins et bevis for sekvensen $\varphi \vdash \psi$ / fra antakelsen φ , så kan ψ bevises.
- Med sunnhet og kompletthet, så blir disse ekvivalente.

Kurt Gödel (1906-1978)

Kurt Gödel (1906-1978)



Kurt Gödel
(1906-1978)

Kurt Gödel (1906-1978)



Kurt Gödel
(1906-1978)

- En av de mest betydningsfulle logikere noensinne.

Kurt Gödel (1906-1978)



Kurt Gödel
(1906-1978)

- En av de mest betydningsfulle logikere noensinne.
- Har hatt enorm innflytelse på logikk, matematikk og filosofi.

Kurt Gödel (1906-1978)



Kurt Gödel
(1906-1978)

- En av de mest betydningsfulle logikere noensinne.
- Har hatt enorm innflytelse på logikk, matematikk og filosofi.
- Det er han som først viste kompletthet av førsteordens logikk (1929).

Kurt Gödel (1906-1978)



Kurt Gödel
(1906-1978)

- En av de mest betydningsfulle logikere noensinne.
- Har hatt enorm innflytelse på logikk, matematikk og filosofi.
- Det er han som først viste kompletthet av førsteordens logikk (1929).
- Er mest kjent for ufullstendighetsteoremene (1931) og at kontinuumshypotesen er konsistent med mengdelæren (1937).

Kompletthet – Overblikk

Kompletthet – Overblikk

Teorem (Kompletthet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig, så er den bevisbar i LK.

Kompletthet – Overblikk

Teorem (Kompletthet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig, så er den bevisbar i LK.

For å vise *kompletthet*, viser vi den ekvivalente påstanden:

Kompletthet – Overblikk

Teorem (Kompletthet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig, så er den bevisbar i LK.

For å vise *kompletthet*, viser vi den ekvivalente påstanden:

Lemma (Modelleksistens)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i LK, så er den falsifiserbar.

Kompletthet – Overblikk

Teorem (Kompletthet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig, så er den bevisbar i LK.

For å vise *kompletthet*, viser vi den ekvivalente påstanden:

Lemma (Modelleksistens)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i LK, så er den falsifiserbar.

Dvs. det finnes en modell som gjør alle formler i Γ sanne og alle formler i Δ usanne.

Kompletthet – Overblikk

Teorem (Kompletthet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig, så er den bevisbar i LK.

For å vise *kompletthet*, viser vi den ekvivalente påstanden:

Lemma (Modelleksistens)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i LK, så er den falsifiserbar.

Dvs. det finnes en modell som gjør alle formler i Γ sanne og alle formler i Δ usanne.

Merk at vi uansett går fra en universell påstand (“for alle modeller”) til en eksistensiell påstand (“det fins et bevis”).

Strategier

Strategier

- Hvis en formel eller sekvent er gyldig, kan vi ha en **garanti** for at vi finner et bevis ved å begynne med en rotsekvent og anvende LK-reglene gjentatte ganger?

Strategier

- Hvis en formel eller sekvent er gyldig, kan vi ha en **garanti** for at vi finner et bevis ved å begynne med en rotsekvent og anvende LK-reglene gjentatte ganger?
- For å gjøre dette litt mer presist, innfører vi begrepet **strategi**.

Strategier

- Hvis en formel eller sekvent er gyldig, kan vi ha en **garanti** for at vi finner et bevis ved å begynne med en rotsekvent og anvende LK-reglene gjentatte ganger?
- For å gjøre dette litt mer presist, innfører vi begrepet **strategi**.

Definisjon (Strategi)

*En **strategi** for LK er en angivelse av hvordan LK-reglene systematisk skal anvendes på formler i LK-utledninger.*

Strategier

- Hvis en formel eller sekvent er gyldig, kan vi ha en **garanti** for at vi finner et bevis ved å begynne med en rotsekvent og anvende LK-reglene gjentatte ganger?
- For å gjøre dette litt mer presist, innfører vi begrepet **strategi**.

Definisjon (Strategi)

*En **strategi** for LK er en angivelse av hvordan LK-reglene systematisk skal anvendes på formler i LK-utledninger.*

- Med vilje litt vagt. Mye kan være en strategi.

Strategier

- Hvis en formel eller sekvent er gyldig, kan vi ha en **garanti** for at vi finner et bevis ved å begynne med en rotsekvent og anvende LK-reglene gjentatte ganger?
- For å gjøre dette litt mer presist, innfører vi begrepet **strategi**.

Definisjon (Strategi)

*En **strategi** for LK er en angivelse av hvordan LK-reglene systematisk skal anvendes på formler i LK-utledninger.*

- Med vilje litt vagt. Mye kan være en strategi.
- Vi er interessert i strategier som garanterer at vi får et bevis til slutt hvis det er slik at bevis fins. La oss kalle slike strategier for “gode”.

Strategier

Strategier

Definisjon (Formeltype)

Strategier

Definisjon (Formeltype)

*La φ være en formel i en utledning. Vi sier at φ er av **type** θ hvis φ kan være hovedformelen i en θ -slutning.*

Strategier

Definisjon (Formeltype)

La φ være en formel i en utledning. Vi sier at φ er av **type** θ hvis φ kan være hovedformelen i en θ -slutning.

Eksempel

$$Pa \wedge Pb, Qa \vee Qb \vdash \exists xPx, \forall xPx$$

Strategier

Definisjon (Formeltype)

La φ være en formel i en utledning. Vi sier at φ er av **type** θ hvis φ kan være hovedformelen i en θ -slutning.

Eksempel

$$Pa \wedge Pb, Qa \vee Qb \vdash \exists xPx, \forall xPx$$

Strategier

Definisjon (Formeltype)

La φ være en formel i en utledning. Vi sier at φ er av **type** θ hvis φ kan være hovedformelen i en θ -slutning.

Eksempel

$$Pa \wedge Pb, Qa \vee Qb \vdash \exists xPx, \forall xPx$$

- $Pa \wedge Pb$ er en α -formel

Strategier

Definisjon (Formeltype)

La φ være en formel i en utledning. Vi sier at φ er av **type** θ hvis φ kan være hovedformelen i en θ -slutning.

Eksempel

$$Pa \wedge Pb, Qa \vee Qb \vdash \exists xPx, \forall xPx$$

- $Pa \wedge Pb$ er en α -formel

Strategier

Definisjon (Formeltype)

La φ være en formel i en utledning. Vi sier at φ er av **type** θ hvis φ kan være hovedformelen i en θ -slutning.

Eksempel

$$Pa \wedge Pb, Qa \vee Qb \vdash \exists xPx, \forall xPx$$

- $Pa \wedge Pb$ er en α -formel
- $Qa \vee Qb$ er en β -formel

Strategier

Definisjon (Formeltype)

La φ være en formel i en utledning. Vi sier at φ er av **type** θ hvis φ kan være hovedformelen i en θ -slutning.

Eksempel

$$Pa \wedge Pb, Qa \vee Qb \vdash \exists xPx, \forall xPx$$

- $Pa \wedge Pb$ er en α -formel
- $Qa \vee Qb$ er en β -formel

Strategier

Definisjon (Formeltype)

La φ være en formel i en utledning. Vi sier at φ er av **type** θ hvis φ kan være hovedformelen i en θ -slutning.

Eksempel

$$Pa \wedge Pb, Qa \vee Qb \vdash \exists xPx, \forall xPx$$

- $Pa \wedge Pb$ er en α -formel
- $Qa \vee Qb$ er en β -formel
- $\exists xPx$ er en γ -formel

Strategier

Definisjon (Formeltype)

La φ være en formel i en utledning. Vi sier at φ er av **type** θ hvis φ kan være hovedformelen i en θ -slutning.

Eksempel

$$Pa \wedge Pb, Qa \vee Qb \vdash \exists xPx, \forall xPx$$

- $Pa \wedge Pb$ er en α -formel
- $Qa \vee Qb$ er en β -formel
- $\exists xPx$ er en γ -formel

Strategier

Definisjon (Formeltype)

La φ være en formel i en utledning. Vi sier at φ er av **type** θ hvis φ kan være hovedformelen i en θ -slutning.

Eksempel

$$Pa \wedge Pb, Qa \vee Qb \vdash \exists xPx, \forall xPx$$

- $Pa \wedge Pb$ er en α -formel
- $Qa \vee Qb$ er en β -formel
- $\exists xPx$ er en γ -formel
- $\forall xPx$ er en δ -formel

Strategier

Strategier

En enkel strategi

Strategier

En enkel strategi

- 1 Anvend α -regler så mange ganger som mulig, dvs. helt til ingen løvsekvent lenger inneholder en formel av type α . Gå til 2.

Strategier

En enkel strategi

- 1 Anvend α -regler så mange ganger som mulig, dvs. helt til ingen løvsekvent lenger inneholder en formel av type α . Gå til 2.
- 2 Anvend β -regler så mange ganger som mulig.

Strategier

En enkel strategi

- 1 Anvend α -regler så mange ganger som mulig, dvs. helt til ingen løvsekvent lenger inneholder en formel av type α . Gå til 2.
- 2 Anvend β -regler så mange ganger som mulig.

$$P \wedge Q \vdash P \wedge Q$$

Strategier

En enkel strategi

- 1 Anvend α -regler så mange ganger som mulig, dvs. helt til ingen løvsekvent lenger inneholder en formel av type α . Gå til 2.
- 2 Anvend β -regler så mange ganger som mulig.

$$\frac{P, Q \vdash P \wedge Q}{P \wedge Q \vdash P \wedge Q} \text{ 1}$$

Strategier

En enkel strategi

- 1 Anvend α -regler så mange ganger som mulig, dvs. helt til ingen løvsekvent lenger inneholder en formel av type α . Gå til 2.
- 2 Anvend β -regler så mange ganger som mulig.

$$\frac{
 \frac{
 \frac{
 \times
 }{P, Q \vdash P}
 \quad
 \frac{
 \times
 }{P, Q \vdash Q}
 }{P, Q \vdash P \wedge Q}
 }{P \wedge Q \vdash P \wedge Q}
 }{P \wedge Q \vdash P \wedge Q}$$

2

1

Strategier

En enkel strategi

- ① Anvend α -regler så mange ganger som mulig, dvs. helt til ingen løvsekvent lenger inneholder en formel av type α . Gå til ②.
- ② Anvend β -regler så mange ganger som mulig.

$$\frac{
 \frac{
 \frac{
 \times
 }{
 P, Q \vdash P
 }
 }{
 P, Q \vdash P \wedge Q
 }
 \quad
 \frac{
 \times
 }{
 P, Q \vdash Q
 }
 }{
 P \wedge Q \vdash P \wedge Q
 }
 \textcircled{2}$$

- Denne strategien er ikke “god”. Det kan hende at ① må anvendes etter at ② er anvendt.

En “god” strategi for utsagnslogikk.

En “god” strategi for utsagnslogikk.

- 1 Anvend α -regler så mange ganger som mulig. Gå til 2.

En "god" strategi for utsagnslogikk.

- 1 Anvend α -regler så mange ganger som mulig. Gå til 2.
- 2 Anvend β -regler så mange ganger som mulig. Gå til 3.

En “god” strategi for utsagnslogikk.

- 1 Anvend α -regler så mange ganger som mulig. Gå til 2.
- 2 Anvend β -regler så mange ganger som mulig. Gå til 3.
- 3 Hvis det er mulig å anvende en α -regel, gå til 1.

En "god" strategi for utsagnslogikk.

- 1 Anvend α -regler så mange ganger som mulig. Gå til 2.
- 2 Anvend β -regler så mange ganger som mulig. Gå til 3.
- 3 Hvis det er mulig å anvende en α -regel, gå til 1.

$$\neg(P \wedge Q) \vee R \vdash (P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)$$

En "god" strategi for utsagnslogikk.

- 1 Anvend α -regler så mange ganger som mulig. Gå til 2.
- 2 Anvend β -regler så mange ganger som mulig. Gå til 3.
- 3 Hvis det er mulig å anvende en α -regel, gå til 1.

$$\neg(P \wedge Q) \vee R \vdash (P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)$$

En "god" strategi for utsagnslogikk.

- ① Anvend α -regler så mange ganger som mulig. Gå til ②.
- ② Anvend β -regler så mange ganger som mulig. Gå til ③.
- ③ Hvis det er mulig å anvende en α -regel, gå til ①.

$$\frac{\neg(P \wedge Q) \vee R \vdash P \rightarrow R, Q \rightarrow R}{\neg(P \wedge Q) \vee R \vdash (P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)} \text{ ①}$$

En "god" strategi for utsagnslogikk.

- ① Anvend α -regler så mange ganger som mulig. Gå til ②.
- ② Anvend β -regler så mange ganger som mulig. Gå til ③.
- ③ Hvis det er mulig å anvende en α -regel, gå til ①.

$$\frac{\neg(P \wedge Q) \vee R \vdash P \rightarrow R, Q \rightarrow R}{\neg(P \wedge Q) \vee R \vdash (P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)} \textcircled{1}$$

En "god" strategi for utsagnslogikk.

- 1 Anvend α -regler så mange ganger som mulig. Gå til 2.
- 2 Anvend β -regler så mange ganger som mulig. Gå til 3.
- 3 Hvis det er mulig å anvende en α -regel, gå til 1.

$$\frac{\frac{\neg(P \wedge Q) \vee R, P \vdash R, Q \rightarrow R}{\neg(P \wedge Q) \vee R \vdash P \rightarrow R, Q \rightarrow R} \textcircled{1}}{\neg(P \wedge Q) \vee R \vdash (P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)} \textcircled{1}$$

En "god" strategi for utsagnslogikk.

- 1 Anvend α -regler så mange ganger som mulig. Gå til 2.
- 2 Anvend β -regler så mange ganger som mulig. Gå til 3.
- 3 Hvis det er mulig å anvende en α -regel, gå til 1.

$$\frac{\neg(P \wedge Q) \vee R, P \vdash R, Q \rightarrow R}{\neg(P \wedge Q) \vee R \vdash P \rightarrow R, Q \rightarrow R} \textcircled{1}$$

$$\frac{\neg(P \wedge Q) \vee R \vdash P \rightarrow R, Q \rightarrow R}{\neg(P \wedge Q) \vee R \vdash (P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)} \textcircled{1}$$

En "god" strategi for utsagnslogikk.

- 1 Anvend α -regler så mange ganger som mulig. Gå til 2.
- 2 Anvend β -regler så mange ganger som mulig. Gå til 3.
- 3 Hvis det er mulig å anvende en α -regel, gå til 1.

$$\begin{array}{c}
 \neg(P \wedge Q) \vee R, P, Q \vdash R, R \\
 \hline
 \neg(P \wedge Q) \vee R, P \vdash R, Q \rightarrow R \quad \text{1} \\
 \hline
 \neg(P \wedge Q) \vee R \vdash P \rightarrow R, Q \rightarrow R \quad \text{1} \\
 \hline
 \neg(P \wedge Q) \vee R \vdash (P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R) \quad \text{1}
 \end{array}$$

En "god" strategi for utsagnslogikk.

- 1 Anvend α -regler så mange ganger som mulig. Gå til 2.
- 2 Anvend β -regler så mange ganger som mulig. Gå til 3.
- 3 Hvis det er mulig å anvende en α -regel, gå til 1.

$$\begin{array}{c}
 \neg(P \wedge Q) \vee R, P, Q \vdash R, R \\
 \hline
 \neg(P \wedge Q) \vee R, P \vdash R, Q \rightarrow R \quad \text{1} \\
 \hline
 \neg(P \wedge Q) \vee R \vdash P \rightarrow R, Q \rightarrow R \quad \text{1} \\
 \hline
 \neg(P \wedge Q) \vee R \vdash (P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R) \quad \text{1}
 \end{array}$$

En "god" strategi for utsagnslogikk.

- 1 Anvend α -regler så mange ganger som mulig. Gå til 2.
- 2 Anvend β -regler så mange ganger som mulig. Gå til 3.
- 3 Hvis det er mulig å anvende en α -regel, gå til 1.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\neg(P \wedge Q), P, Q \vdash R, R}{\neg(P \wedge Q) \vee R, P, Q \vdash R, R} \quad \text{2} \\
 \frac{\neg(P \wedge Q) \vee R, P, Q \vdash R, R}{\neg(P \wedge Q) \vee R, P \vdash R, Q \rightarrow R} \quad \text{1} \\
 \frac{\neg(P \wedge Q) \vee R \vdash P \rightarrow R, Q \rightarrow R}{\neg(P \wedge Q) \vee R \vdash (P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)} \quad \text{1}
 \end{array}$$

En "god" strategi for utsagnslogikk.

- 1 Anvend α -regler så mange ganger som mulig. Gå til 2.
- 2 Anvend β -regler så mange ganger som mulig. Gå til 3.
- 3 Hvis det er mulig å anvende en α -regel, gå til 1.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\neg(P \wedge Q), P, Q \vdash R, R}{\neg(P \wedge Q) \vee R, P, Q \vdash R, R} \quad \text{2} \\
 \frac{\neg(P \wedge Q) \vee R, P, Q \vdash R, R}{\neg(P \wedge Q) \vee R, P \vdash R, Q \rightarrow R} \quad \text{1} \\
 \frac{\neg(P \wedge Q) \vee R \vdash P \rightarrow R, Q \rightarrow R}{\neg(P \wedge Q) \vee R \vdash (P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)} \quad \text{1}
 \end{array}$$

En "god" strategi for utsagnslogikk.

- 1 Anvend α -regler så mange ganger som mulig. Gå til 2.
- 2 Anvend β -regler så mange ganger som mulig. Gå til 3.
- 3 Hvis det er mulig å anvende en α -regel, gå til 1.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\neg(P \wedge Q), P, Q \vdash R, R}{\neg(P \wedge Q) \vee R, P, Q \vdash R, R} \quad \times}{\neg(P \wedge Q) \vee R, P \vdash R, Q \rightarrow R} \quad 2}{\neg(P \wedge Q) \vee R \vdash P \rightarrow R, Q \rightarrow R} \quad 1}{\neg(P \wedge Q) \vee R \vdash (P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)} \quad 1
 \end{array}$$

En "god" strategi for utsagnslogikk.

- 1 Anvend α -regler så mange ganger som mulig. Gå til 2.
- 2 Anvend β -regler så mange ganger som mulig. Gå til 3.
- 3 Hvis det er mulig å anvende en α -regel, gå til 1.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\frac{\neg(P \wedge Q), P, Q \vdash R, R}{R, P, Q \vdash R, R} \quad \times}{\neg(P \wedge Q) \vee R, P, Q \vdash R, R} \quad 2}{\neg(P \wedge Q) \vee R, P \vdash R, Q \rightarrow R} \quad 1}{\neg(P \wedge Q) \vee R \vdash P \rightarrow R, Q \rightarrow R} \quad 1}{\neg(P \wedge Q) \vee R \vdash (P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)} \quad 1
 \end{array}$$

En "god" strategi for utsagnslogikk.

- 1 Anvend α -regler så mange ganger som mulig. Gå til 2.
- 2 Anvend β -regler så mange ganger som mulig. Gå til 3.
- 3 Hvis det er mulig å anvende en α -regel, gå til 1.

$$\begin{array}{c}
 \frac{P, Q \vdash P \wedge Q, R, R}{\neg(P \wedge Q), P, Q \vdash R, R} \quad \text{1} \\
 \frac{\quad}{R, P, Q \vdash R, R} \quad \times \\
 \frac{\quad}{\neg(P \wedge Q) \vee R, P, Q \vdash R, R} \quad \text{2} \\
 \frac{\neg(P \wedge Q) \vee R, P, Q \vdash R, R}{\neg(P \wedge Q) \vee R, P \vdash R, Q \rightarrow R} \quad \text{1} \\
 \frac{\neg(P \wedge Q) \vee R \vdash P \rightarrow R, Q \rightarrow R}{\neg(P \wedge Q) \vee R \vdash (P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)} \quad \text{1}
 \end{array}$$

En "god" strategi for utsagnslogikk.

- 1 Anvend α -regler så mange ganger som mulig. Gå til 2.
- 2 Anvend β -regler så mange ganger som mulig. Gå til 3.
- 3 Hvis det er mulig å anvende en α -regel, gå til 1.

$$\begin{array}{c}
 \frac{P, Q \vdash P \wedge Q, R, R}{\neg(P \wedge Q), P, Q \vdash R, R} \quad \text{1} \\
 \frac{\quad}{R, P, Q \vdash R, R} \quad \times \\
 \frac{\quad}{\neg(P \wedge Q) \vee R, P, Q \vdash R, R} \quad \text{2} \\
 \frac{\quad}{\neg(P \wedge Q) \vee R, P \vdash R, Q \rightarrow R} \quad \text{1} \\
 \frac{\quad}{\neg(P \wedge Q) \vee R \vdash P \rightarrow R, Q \rightarrow R} \quad \text{1} \\
 \frac{\quad}{\neg(P \wedge Q) \vee R \vdash (P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)} \quad \text{1}
 \end{array}$$

En "god" strategi for utsagnslogikk.

- 1 Anvend α -regler så mange ganger som mulig. Gå til 2.
- 2 Anvend β -regler så mange ganger som mulig. Gå til 3.
- 3 Hvis det er mulig å anvende en α -regel, gå til 1.

$$\begin{array}{c}
 \frac{P, Q \vdash P, R, R \quad P, Q \vdash Q, R, R}{P, Q \vdash P \wedge Q, R, R} \textcircled{2} \\
 \hline
 \frac{\neg(P \wedge Q), P, Q \vdash R, R}{\neg(P \wedge Q) \vee R, P, Q \vdash R, R} \textcircled{1} \quad \times \\
 \hline
 \frac{\neg(P \wedge Q) \vee R, P, Q \vdash R, R}{\neg(P \wedge Q) \vee R, P \vdash R, Q \rightarrow R} \textcircled{1} \\
 \hline
 \frac{\neg(P \wedge Q) \vee R \vdash P \rightarrow R, Q \rightarrow R}{\neg(P \wedge Q) \vee R \vdash (P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)} \textcircled{1}
 \end{array}$$

En "god" strategi for utsagnslogikk.

- 1 Anvend α -regler så mange ganger som mulig. Gå til 2.
- 2 Anvend β -regler så mange ganger som mulig. Gå til 3.
- 3 Hvis det er mulig å anvende en α -regel, gå til 1.

$$\begin{array}{c}
 \times \\
 \frac{P, Q \vdash P, R, R \quad P, Q \vdash Q, R, R}{P, Q \vdash P \wedge Q, R, R} \quad \textcircled{2} \\
 \frac{\quad}{\neg(P \wedge Q), P, Q \vdash R, R} \quad \textcircled{1} \\
 \frac{\quad}{R, P, Q \vdash R, R} \quad \times \quad \textcircled{2} \\
 \frac{\neg(P \wedge Q) \vee R, P, Q \vdash R, R}{\neg(P \wedge Q) \vee R, P \vdash R, Q \rightarrow R} \quad \textcircled{1} \\
 \frac{\quad}{\neg(P \wedge Q) \vee R \vdash P \rightarrow R, Q \rightarrow R} \quad \textcircled{1} \\
 \frac{\quad}{\neg(P \wedge Q) \vee R \vdash (P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)} \quad \textcircled{1}
 \end{array}$$

En "god" strategi for utsagnslogikk.

- 1 Anvend α -regler så mange ganger som mulig. Gå til 2.
- 2 Anvend β -regler så mange ganger som mulig. Gå til 3.
- 3 Hvis det er mulig å anvende en α -regel, gå til 1.

$$\begin{array}{c}
 \times \\
 \frac{P, Q \vdash P, R, R \quad P, Q \vdash Q, R, R}{P, Q \vdash P \wedge Q, R, R} \quad \textcircled{2} \\
 \frac{\quad}{\neg(P \wedge Q), P, Q \vdash R, R} \quad \textcircled{1} \\
 \frac{\quad}{R, P, Q \vdash R, R} \quad \times \quad \textcircled{2} \\
 \frac{\neg(P \wedge Q) \vee R, P, Q \vdash R, R}{\neg(P \wedge Q) \vee R, P \vdash R, Q \rightarrow R} \quad \textcircled{1} \\
 \frac{\quad}{\neg(P \wedge Q) \vee R \vdash P \rightarrow R, Q \rightarrow R} \quad \textcircled{1} \\
 \frac{\quad}{\neg(P \wedge Q) \vee R \vdash (P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)} \quad \textcircled{1}
 \end{array}$$

En "god" strategi for utsagnslogikk.

- 1 Anvend α -regler så mange ganger som mulig. Gå til 2.
- 2 Anvend β -regler så mange ganger som mulig. Gå til 3.
- 3 Hvis det er mulig å anvende en α -regel, gå til 1.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \times \\ P, Q \vdash P, R, R \end{array} \quad \begin{array}{c} \times \\ P, Q \vdash Q, R, R \end{array} \\
 \hline
 P, Q \vdash P \wedge Q, R, R \quad \text{2} \\
 \hline
 \neg(P \wedge Q), P, Q \vdash R, R \quad \text{1} \\
 \hline
 \begin{array}{c} \times \\ R, P, Q \vdash R, R \end{array} \\
 \hline
 \neg(P \wedge Q) \vee R, P, Q \vdash R, R \quad \text{2} \\
 \hline
 \neg(P \wedge Q) \vee R, P \vdash R, Q \rightarrow R \quad \text{1} \\
 \hline
 \neg(P \wedge Q) \vee R \vdash P \rightarrow R, Q \rightarrow R \quad \text{1} \\
 \hline
 \neg(P \wedge Q) \vee R \vdash (P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R) \quad \text{1}
 \end{array}$$

Strategier

Strategier

- Hva skal til for at en strategi skal være “god”?

Strategier

- Hva skal til for at en strategi skal være “god”?
1. Alle formler må analyseres før eller senere.

Strategier

- Hva skal til for at en strategi skal være “god”?
1. Alle formler må analyseres før eller senere.

$$\forall x P x, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa$$

Strategier

- Hva skal til for at en strategi skal være “god”?
1. Alle formler må analyseres før eller senere.

$$\forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa$$

Strategier

- Hva skal til for at en strategi skal være “god”?
1. Alle formler må analyseres før eller senere.

$$\frac{Pa, \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}{\forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}$$

Strategier

- Hva skal til for at en strategi skal være “god”?
1. Alle formler må analyseres før eller senere.

$$\frac{Pa, \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}{\forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}$$

Strategier

- Hva skal til for at en strategi skal være “god”?
1. Alle formler må analyseres før eller senere.

$$\frac{\frac{Pfa, Pa, \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}{Pa, \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}}{\forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}$$

Strategier

- Hva skal til for at en strategi skal være “god”?

1. Alle formler må analyseres før eller senere.

$$\frac{\frac{Pfa, Pa, \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}{Pa, \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}}{\forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}$$

Strategier

- Hva skal til for at en strategi skal være “god”?

1. Alle formler må analyseres før eller senere.

$$\begin{array}{c}
 Pffa, Pfa, Pa, \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa \\
 \hline
 Pfa, Pa, \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa \\
 \hline
 Pa, \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa \\
 \hline
 \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa
 \end{array}$$

Strategier

- Hva skal til for at en strategi skal være “god”?

1. Alle formler må analyseres før eller senere.

$$\begin{array}{c}
 Pffa, Pfa, Pa, \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa \\
 \hline
 Pfa, Pa, \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa \\
 \hline
 Pa, \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa \\
 \hline
 \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa
 \end{array}$$

2. Vi må forsøke å sette inn “alle termer” for γ -formler.

Strategier

- Hva skal til for at en strategi skal være “god”?

1. Alle formler må analyseres før eller senere.

$$\frac{\frac{\frac{Pffa, Pfa, Pa, \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}{Pfa, Pa, \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}}{Pa, \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}}{\forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}$$

2. Vi må forsøke å sette inn “alle termer” for γ -formler.

$$\forall xPx \vdash Qga, Pfffb$$

Strategier

- Hva skal til for at en strategi skal være “god”?

1. Alle formler må analyseres før eller senere.

$$\frac{\frac{\frac{Pffa, Pfa, Pa, \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}{Pfa, Pa, \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}}{Pa, \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}}{\forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}$$

2. Vi må forsøke å sette inn “alle termer” for γ -formler.

$$\forall xPx \vdash Qga, Pfffb$$

Strategier

- Hva skal til for at en strategi skal være “god”?

1. Alle formler må analyseres før eller senere.

$$\frac{\frac{\frac{Pffa, Pfa, Pa, \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}{Pfa, Pa, \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}}{Pa, \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}}{\forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}$$

2. Vi må forsøke å sette inn “alle termer” for γ -formler.

$$\frac{Pa, \forall xPx \vdash Qga, Pfffb}{\forall xPx \vdash Qga, Pfffb}$$

Strategier

- Hva skal til for at en strategi skal være “god”?

1. Alle formler må analyseres før eller senere.

$$\frac{\frac{\frac{Pffa, Pfa, Pa, \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}{Pfa, Pa, \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}}{Pa, \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}}{\forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}$$

2. Vi må forsøke å sette inn “alle termer” for γ -formler.

$$\frac{Pa, \forall xPx \vdash Qga, Pfffb}{\forall xPx \vdash Qga, Pfffb}$$

Strategier

- Hva skal til for at en strategi skal være “god”?

1. Alle formler må analyseres før eller senere.

$$\frac{\frac{Pffa, Pfa, Pa, \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}{Pfa, Pa, \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}}{Pa, \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa} \\ \frac{\quad}{\forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}$$

2. Vi må forsøke å sette inn “alle termer” for γ -formler.

$$\frac{Pga, Pa, \forall xPx \vdash Qga, Pfffb}{Pa, \forall xPx \vdash Qga, Pfffb} \\ \frac{\quad}{\forall xPx \vdash Qga, Pfffb}$$

Strategier

- Hva skal til for at en strategi skal være “god”?

1. Alle formler må analyseres før eller senere.

$$\frac{\frac{\frac{Pffa, Pfa, Pa, \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}{Pfa, Pa, \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}}{Pa, \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}}{\forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}$$

2. Vi må forsøke å sette inn “alle termer” for γ -formler.

$$\frac{\frac{Pga, Pa, \forall xPx \vdash Qga, Pfffb}{Pa, \forall xPx \vdash Qga, Pfffb}}{\forall xPx \vdash Qga, Pfffb}$$

Strategier

- Hva skal til for at en strategi skal være “god”?

1. Alle formler må analyseres før eller senere.

$$\frac{\frac{\frac{Pffa, Pfa, Pa, \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}{Pfa, Pa, \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}}{Pa, \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}}{\forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}$$

2. Vi må forsøke å sette inn “alle termer” for γ -formler.

$$\frac{\frac{\frac{Ppga, Pga, Pa, \forall xPx \vdash Qga, Pfffb}{Pga, Pa, \forall xPx \vdash Qga, Pfffb}}{Pa, \forall xPx \vdash Qga, Pfffb}}{\forall xPx \vdash Qga, Pfffb}$$

Strategier

- Hva skal til for at en strategi skal være “god”?

1. Alle formler må analyseres før eller senere.

$$\frac{\frac{\frac{Pffa, Pfa, Pa, \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}{Pfa, Pa, \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}}{Pa, \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}}{\forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}$$

2. Vi må forsøke å sette inn “alle termer” for γ -formler.

$$\frac{\frac{\frac{Pgga, Pga, Pa, \forall xPx \vdash Qga, Pfffb}{Pga, Pa, \forall xPx \vdash Qga, Pfffb}}{Pa, \forall xPx \vdash Qga, Pfffb}}{\forall xPx \vdash Qga, Pfffb}$$

- Vi må kunne snakke om “alle termer” på en presis måte...

Herbranduniverset

Herbranduniverset

Definisjon (Herbranduniverset)

Herbranduniverset

Definisjon (Herbranduniverset)

La T være en mengde termer.

Herbranduniverset

Definisjon (Herbranduniverset)

La T være en mengde termer. Da er $\mathcal{H}(T)$, *Herbranduniverset til T* , den minste mengden slik at:

Herbranduniverset

Definisjon (Herbranduniverset)

La T være en mengde termer. Da er $\mathcal{H}(T)$, *Herbranduniverset til T* , den minste mengden slik at:

- $\mathcal{H}(T)$ inneholder alle konstanter fra T .

Herbranduniverset

Definisjon (Herbranduniverset)

La T være en mengde termer. Da er $\mathcal{H}(T)$, *Herbranduniverset til T* , den minste mengden slik at:

- $\mathcal{H}(T)$ inneholder alle konstanter fra T . Hvis det ikke er noen konstanter i T , så er en parameter o fra par (kalt en dummykonstant) med i $\mathcal{H}(T)$.

Herbranduniverset

Definisjon (Herbranduniverset)

La T være en mengde termer. Da er $\mathcal{H}(T)$, *Herbranduniverset til T* , den minste mengden slik at:

- $\mathcal{H}(T)$ inneholder alle konstanter fra T . Hvis det ikke er noen konstanter i T , så er en parameter o fra par (kalt en dummykonstant) med i $\mathcal{H}(T)$.
- Hvis f er et funksjonssymbol i T med aritet n og t_1, \dots, t_n er termer i $\mathcal{H}(T)$, så er $f(t_1, \dots, t_n)$ i $\mathcal{H}(T)$.

Herbranduniverset

Definisjon (Herbranduniverset)

La T være en mengde termer. Da er $\mathcal{H}(T)$, *Herbranduniverset til T* , den minste mengden slik at:

- $\mathcal{H}(T)$ inneholder alle konstanter fra T . Hvis det ikke er noen konstanter i T , så er en parameter o fra par (kalt en dummykonstant) med i $\mathcal{H}(T)$.
- Hvis f er et funksjonssymbol i T med aritet n og t_1, \dots, t_n er termer i $\mathcal{H}(T)$, så er $f(t_1, \dots, t_n)$ i $\mathcal{H}(T)$.

Herbranduniverset til en mengde formler er Herbranduniverset til mengden av termer som forekommer i formlene.

Herbranduniverset

Definisjon (Herbranduniverset)

La T være en mengde termer. Da er $\mathcal{H}(T)$, *Herbranduniverset til T* , den minste mengden slik at:

- $\mathcal{H}(T)$ inneholder alle konstanter fra T . Hvis det ikke er noen konstanter i T , så er en parameter o fra par (kalt en dummykonstant) med i $\mathcal{H}(T)$.
- Hvis f er et funksjonssymbol i T med aritet n og t_1, \dots, t_n er termer i $\mathcal{H}(T)$, så er $f(t_1, \dots, t_n)$ i $\mathcal{H}(T)$.

Herbranduniverset til en mengde formler er Herbranduniverset til mengden av termer som forekommer i formlene. Herbranduniverset til en gren er Herbranduniverset til mengden av formler som forekommer i grenen.

Herbranduniverset

Definisjon (Herbranduniverset)

La T være en mengde termer. Da er $\mathcal{H}(T)$, *Herbranduniverset til T* , den minste mengden slik at:

- $\mathcal{H}(T)$ inneholder alle konstanter fra T . Hvis det ikke er noen konstanter i T , så er en parameter o fra par (kalt en dummykonstant) med i $\mathcal{H}(T)$.
- Hvis f er et funksjonssymbol i T med aritet n og t_1, \dots, t_n er termer i $\mathcal{H}(T)$, så er $f(t_1, \dots, t_n)$ i $\mathcal{H}(T)$.

Herbranduniverset til en mengde formler er Herbranduniverset til mengden av termer som forekommer i formlene. Herbranduniverset til en gren er Herbranduniverset til mengden av formler som forekommer i grenen.

- Intuitivt, så er Herbranduniverset til T mengden av alle *lukkede* termer som kan genereres fra termer i T .

Herbranduniverset

Eksempel

$$La T = \{f(x)\}.$$

Herbranduniverset

Eksempel

La $T = \{f(x)\}$. Da er Herbranduniverset til T

Herbranduniverset

Eksempel

La $T = \{f(x)\}$. Da er Herbranduniverset til T mengden

$$\{o, fo, ffo, fffo, \dots\}$$

Herbranduniverset

Eksempel

La $T = \{f(x)\}$. Da er Herbranduniverset til T mengden

$$\{o, fo, ffo, fffo, \dots\}$$

Eksempel

La $T = \{a, f(x)\}$.

Herbranduniverset

Eksempel

La $T = \{f(x)\}$. Da er Herbranduniverset til T mengden

$$\{o, fo, ffo, fffo, \dots\}$$

Eksempel

La $T = \{a, f(x)\}$. Da er Herbranduniverset til T

Herbranduniverset

Eksempel

La $T = \{f(x)\}$. Da er Herbranduniverset til T mengden

$$\{o, fo, ffo, fffo, \dots\}$$

Eksempel

La $T = \{a, f(x)\}$. Da er Herbranduniverset til T mengden

$$\{a, fa, ffa, fffa, \dots\}$$

Herbranduniverset

Eksempel

La $T = \{f(x)\}$. Da er Herbranduniverset til T mengden

$$\{o, fo, ffo, fffo, \dots\}$$

Eksempel

La $T = \{a, f(x)\}$. Da er Herbranduniverset til T mengden

$$\{a, fa, ffa, fffa, \dots\}$$

Eksempel

La $F = \{\forall x H(f(g(x)))\}$.

Herbranduniverset

Eksempel

La $T = \{f(x)\}$. Da er Herbranduniverset til T mengden

$$\{o, fo, ffo, fffo, \dots\}$$

Eksempel

La $T = \{a, f(x)\}$. Da er Herbranduniverset til T mengden

$$\{a, fa, ffa, fffa, \dots\}$$

Eksempel

La $F = \{\forall x H(f(g(x)))\}$. Da er Herbranduniverset til F mengden

Herbranduniverset

Eksempel

La $T = \{f(x)\}$. Da er Herbranduniverset til T mengden

$$\{o, fo, ffo, fffo, \dots\}$$

Eksempel

La $T = \{a, f(x)\}$. Da er Herbranduniverset til T mengden

$$\{a, fa, ffa, fffa, \dots\}$$

Eksempel

La $F = \{\forall x H(f(g(x)))\}$. Da er Herbranduniverset til F mengden

$$\{o, fo, go, fgo, gfo, ffo, ggo, , \dots\}$$

Rettferdige strategier

Rettferdige strategier

- Enhver rettferdig strategi må gjøre at

Rettferdige strategier

- Enhver rettferdig strategi må gjøre at
 - alle formler blir analysert før eller senere, og

Rettferdige strategier

- Enhver rettferdig strategi må gjøre at
 - alle formler blir analysert før eller senere, og
 - alle γ -formler blir instansiert med alle termer før eller senere.

Rettferdige strategier

- Enhver rettferdig strategi må gjøre at
 - alle formler blir analysert før eller senere, og
 - alle γ -formler blir instansiert med alle termer før eller senere.
- Hvis vi følger en rettferdig strategi, så skal én av to ting skje:

Rettferdige strategier

- Enhver rettferdig strategi må gjøre at
 - alle formler blir analysert før eller senere, og
 - alle γ -formler blir instansiert med alle termer før eller senere.
- Hvis vi følger en rettferdig strategi, så skal én av to ting skje:
 - ① Enten så klarer vi å lukke alle grener og får et bevis,

Rettferdige strategier

- Enhver rettferdig strategi må gjøre at
 - alle formler blir analysert før eller senere, og
 - alle γ -formler blir instansiert med alle termer før eller senere.
- Hvis vi følger en rettferdig strategi, så skal én av to ting skje:
 - 1 Enten så klarer vi å lukke alle grener og får et bevis,
 - 2 eller så fins en åpen gren som vi kan lage en motmodell fra.

Rettferdige strategier

- Enhver rettferdig strategi må gjøre at
 - alle formler blir analysert før eller senere, og
 - alle γ -formler blir instansiert med alle termer før eller senere.
- Hvis vi følger en rettferdig strategi, så skal én av to ting skje:
 - ① Enten så klarer vi å lukke alle grener og får et bevis,
 - ② eller så fins en åpen gren som vi kan lage en motmodell fra.
- For at dette skal gi mening må vi godta at utledninger kan være uendelig store, dvs. ha uendelig lange grener.

Rettferdige strategier

- Enhver rettferdig strategi må gjøre at
 - alle formler blir analysert før eller senere, og
 - alle γ -formler blir instansiert med alle termer før eller senere.
- Hvis vi følger en rettferdig strategi, så skal én av to ting skje:
 - ① Enten så klarer vi å lukke alle grener og får et bevis,
 - ② eller så fins en åpen gren som vi kan lage en motmodell fra.
- For at dette skal gi mening må vi godta at utledninger kan være uendelig store, dvs. ha uendelig lange grener.
- Vi kan tenke at vi går til *grensen* i konstruksjonen av en utledning, enten ved at ingen regler lenger kan anvendes eller ved å fortsette med regelanvendelser i det uendelige. Vi kaller slike for **grenseutledninger**.

Rettferdige strategier

- Enhver rettferdig strategi må gjøre at
 - alle formler blir analysert før eller senere, og
 - alle γ -formler blir instansiert med alle termer før eller senere.
- Hvis vi følger en rettferdig strategi, så skal én av to ting skje:
 - ① Enten så klarer vi å lukke alle grener og får et bevis,
 - ② eller så fins en åpen gren som vi kan lage en motmodell fra.
- For at dette skal gi mening må vi godta at utledninger kan være uendelig store, dvs. ha uendelig lange grener.
- Vi kan tenke at vi går til *grensen* i konstruksjonen av en utledning, enten ved at ingen regler lenger kan anvendes eller ved å fortsette med regelanvendelser i det uendelige. Vi kaller slike for **grenseutledninger**.
- Vi inkluderer altså uendelige trær når vi snakker om grenseutledninger.

Rettferdige strategier

- Enhver rettferdig strategi må gjøre at
 - alle formler blir analysert før eller senere, og
 - alle γ -formler blir instansiert med alle termer før eller senere.
- Hvis vi følger en rettferdig strategi, så skal én av to ting skje:
 - ① Enten så klarer vi å lukke alle grener og får et bevis,
 - ② eller så fins en åpen gren som vi kan lage en motmodell fra.
- For at dette skal gi mening må vi godta at utledninger kan være uendelig store, dvs. ha uendelig lange grener.
- Vi kan tenke at vi går til *grensen* i konstruksjonen av en utledning, enten ved at ingen regler lenger kan anvendes eller ved å fortsette med regelanvendelser i det uendelige. Vi kaller slike for **grenseutledninger**.
- Vi inkluderer altså uendelige trær når vi snakker om grenseutledninger.
- Merk: hvis alle grener i en utledning kan lukkes, så er utledningen endelig.

Rettferdige strategier

Rettferdige strategier

- Vi skal nå abstrahere over alle “gode” strategier.

Rettferdige strategier

- Vi skal nå abstrahere over alle “gode” strategier.

Definisjon (Rettferdig strategi)

Rettferdige strategier

- Vi skal nå abstrahere over alle “gode” strategier.

Definisjon (Rettferdig strategi)

*En strategi er **rettferdig** hvis enhver grenseutledning som fås ved å følge strategien har følgende egenskaper:*

Rettferdige strategier

- Vi skal nå abstrahere over alle “gode” strategier.

Definisjon (Rettferdig strategi)

En strategi er *rettferdig* hvis enhver grenseutledning som fås ved å følge strategien har følgende egenskaper:

- 1 Hvis φ er en α -, β - eller δ -formel i en gren som ikke er lukket, så er φ hovedformel i en slutning i grenen.

Rettferdige strategier

- Vi skal nå abstrahere over alle “gode” strategier.

Definisjon (Rettferdig strategi)

En strategi er *rettferdig* hvis enhver grenseutledning som fås ved å følge strategien har følgende egenskaper:

- 1 Hvis φ er en α -, β - eller δ -formel i en gren som ikke er lukket, så er φ hovedformel i en slutning i grenen.
- 2 Hvis φ er en γ -formel på formen $Qx\psi$ i en gren som ikke er lukket, så er $\psi[t/x]$ aktiv formel i en slutning i grenen, for alle termer t i Herbranduniverset til grenen.

Königs lemma

Königs lemma

Lemma (Königs lemma)

Königs lemma

Lemma (Königs lemma)

Hvis T er et uendelig tre, men hvor enhver forgrening er endelig, så fins det en uendelig lang gren.

Königs lemma

Lemma (Königs lemma)

Hvis T er et uendelig tre, men hvor enhver forgrening er endelig, så fins det en uendelig lang gren.

Bevis

Königs lemma

Lemma (Königs lemma)

Hvis T er et uendelig tre, men hvor enhver forgrening er endelig, så fins det en uendelig lang gren.

Bevis

Vi definerer en uendelig lang gren induktivt.

Königs lemma

Lemma (Königs lemma)

Hvis T er et uendelig tre, men hvor enhver forgrening er endelig, så fins det en uendelig lang gren.

Bevis

Vi definerer en uendelig lang gren induktivt. La u_0 være rotnoden i treet T .

Königs lemma

Lemma (Königs lemma)

Hvis T er et uendelig tre, men hvor enhver forgrening er endelig, så fins det en uendelig lang gren.

Bevis

Vi definerer en uendelig lang gren induktivt. La u_0 være rotnoden i treet T . Siden T er uendelig og u_0 har endelig mange etterkommere, så må ett av de umiddelbare deltrærne fra u_0 være uendelig.

Königs lemma

Lemma (Königs lemma)

Hvis T er et uendelig tre, men hvor enhver forgrening er endelig, så fins det en uendelig lang gren.

Bevis

Vi definerer en uendelig lang gren induktivt. La u_0 være rotnoden i treet T . Siden T er uendelig og u_0 har endelig mange etterkommere, så må ett av de umiddelbare deltrærne fra u_0 være uendelig. (Ellers ville T ha vært et endelig tre.)

Königs lemma

Lemma (Königs lemma)

Hvis T er et uendelig tre, men hvor enhver forgrening er endelig, så fins det en uendelig lang gren.

Bevis

Vi definerer en uendelig lang gren induktivt. La u_0 være rotnoden i treet T . Siden T er uendelig og u_0 har endelig mange etterkommere, så må ett av de umiddelbare deltrærne fra u_0 være uendelig. (Ellers ville T ha vært et endelig tre.) La u_1 være rotnoden i et slikt deltre.

Königs lemma

Lemma (Königs lemma)

Hvis T er et uendelig tre, men hvor enhver forgrening er endelig, så fins det en uendelig lang gren.

Bevis

Vi definerer en uendelig lang gren induktivt. La u_0 være rotnoden i treet T . Siden T er uendelig og u_0 har endelig mange etterkommere, så må ett av de umiddelbare deltrærne fra u_0 være uendelig. (Ellers ville T ha vært et endelig tre.) La u_1 være rotnoden i et slikt deltre. Hvis grenen u_0, u_1, \dots, u_n er generert, så finner man neste node u_{n+1} ved samme type resonnering.

Königs lemma

Lemma (Königs lemma)

Hvis T er et uendelig tre, men hvor enhver forgrening er endelig, så fins det en uendelig lang gren.

Bevis

Vi definerer en uendelig lang gren induktivt. La u_0 være rotnoden i treet T . Siden T er uendelig og u_0 har endelig mange etterkommere, så må ett av de umiddelbare deltrærne fra u_0 være uendelig. (Ellers ville T ha vært et endelig tre.) La u_1 være rotnoden i et slikt deltre. Hvis grenen u_0, u_1, \dots, u_n er generert, så finner man neste node u_{n+1} ved samme type resonnering. Denne prosessen gir en uendelig gren.

Königs lemma

Lemma (Königs lemma)

Hvis T er et uendelig tre, men hvor enhver forgrening er endelig, så fins det en uendelig lang gren.

Bevis

Vi definerer en uendelig lang gren induktivt. La u_0 være rotnoden i treet T . Siden T er uendelig og u_0 har endelig mange etterkommere, så må ett av de umiddelbare deltrærne fra u_0 være uendelig. (Ellers ville T ha vært et endelig tre.) La u_1 være rotnoden i et slikt deltre. Hvis grenen u_0, u_1, \dots, u_n er generert, så finner man neste node u_{n+1} ved samme type resonnering. Denne prosessen gir en uendelig gren.

Korollar

Hvis T er et tre hvor enhver forgrening er endelig, og hvor alle grener er endelig lange, så er T endelig.

Bevis for modelleksistensteoremet

Bevis for modelleksistensteoremet

- Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar.

Bevis for modelleksistensteoremet

- Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar.
- La π være en utledning (muligens uendelig) av $\Gamma \vdash \Delta$ som fremkommer ved å følge en rettfærdig strategi. “En maksimal utledning”.

Bevis for modelleksistensteoremet

- Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar.
- La π være en utledning (muligens uendelig) av $\Gamma \vdash \Delta$ som fremkommer ved å følge en rettferdig strategi. “En maksimal utledning”.
- Siden $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar, så må det finnes minst en gren som ikke er lukket. (Her bruker vi Königs lemma.) La G være en slik gren. La

Bevis for modelleksistensteoremet

- Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar.
- La π være en utledning (muligens uendelig) av $\Gamma \vdash \Delta$ som fremkommer ved å følge en rettferdig strategi. “En maksimal utledning”.
- Siden $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar, så må det finnes minst en gren som ikke er lukket. (Her bruker vi Königs lemma.) La G være en slik gren. La

G^\top være mengden av alle formler som forekommer i en antecedent i G ,

Bevis for modelleksistensteoremet

- Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar.
- La π være en utledning (muligens uendelig) av $\Gamma \vdash \Delta$ som fremkommer ved å følge en rettfærdig strategi. “En maksimal utledning”.
- Siden $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar, så må det finnes minst en gren som ikke er lukket. (Her bruker vi Königs lemma.) La G være en slik gren. La

G^\top være mengden av alle formler som forekommer i en antecedent i G ,

G^\perp være mengden av alle formler som forekommer i en succedent i G , og

Bevis for modelleksistensteoremet

- Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar.
- La π være en utledning (muligens uendelig) av $\Gamma \vdash \Delta$ som fremkommer ved å følge en rettfærdig strategi. "En maksimal utledning".
- Siden $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar, så må det finnes minst en gren som ikke er lukket. (Her bruker vi Königs lemma.) La G være en slik gren. La

G^\top være mengden av alle formler som forekommer i en antecedent i G ,

G^\perp være mengden av alle formler som forekommer i en succedent i G , og

A være mengden av alle atomære formler som forekommer i G^\top .

Bevis for modelleksistensteoremet

Bevis for modelleksistensteoremet

- Vi konstruerer nå en motmodell \mathcal{M} for $\Gamma \vdash \Delta$.

Bevis for modelleksistensteoremet

- Vi konstruerer nå en motmodell \mathcal{M} for $\Gamma \vdash \Delta$.
- La domenet til \mathcal{M} være Herbranduniverset til grenen (dvs. mengden av alle lukkede termer som kan genereres fra termer som forekommer i grenen).

Bevis for modelleksistensteoremet

- Vi konstruerer nå en motmodell \mathcal{M} for $\Gamma \vdash \Delta$.
- La domenet til \mathcal{M} være Herbranduniverset til grenen (dvs. mengden av alle lukkede termer som kan genereres fra termer som forekommer i grenen).
- La $a^{\mathcal{M}} = a$ for alle konstantsymboler a .

Bevis for modelleksistensteoremet

- Vi konstruerer nå en motmodell \mathcal{M} for $\Gamma \vdash \Delta$.
- La domenet til \mathcal{M} være Herbranduniverset til grenen (dvs. mengden av alle lukkede termer som kan genereres fra termer som forekommer i grenen).
- La $a^{\mathcal{M}} = a$ for alle konstantsymboler a .
- Hvis f er et funksjonssymbol med aritet n , la $f^{\mathcal{M}}(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n)$.

Bevis for modelleksistensteoremet

- Vi konstruerer nå en motmodell \mathcal{M} for $\Gamma \vdash \Delta$.
- La domenet til \mathcal{M} være Herbranduniverset til grenen (dvs. mengden av alle lukkede termer som kan genereres fra termer som forekommer i grenen).
- La $a^{\mathcal{M}} = a$ for alle konstantsymboler a .
- Hvis f er et funksjonssymbol med aritet n , la $f^{\mathcal{M}}(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n)$.
 - Da vil $t^{\mathcal{M}} = t$ for alle lukkede termer t .

Bevis for modelleksistensteoremet

- Vi konstruerer nå en motmodell \mathcal{M} for $\Gamma \vdash \Delta$.
- La domenet til \mathcal{M} være Herbranduniverset til grenen (dvs. mengden av alle lukkede termer som kan genereres fra termer som forekommer i grenen).
- La $a^{\mathcal{M}} = a$ for alle konstantsymboler a .
- Hvis f er et funksjonssymbol med aritet n , la $f^{\mathcal{M}}(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n)$.
 - Da vil $t^{\mathcal{M}} = t$ for alle lukkede termer t .
 - Alle termer tolkes som seg selv.

Bevis for modelleksistensteoremet

- Vi konstruerer nå en motmodell \mathcal{M} for $\Gamma \vdash \Delta$.
- La domenet til \mathcal{M} være Herbranduniverset til grenen (dvs. mengden av alle lukkede termer som kan genereres fra termer som forekommer i grenen).
- La $a^{\mathcal{M}} = a$ for alle konstantsymboler a .
- Hvis f er et funksjonssymbol med aritet n , la $f^{\mathcal{M}}(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n)$.
 - Da vil $t^{\mathcal{M}} = t$ for alle lukkede termer t .
 - Alle termer tolkes som seg selv.
- Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n , la $\langle t_1, \dots, t_n \rangle \in R^{\mathcal{M}}$ hvis og bare hvis $R(t_1, \dots, t_n) \in A$.

Bevis for modelleksistensteoremet

- Vi konstruerer nå en motmodell \mathcal{M} for $\Gamma \vdash \Delta$.
- La domenet til \mathcal{M} være Herbranduniverset til grenen (dvs. mengden av alle lukkede termer som kan genereres fra termer som forekommer i grenen).
- La $a^{\mathcal{M}} = a$ for alle konstantsymboler a .
- Hvis f er et funksjonssymbol med aritet n , la $f^{\mathcal{M}}(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n)$.
 - Da vil $t^{\mathcal{M}} = t$ for alle lukkede termer t .
 - Alle termer tolkes som seg selv.
- Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n , la $\langle t_1, \dots, t_n \rangle \in R^{\mathcal{M}}$ hvis og bare hvis $R(t_1, \dots, t_n) \in A$.
- En slik modell kalles ofte for en **Herbrandmodell** eller en **termmodell**.

Bevis for modelleksistensteoremet

- Vi viser ved induksjon på førsteordens formler (i språket \mathcal{L}^{par}) at modellen \mathcal{M} gjør *alle* formler i G^\top sanne og alle formler i G^\perp usanne.

Bevis for modelleksistensteoremet

- Vi viser ved induksjon på førsteordens formler (i språket \mathcal{L}^{par}) at modellen \mathcal{M} gjør *alle* formler i G^\top sanne og alle formler i G^\perp usanne.
- Påstandene som vi viser for førsteordens formler er:

Bevis for modelleksistensteoremet

- Vi viser ved induksjon på førsteordens formler (i språket \mathcal{L}^{par}) at modellen \mathcal{M} gjør *alle* formler i G^{\top} sanne og alle formler i G^{\perp} usanne.
- Påstandene som vi viser for førsteordens formler er:
Hvis $\varphi \in G^{\top}$, så $\mathcal{M} \models \varphi$.

Bevis for modelleksistensteoremet

- Vi viser ved induksjon på førsteordens formler (i språket \mathcal{L}^{par}) at modellen \mathcal{M} gjør *alle* formler i G^{\top} sanne og alle formler i G^{\perp} usanne.
- Påstandene som vi viser for førsteordens formler er:
 - Hvis $\varphi \in G^{\top}$, så $\mathcal{M} \models \varphi$.
 - Hvis $\varphi \in G^{\perp}$, så $\mathcal{M} \not\models \varphi$.

Bevis for modelleksistensteoremet

- Vi viser ved induksjon på førsteordens formler (i språket \mathcal{L}^{par}) at modellen \mathcal{M} gjør *alle* formler i G^{\top} sanne og alle formler i G^{\perp} usanne.
- Påstandene som vi viser for førsteordens formler er:
 - Hvis $\varphi \in G^{\top}$, så $\mathcal{M} \models \varphi$.
 - Hvis $\varphi \in G^{\perp}$, så $\mathcal{M} \not\models \varphi$.

Basissteg 1: φ er en atomær formel $R(t_1, \dots, t_n)$ i G^{\top} .

Bevis for modelleksistensteoremet

- Vi viser ved induksjon på førsteordens formler (i språket \mathcal{L}^{par}) at modellen \mathcal{M} gjør *alle* formler i G^{\top} sanne og alle formler i G^{\perp} usanne.
- Påstandene som vi viser for førsteordens formler er:
 - Hvis $\varphi \in G^{\top}$, så $\mathcal{M} \models \varphi$.
 - Hvis $\varphi \in G^{\perp}$, så $\mathcal{M} \not\models \varphi$.

Basissteg 1: φ er en atomær formel $R(t_1, \dots, t_n)$ i G^{\top} .

- Da må $R(t_1, \dots, t_n) \in A$ og $\langle t_1, \dots, t_n \rangle \in R^{\mathcal{M}}$ ved konstruksjon.

Bevis for modelleksistensteoremet

- Vi viser ved induksjon på førsteordens formler (i språket \mathcal{L}^{par}) at modellen \mathcal{M} gjør *alle* formler i G^{\top} sanne og alle formler i G^{\perp} usanne.
- Påstandene som vi viser for førsteordens formler er:
 - Hvis $\varphi \in G^{\top}$, så $\mathcal{M} \models \varphi$.
 - Hvis $\varphi \in G^{\perp}$, så $\mathcal{M} \not\models \varphi$.

Basissteg 1: φ er en atomær formel $R(t_1, \dots, t_n)$ i G^{\top} .

- Da må $R(t_1, \dots, t_n) \in A$ og $\langle t_1, \dots, t_n \rangle \in R^{\mathcal{M}}$ ved konstruksjon.
- Da må $\mathcal{M} \models R(t_1, \dots, t_n)$.

Bevis for modelleksistensteoremet

- Vi viser ved induksjon på førsteordens formler (i språket \mathcal{L}^{par}) at modellen \mathcal{M} gjør *alle* formler i G^\top sanne og alle formler i G^\perp usanne.
- Påstandene som vi viser for førsteordens formler er:
 - Hvis $\varphi \in G^\top$, så $\mathcal{M} \models \varphi$.
 - Hvis $\varphi \in G^\perp$, så $\mathcal{M} \not\models \varphi$.

Basissteg 1: φ er en atomær formel $R(t_1, \dots, t_n)$ i G^\top .

- Da må $R(t_1, \dots, t_n) \in A$ og $\langle t_1, \dots, t_n \rangle \in R^{\mathcal{M}}$ ved konstruksjon.
- Da må $\mathcal{M} \models R(t_1, \dots, t_n)$.

Basissteg 2: φ er en atomær formel $R(t_1, \dots, t_n)$ i G^\perp .

Bevis for modelleksistensteoremet

- Vi viser ved induksjon på førsteordens formler (i språket \mathcal{L}^{par}) at modellen \mathcal{M} gjør *alle* formler i G^\top sanne og alle formler i G^\perp usanne.
- Påstandene som vi viser for førsteordens formler er:
 - Hvis $\varphi \in G^\top$, så $\mathcal{M} \models \varphi$.
 - Hvis $\varphi \in G^\perp$, så $\mathcal{M} \not\models \varphi$.

Basissteg 1: φ er en atomær formel $R(t_1, \dots, t_n)$ i G^\top .

- Da må $R(t_1, \dots, t_n) \in A$ og $\langle t_1, \dots, t_n \rangle \in R^\mathcal{M}$ ved konstruksjon.
- Da må $\mathcal{M} \models R(t_1, \dots, t_n)$.

Basissteg 2: φ er en atomær formel $R(t_1, \dots, t_n)$ i G^\perp .

- Siden G ikke er lukket, må $R(t_1, \dots, t_n) \notin A$ og $\langle t_1, \dots, t_n \rangle \notin R^\mathcal{M}$.

Bevis for modelleksistensteoremet

- Vi viser ved induksjon på førsteordens formler (i språket \mathcal{L}^{par}) at modellen \mathcal{M} gjør *alle* formler i G^\top sanne og alle formler i G^\perp usanne.
- Påstandene som vi viser for førsteordens formler er:
 - Hvis $\varphi \in G^\top$, så $\mathcal{M} \models \varphi$.
 - Hvis $\varphi \in G^\perp$, så $\mathcal{M} \not\models \varphi$.

Basissteg 1: φ er en atomær formel $R(t_1, \dots, t_n)$ i G^\top .

- Da må $R(t_1, \dots, t_n) \in A$ og $\langle t_1, \dots, t_n \rangle \in R^\mathcal{M}$ ved konstruksjon.
- Da må $\mathcal{M} \models R(t_1, \dots, t_n)$.

Basissteg 2: φ er en atomær formel $R(t_1, \dots, t_n)$ i G^\perp .

- Siden G ikke er lukket, må $R(t_1, \dots, t_n) \notin A$ og $\langle t_1, \dots, t_n \rangle \notin R^\mathcal{M}$.
- Da vil $\mathcal{M} \not\models R(t_1, \dots, t_n)$.

Bevis for modelleksistensteoremet

Induksjonssteg: Fra antakelsen om at påstandene holder for mindre formler, så må vi vise at de holder for $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$.

Bevis for modelleksistensteoremet

Induksjonssteg: Fra antakelsen om at påstandene holder for mindre formler, så må vi vise at de holder for $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$.

I beviset for kompletthet av utsagnslogisk LK gjorde vi mesteparten.

Bevis for modelleksistensteoremet

Induksjonssteg: Fra antakelsen om at påstandene holder for mindre formler, så må vi vise at de holder for $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$.

I beviset for kompletthet av utsagnslogisk LK gjorde vi mesteparten.

F.eks. anta at $\varphi \wedge \psi \in G^T$.

Bevis for modelleksistensteoremet

Induksjonssteg: Fra antakelsen om at påstandene holder for mindre formler, så må vi vise at de holder for $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$.

I beviset for kompletthet av utsagnslogisk LK gjorde vi mesteparten.

F.eks. anta at $\varphi \wedge \psi \in G^T$.

- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\varphi \wedge \psi$ vært hovedformel i en slutning i grenen G .

Bevis for modelleksistensteoremet

Induksjonssteg: Fra antakelsen om at påstandene holder for mindre formler, så må vi vise at de holder for $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$.

I beviset for kompletthet av utsagnslogisk LK gjorde vi mesteparten.

F.eks. anta at $\varphi \wedge \psi \in G^T$.

- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\varphi \wedge \psi$ vært hovedformel i en slutning i grenen G .
- Da vil $\varphi \in G^T$ og $\psi \in G^T$.

Bevis for modelleksistensteoremet

Induksjonssteg: Fra antakelsen om at påstandene holder for mindre formuler, så må vi vise at de holder for $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$.

I beviset for kompletthet av utsagnslogisk LK gjorde vi mesteparten.

F.eks. anta at $\varphi \wedge \psi \in G^T$.

- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\varphi \wedge \psi$ vært hovedformel i en slutning i grenen G .
- Da vil $\varphi \in G^T$ og $\psi \in G^T$.
- Ved induksjonshypotesen vil $\mathcal{M} \models \varphi$ og $\mathcal{M} \models \psi$.

Bevis for modelleksistensteoremet

Induksjonssteg: Fra antakelsen om at påstandene holder for mindre formler, så må vi vise at de holder for $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$.

I beviset for kompletthet av utsagnslogisk LK gjorde vi mesteparten.

F.eks. anta at $\varphi \wedge \psi \in G^T$.

- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\varphi \wedge \psi$ vært hovedformel i en slutning i grenen G .
- Da vil $\varphi \in G^T$ og $\psi \in G^T$.
- Ved induksjonshypotesen vil $\mathcal{M} \models \varphi$ og $\mathcal{M} \models \psi$.
- Ved definisjonen av oppfyllbarhet har vi $\mathcal{M} \models \varphi \wedge \psi$.

Bevis for modelleksistensteoremet

Induksjonssteg: Fra antakelsen om at påstandene holder for mindre formler, så må vi vise at de holder for $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$.

I beviset for kompletthet av utsagnslogisk LK gjorde vi mesteparten.

F.eks. anta at $\varphi \wedge \psi \in G^T$.

- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\varphi \wedge \psi$ vært hovedformel i en slutning i grenen G .
- Da vil $\varphi \in G^T$ og $\psi \in G^T$.
- Ved induksjonshypotesen vil $\mathcal{M} \models \varphi$ og $\mathcal{M} \models \psi$.
- Ved definisjonen av oppfyllbarhet har vi $\mathcal{M} \models \varphi \wedge \psi$.

Formler med kvantorer gjenstår.

Bevis for modelleksistensteoremet

Anta at $\exists x\varphi \in G^\top$.

Bevis for modelleksistensteoremet

Anta at $\exists x\varphi \in G^\top$.

- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\exists x\varphi$ vært hovedformel i en slutning i grenen.

Bevis for modelleksistensteoremet

Anta at $\exists x\varphi \in G^\top$.

- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\exists x\varphi$ vært hovedformel i en slutning i grenen.
- Da fins en parameter a slik at $\varphi[a/x] \in G^\top$.

Bevis for modelleksistensteoremet

Anta at $\exists x\varphi \in G^\top$.

- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\exists x\varphi$ vært hovedformel i en slutning i grenen.
- Da fins en parameter a slik at $\varphi[a/x] \in G^\top$.
- Ved induksjonshypotesen vil $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.

Bevis for modelleksistensteoremet

Anta at $\exists x\varphi \in G^\top$.

- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\exists x\varphi$ vært hovedformel i en slutning i grenen.
- Da fins en parameter a slik at $\varphi[a/x] \in G^\top$.
- Ved induksjonshypotesen vil $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.
- Med substitusjonslemmaet: $\mathcal{M}, \{x \mapsto a^\mathcal{M}\} \models \varphi$.

Bevis for modelleksistensteoremet

Anta at $\exists x\varphi \in G^\top$.

- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\exists x\varphi$ vært hovedformel i en slutning i grenen.
- Da fins en parameter a slik at $\varphi[a/x] \in G^\top$.
- Ved induksjonshypotesen vil $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.
- Med substitusjonslemmaet: $\mathcal{M}, \{x \mapsto a^\mathcal{M}\} \models \varphi$.
- Ved definisjonen av oppfylbarhet vil $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$.

Bevis for modelleksistensteoremet

Anta at $\exists x\varphi \in G^\perp$.

- Vi må vise at $\mathcal{M} \not\models \exists x\varphi$. Anta at det ikke holder.

Bevis for modelleksistensteoremet

Anta at $\exists x\varphi \in G^\perp$.

- Vi må vise at $\mathcal{M} \not\models \exists x\varphi$. Anta at det ikke holder.
- Da gjelder $\mathcal{M}, \{x \mapsto t\} \models \varphi$ for en term $t \in |\mathcal{M}|$.

Bevis for modelleksistensteoremet

Anta at $\exists x\varphi \in G^\perp$.

- Vi må vise at $\mathcal{M} \not\models \exists x\varphi$. Anta at det ikke holder.
- Da gjelder $\mathcal{M}, \{x \mapsto t\} \models \varphi$ for en term $t \in |\mathcal{M}|$.
- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\varphi[t/x]$ vært aktiv formel på grenen.

Bevis for modelleksistensteoremet

Anta at $\exists x\varphi \in G^\perp$.

- Vi må vise at $\mathcal{M} \not\models \exists x\varphi$. Anta at det ikke holder.
- Da gjelder $\mathcal{M}, \{x \mapsto t\} \models \varphi$ for en term $t \in |\mathcal{M}|$.
- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\varphi[t/x]$ vært aktiv formel på grenen.
- Vi har dermed følgende:

Bevis for modelleksistensteoremet

Anta at $\exists x\varphi \in G^\perp$.

- Vi må vise at $\mathcal{M} \not\models \exists x\varphi$. Anta at det ikke holder.
- Da gjelder $\mathcal{M}, \{x \mapsto t\} \models \varphi$ for en term $t \in |\mathcal{M}|$.
- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\varphi[t/x]$ vært aktiv formel på grenen.
- Vi har dermed følgende:
 - $\varphi[t/x] \in G^\perp$

Bevis for modelleksistensteoremet

Anta at $\exists x\varphi \in G^\perp$.

- Vi må vise at $\mathcal{M} \not\models \exists x\varphi$. Anta at det ikke holder.
- Da gjelder $\mathcal{M}, \{x \mapsto t\} \models \varphi$ for en term $t \in |\mathcal{M}|$.
- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\varphi[t/x]$ vært aktiv formel på grenen.
- Vi har dermed følgende:
 - $\varphi[t/x] \in G^\perp$
 - $\mathcal{M} \not\models \varphi[t/x]$ (fra induksjonshypotesen)

Bevis for modelleksistensteoremet

Anta at $\exists x\varphi \in G^\perp$.

- Vi må vise at $\mathcal{M} \not\models \exists x\varphi$. Anta at det ikke holder.
- Da gjelder $\mathcal{M}, \{x \mapsto t\} \models \varphi$ for en term $t \in |\mathcal{M}|$.
- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\varphi[t/x]$ vært aktiv formel på grenen.
- Vi har dermed følgende:
 - $\varphi[t/x] \in G^\perp$
 - $\mathcal{M} \not\models \varphi[t/x]$ (fra induksjonshypotesen)
 - $\mathcal{M}, \{x \mapsto t^{\mathcal{M}}\} \not\models \varphi$ (substitusjonslemmaet)

Bevis for modelleksistensteoremet

Anta at $\exists x\varphi \in G^\perp$.

- Vi må vise at $\mathcal{M} \not\models \exists x\varphi$. Anta at det ikke holder.
- Da gjelder $\mathcal{M}, \{x \mapsto t\} \models \varphi$ for en term $t \in |\mathcal{M}|$.
- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\varphi[t/x]$ vært aktiv formel på grenen.
- Vi har dermed følgende:
 - $\varphi[t/x] \in G^\perp$
 - $\mathcal{M} \not\models \varphi[t/x]$ (fra induksjonshypotesen)
 - $\mathcal{M}, \{x \mapsto t^{\mathcal{M}}\} \models \varphi$ (substitusjonslemmaet)
 - $\mathcal{M}, \{x \mapsto t\} \models \varphi$ (siden $t^{\mathcal{M}} = t$)

Bevis for modelleksistensteoremet

Anta at $\exists x\varphi \in G^\perp$.

- Vi må vise at $\mathcal{M} \not\models \exists x\varphi$. Anta at det ikke holder.
- Da gjelder $\mathcal{M}, \{x \mapsto t\} \models \varphi$ for en term $t \in |\mathcal{M}|$.
- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\varphi[t/x]$ vært aktiv formel på grenen.
- Vi har dermed følgende:
 - $\varphi[t/x] \in G^\perp$
 - $\mathcal{M} \not\models \varphi[t/x]$ (fra induksjonshypotesen)
 - $\mathcal{M}, \{x \mapsto t^{\mathcal{M}}\} \models \varphi$ (substitusjonslemmaet)
 - $\mathcal{M}, \{x \mapsto t\} \models \varphi$ (siden $t^{\mathcal{M}} = t$)
- Dermed har vi en motsigelse.

Bevis for modelleksistensteoremet

Anta at $\forall x \varphi \in G^\perp$.

Bevis for modelleksistensteoremet

Anta at $\forall x\varphi \in G^\perp$.

- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\forall x\varphi$ vært hovedformel i en slutning i grenen.

Bevis for modelleksistensteoremet

Anta at $\forall x\varphi \in G^\perp$.

- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\forall x\varphi$ vært hovedformel i en slutning i grenen.
- Da fins en parameter a slik at $\varphi[a/x] \in G^\perp$.

Bevis for modelleksistensteoremet

Anta at $\forall x\varphi \in G^\perp$.

- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\forall x\varphi$ vært hovedformel i en slutning i grenen.
- Da fins en parameter a slik at $\varphi[a/x] \in G^\perp$.
- Ved induksjonshypotesen vil $\mathcal{M} \not\models \varphi[a/x]$.

Bevis for modelleksistensteoremet

Anta at $\forall x\varphi \in G^\perp$.

- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\forall x\varphi$ vært hovedformel i en slutning i grenen.
- Da fins en parameter a slik at $\varphi[a/x] \in G^\perp$.
- Ved induksjonshypotesen vil $\mathcal{M} \not\models \varphi[a/x]$.
- Med substitusjonslemmaet: $\mathcal{M}, \{x \mapsto a^\mathcal{M}\} \not\models \varphi$.

Bevis for modelleksistensteoremet

Anta at $\forall x\varphi \in G^\perp$.

- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\forall x\varphi$ vært hovedformel i en slutning i grenen.
- Da fins en parameter a slik at $\varphi[a/x] \in G^\perp$.
- Ved induksjonshypotesen vil $\mathcal{M} \not\models \varphi[a/x]$.
- Med substitusjonslemmaet: $\mathcal{M}, \{x \mapsto a^{\mathcal{M}}\} \not\models \varphi$.
- Ved definisjonen av oppfylbarhet vil $\mathcal{M} \not\models \forall x\varphi$.

Bevis for modelleksistensteoremet

Anta at $\forall x\varphi \in G^T$.

- Vi må vise at $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$. Anta at det ikke holder.

Bevis for modelleksistensteoremet

Anta at $\forall x\varphi \in G^T$.

- Vi må vise at $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$. Anta at det ikke holder.
- Da gjelder $\mathcal{M}, \{x \mapsto t\} \not\models \varphi$ for en term $t \in |\mathcal{M}|$.

Bevis for modelleksistensteoremet

Anta at $\forall x\varphi \in G^T$.

- Vi må vise at $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$. Anta at det ikke holder.
- Da gjelder $\mathcal{M}, \{x \mapsto t\} \not\models \varphi$ for en term $t \in |\mathcal{M}|$.
- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\varphi[t/x]$ vært aktiv formel på grenen.

Bevis for modelleksistensteoremet

Anta at $\forall x\varphi \in G^T$.

- Vi må vise at $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$. Anta at det ikke holder.
- Da gjelder $\mathcal{M}, \{x \mapsto t\} \not\models \varphi$ for en term $t \in |\mathcal{M}|$.
- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\varphi[t/x]$ vært aktiv formel på grenen.
- Vi har dermed følgende:

Bevis for modelleksistensteoremet

Anta at $\forall x\varphi \in G^T$.

- Vi må vise at $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$. Anta at det ikke holder.
- Da gjelder $\mathcal{M}, \{x \mapsto t\} \not\models \varphi$ for en term $t \in |\mathcal{M}|$.
- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\varphi[t/x]$ vært aktiv formel på grenen.
- Vi har dermed følgende:
 - $\varphi[t/x] \in G^T$

Bevis for modelleksistensteoremet

Anta at $\forall x\varphi \in G^\top$.

- Vi må vise at $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$. Anta at det ikke holder.
- Da gjelder $\mathcal{M}, \{x \mapsto t\} \not\models \varphi$ for en term $t \in |\mathcal{M}|$.
- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\varphi[t/x]$ vært aktiv formel på grenen.
- Vi har dermed følgende:
 - $\varphi[t/x] \in G^\top$
 - $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$ (fra induksjonshypotesen)

Bevis for modelleksistensteoremet

Anta at $\forall x\varphi \in G^T$.

- Vi må vise at $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$. Anta at det ikke holder.
- Da gjelder $\mathcal{M}, \{x \mapsto t\} \not\models \varphi$ for en term $t \in |\mathcal{M}|$.
- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\varphi[t/x]$ vært aktiv formel på grenen.
- Vi har dermed følgende:
 - $\varphi[t/x] \in G^T$
 - $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$ (fra induksjonshypotesen)
 - $\mathcal{M}, \{x \mapsto t^M\} \models \varphi$ (substitusjonslemmaet)

Bevis for modelleksistensteoremet

Anta at $\forall x\varphi \in G^T$.

- Vi må vise at $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$. Anta at det ikke holder.
- Da gjelder $\mathcal{M}, \{x \mapsto t\} \not\models \varphi$ for en term $t \in |\mathcal{M}|$.
- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\varphi[t/x]$ vært aktiv formel på grenen.
- Vi har dermed følgende:
 - $\varphi[t/x] \in G^T$
 - $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$ (fra induksjonshypotesen)
 - $\mathcal{M}, \{x \mapsto t^{\mathcal{M}}\} \models \varphi$ (substitusjonslemmaet)
 - $\mathcal{M}, \{x \mapsto t\} \models \varphi$ (siden $t^{\mathcal{M}} = t$)

Bevis for modelleksistensteoremet

Anta at $\forall x\varphi \in G^T$.

- Vi må vise at $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$. Anta at det ikke holder.
- Da gjelder $\mathcal{M}, \{x \mapsto t\} \not\models \varphi$ for en term $t \in |\mathcal{M}|$.
- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\varphi[t/x]$ vært aktiv formel på grenen.
- Vi har dermed følgende:
 - $\varphi[t/x] \in G^T$
 - $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$ (fra induksjonshypotesen)
 - $\mathcal{M}, \{x \mapsto t^{\mathcal{M}}\} \models \varphi$ (substitusjonslemmaet)
 - $\mathcal{M}, \{x \mapsto t\} \models \varphi$ (siden $t^{\mathcal{M}} = t$)
- Dermed har vi en motsigelse.

Noen kommentarer

Noen kommentarer

- Vi kan se på konstruksjonen av en utledning som en tilnærming/approksimasjon til en motmodell for $\Gamma \vdash \Delta$.

Noen kommentarer

- Vi kan se på konstruksjonen av en utledning som en tilnærming/approksimasjon til en motmodell for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Jo flere ganger vi anvender regler (ved å følge en rettferdig strategi), jo nærmere kommer vi en eventuell motmodell.

Noen kommentarer

- Vi kan se på konstruksjonen av en utledning som en tilnærming/approksimasjon til en motmodell for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Jo flere ganger vi anvender regler (ved å følge en rettferdig strategi), jo nærmere kommer vi en eventuell motmodell.
- For å lage en motmodell på denne måten, kan det være nødvendig å anvende reglene uendelig mange ganger.

Noen kommentarer

- Vi kan se på konstruksjonen av en utledning som en tilnærming/approksimasjon til en motmodell for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Jo flere ganger vi anvender regler (ved å følge en rettferdig strategi), jo nærmere kommer vi en eventuell motmodell.
- For å lage en motmodell på denne måten, kan det være nødvendig å anvende reglene uendelig mange ganger.
- Ofte fins det endelige motmodeller der hvor denne metoden gir en uendelig motmodell. Å finne endelige motmodeller der hvor det fins er ikke lett. Dette er noe det forskes på.

Noen kommentarer

- Vi kan se på konstruksjonen av en utledning som en tilnærming/approksimasjon til en motmodell for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Jo flere ganger vi anvender regler (ved å følge en rettferdig strategi), jo nærmere kommer vi en eventuell motmodell.
- For å lage en motmodell på denne måten, kan det være nødvendig å anvende reglene uendelig mange ganger.
- Ofte fins det endelige motmodeller der hvor denne metoden gir en uendelig motmodell. Å finne endelige motmodeller der hvor det fins er ikke lett. Dette er noe det forskes på.
- Idéen i kompletthetsbeviset er viktig. Konstruksjonen av modeller fra noe rent syntaktisk. Et filosofisk spørsmål: Er det egentlig et skille mellom syntaks og semantikk?

$$\underbrace{\forall x(Px \rightarrow Qx), Pa}_{\varphi} \vdash \forall xQx$$

$$\underbrace{\forall x(Px \rightarrow Qx)}_{\varphi}, Pa \vdash \forall xQx$$

$$\frac{\varphi, Pa \rightarrow Qa, Pa \vdash \forall x Qx}{\underbrace{\forall x (Px \rightarrow Qx), Pa \vdash \forall x Qx}_{\varphi}}$$

$$\frac{\varphi, Pa \rightarrow Qa, Pa \vdash \forall x Qx}{\underbrace{\forall x (Px \rightarrow Qx), Pa \vdash \forall x Qx}_{\varphi}}$$

$$\frac{\varphi, Pa \vdash \forall xQx, Pa \qquad \qquad \qquad Qa, \varphi, Pa \vdash \forall xQx}{\frac{\varphi, Pa \rightarrow Qa, Pa \vdash \forall xQx}{\underbrace{\forall x(Px \rightarrow Qx), Pa \vdash \forall xQx}_{\varphi}}}$$

$$\frac{\varphi, Pa \vdash \forall x Qx, Pa \qquad \qquad \qquad Qa, \varphi, Pa \vdash \forall x Qx}{\frac{\varphi, Pa \rightarrow Qa, Pa \vdash \forall x Qx}{\underbrace{\forall x (Px \rightarrow Qx), Pa \vdash \forall x Qx}_{\varphi}}}$$

$$\begin{array}{c}
 \times \\
 \varphi, Pa \vdash \forall x Qx, Pa \\
 \hline
 \varphi, Pa \rightarrow Qa, Pa \vdash \forall x Qx \\
 \hline
 \underbrace{\forall x (Px \rightarrow Qx), Pa \vdash \forall x Qx}_{\varphi}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 Qa, \varphi, Pa \vdash \forall x Qx
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \times \\
 \varphi, Pa \vdash \forall xQx, Pa \qquad \qquad \qquad Qa, \varphi, Pa \vdash \forall xQx \\
 \hline
 \varphi, Pa \rightarrow Qa, Pa \vdash \forall xQx \\
 \hline
 \underbrace{\forall x(Px \rightarrow Qx), Pa \vdash \forall xQx}_{\varphi}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \times \\
 \varphi, Pa \vdash \forall x Qx, Pa \\
 \hline
 \varphi, Pa \rightarrow Qa, Pa \vdash \forall x Qx \\
 \hline
 \underbrace{\forall x (Px \rightarrow Qx), Pa \vdash \forall x Qx}_{\varphi}
 \end{array}
 \qquad
 \frac{Qa, \varphi, Pa \vdash Qb}{Qa, \varphi, Pa \vdash \forall x Qx}$$

$$\begin{array}{c}
 \times \\
 \varphi, Pa \vdash \forall xQx, Pa \\
 \hline
 \varphi, Pa \rightarrow Qa, Pa \vdash \forall xQx \\
 \hline
 \underbrace{\forall x(Px \rightarrow Qx), Pa \vdash \forall xQx}_{\varphi}
 \end{array}
 \qquad
 \frac{Qa, \varphi, Pa \vdash Qb}{Qa, \varphi, Pa \vdash \forall xQx}$$

$$\begin{array}{c}
 \times \\
 \varphi, Pa \vdash \forall x Qx, Pa \\
 \hline
 \varphi, Pa \rightarrow Qa, Pa \vdash \forall x Qx \\
 \hline
 \underbrace{\forall x (Px \rightarrow Qx), Pa \vdash \forall x Qx}_{\varphi}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 Qa, \varphi, Pb \rightarrow Qb, Pa \vdash Qb \\
 \hline
 Qa, \varphi, Pa \vdash Qb \\
 \hline
 Qa, \varphi, Pa \vdash \forall x Qx \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \times \\
 \varphi, Pa \vdash \forall x Qx, Pa \\
 \hline
 \varphi, Pa \rightarrow Qa, Pa \vdash \forall x Qx \\
 \hline
 \underbrace{\forall x (Px \rightarrow Qx), Pa \vdash \forall x Qx}_{\varphi}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 Qa, \varphi, Pb \rightarrow Qb, Pa \vdash Qb \\
 \hline
 Qa, \varphi, Pa \vdash Qb \\
 \hline
 Qa, \varphi, Pa \vdash \forall x Qx \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \times \\
 \varphi, Pa \vdash \forall x Qx, Pa
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 \varphi, Pa \rightarrow Qa, Pa \vdash \forall x Qx \\
 \hline
 \underbrace{\forall x (Px \rightarrow Qx), Pa \vdash \forall x Qx}_{\varphi}
 \end{array}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 Qa, \varphi, Pa \vdash Qb, Pb \qquad Qb, Qa, \varphi, Pa \vdash Qb \\
 \hline
 Qa, \varphi, Pb \rightarrow Qb, Pa \vdash Qb \\
 \hline
 Qa, \varphi, Pa \vdash Qb \\
 \hline
 Qa, \varphi, Pa \vdash \forall x Qx
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \times \\
 \varphi, Pa \vdash \forall x Qx, Pa
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \frac{Qa, \varphi, Pa \vdash Qb, Pb \quad Qb, Qa, \varphi, Pa \vdash Qb}{Qa, \varphi, Pb \rightarrow Qb, Pa \vdash Qb} \\
 \frac{Qa, \varphi, Pa \vdash Qb}{Qa, \varphi, Pa \vdash \forall x Qx} \\
 \hline
 \frac{\varphi, Pa \rightarrow Qa, Pa \vdash \forall x Qx}{\underbrace{\forall x (Px \rightarrow Qx), Pa \vdash \forall x Qx}_{\varphi}}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \times \\
 \frac{Qa, \varphi, Pa \vdash Qb, Pb \quad Qb, Qa, \varphi, Pa \vdash Qb}{Qa, \varphi, Pb \rightarrow Qb, Pa \vdash Qb} \\
 \frac{Qa, \varphi, Pa \vdash Qb}{Qa, \varphi, Pa \vdash \forall x Qx} \\
 \times \\
 \frac{\varphi, Pa \vdash \forall x Qx, Pa}{\frac{\varphi, Pa \rightarrow Qa, Pa \vdash \forall x Qx}{\underbrace{\forall x (Px \rightarrow Qx), Pa \vdash \forall x Qx}_{\varphi}}}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \times \\
 \varphi, Pa \vdash \forall xQx, Pa \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 G \\
 Qa, \varphi, Pa \vdash Qb, Pb
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \times \\
 Qb, Qa, \varphi, Pa \vdash Qb \\
 \hline
 Qa, \varphi, Pb \rightarrow Qb, Pa \vdash Qb \\
 \hline
 Qa, \varphi, Pa \vdash Qb \\
 \hline
 Qa, \varphi, Pa \vdash \forall xQx
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \times \\ \varphi, Pa \vdash \forall xQx, Pa \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} \text{G} \\ Qa, \varphi, Pa \vdash Qb, Pb \end{array} \quad \begin{array}{c} \times \\ Qb, Qa, \varphi, Pa \vdash Qb \end{array} \\
 \hline
 Qa, \varphi, Pb \rightarrow Qb, Pa \vdash Qb \\
 \hline
 Qa, \varphi, Pa \vdash Qb \\
 \hline
 Qa, \varphi, Pa \vdash \forall xQx \\
 \hline
 \varphi, Pa \rightarrow Qa, Pa \vdash \forall xQx \\
 \hline
 \underbrace{\forall x(Px \rightarrow Qx), Pa \vdash \forall xQx}_{\varphi}
 \end{array}$$

- Herbranduniverset til grenen G , og domenet til \mathcal{M} , er $\{a, b\}$.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \times \\
 \varphi, Pa \vdash \forall x Qx, Pa
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 G \\
 Qa, \varphi, Pa \vdash Qb, Pb
 \end{array} \\
 \times \\
 Qb, Qa, \varphi, Pa \vdash Qb
 \end{array} \\
 \hline
 Qa, \varphi, Pb \rightarrow Qb, Pa \vdash Qb \\
 \hline
 Qa, \varphi, Pa \vdash Qb \\
 \hline
 Qa, \varphi, Pa \vdash \forall x Qx
 \end{array} \\
 \hline
 \varphi, Pa \rightarrow Qa, Pa \vdash \forall x Qx \\
 \hline
 \underbrace{\forall x (Px \rightarrow Qx), Pa \vdash \forall x Qx}_{\varphi}
 \end{array}
 \end{array}$$

- Herbranduniverset til grenen G , og domenet til \mathcal{M} , er $\{a, b\}$.
- Siden $Pa \in G^\top$ vil $a \in P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \models Pa$.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \times \\
 \varphi, Pa \vdash \forall x Qx, Pa
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 G \\
 Qa, \varphi, Pa \vdash Qb, Pb
 \end{array} \\
 \hline
 Qa, \varphi, Pb \rightarrow Qb, Pa \vdash Qb
 \end{array} \\
 \times \\
 Qb, Qa, \varphi, Pa \vdash Qb
 \end{array} \\
 \hline
 Qa, \varphi, Pa \vdash Qb \\
 \hline
 Qa, \varphi, Pa \vdash \forall x Qx
 \end{array} \\
 \hline
 \varphi, Pa \rightarrow Qa, Pa \vdash \forall x Qx \\
 \hline
 \underbrace{\forall x (Px \rightarrow Qx), Pa \vdash \forall x Qx}_{\varphi}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

- Herbranduniverset til grenen G , og domenet til \mathcal{M} , er $\{a, b\}$.
- Siden $Pa \in G^\top$ vil $a \in P^{\mathcal{M}}$ og $\mathcal{M} \models Pa$.
- Siden $Qa \in G^\top$ vil $a \in Q^{\mathcal{M}}$ og $\mathcal{M} \models Qa$ og $\mathcal{M} \models Pa \rightarrow Qa$.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \times \\
 \varphi, Pa \vdash \forall xQx, Pa
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 G \\
 Qa, \varphi, Pa \vdash Qb, Pb
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \times \\
 Qb, Qa, \varphi, Pa \vdash Qb
 \end{array} \\
 \hline
 Qa, \varphi, Pb \rightarrow Qb, Pa \vdash Qb \\
 \hline
 Qa, \varphi, Pa \vdash Qb \\
 \hline
 Qa, \varphi, Pa \vdash \forall xQx \\
 \hline
 \varphi, Pa \rightarrow Qa, Pa \vdash \forall xQx \\
 \hline
 \underbrace{\forall x(Px \rightarrow Qx), Pa \vdash \forall xQx}_{\varphi}
 \end{array}$$

- Herbranduniverset til grenen G , og domenet til \mathcal{M} , er $\{a, b\}$.
- Siden $Pa \in G^\top$ vil $a \in P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \models Pa$.
- Siden $Qa \in G^\top$ vil $a \in Q^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \models Qa$ og $\mathcal{M} \models Pa \rightarrow Qa$.
- Siden $Qb \in G^\perp$ vil $b \notin Q^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Qb$ og $\mathcal{M} \not\models \forall xQx$.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \times \\
 \varphi, Pa \vdash \forall x Qx, Pa
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 G \\
 Qa, \varphi, Pa \vdash Qb, Pb
 \end{array} \\
 \times \\
 Qb, Qa, \varphi, Pa \vdash Qb
 \end{array} \\
 \hline
 Qa, \varphi, Pb \rightarrow Qb, Pa \vdash Qb \\
 \hline
 Qa, \varphi, Pa \vdash Qb \\
 \hline
 Qa, \varphi, Pa \vdash \forall x Qx
 \end{array} \\
 \hline
 \varphi, Pa \rightarrow Qa, Pa \vdash \forall x Qx \\
 \hline
 \underbrace{\forall x (Px \rightarrow Qx), Pa \vdash \forall x Qx}_{\varphi}
 \end{array}$$

- Herbranduniverset til grenen G , og domenet til \mathcal{M} , er $\{a, b\}$.
- Siden $Pa \in G^\top$ vil $a \in P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \models Pa$.
- Siden $Qa \in G^\top$ vil $a \in Q^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \models Qa$ og $\mathcal{M} \models Pa \rightarrow Qa$.
- Siden $Qb \in G^\perp$ vil $b \notin Q^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Qb$ og $\mathcal{M} \not\models \forall x Qx$.
- Siden $Pb \in G^\perp$ vil $b \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Pb$ og $\mathcal{M} \models Pb \rightarrow Qb$.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \times \\
 \varphi, Pa \vdash \forall x Qx, Pa
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 G \\
 Qa, \varphi, Pa \vdash Qb, Pb
 \end{array} \\
 \times \\
 Qb, Qa, \varphi, Pa \vdash Qb
 \end{array} \\
 \hline
 Qa, \varphi, Pb \rightarrow Qb, Pa \vdash Qb \\
 \hline
 Qa, \varphi, Pa \vdash Qb \\
 \hline
 Qa, \varphi, Pa \vdash \forall x Qx
 \end{array} \\
 \hline
 \varphi, Pa \rightarrow Qa, Pa \vdash \forall x Qx \\
 \hline
 \underbrace{\forall x (Px \rightarrow Qx), Pa \vdash \forall x Qx}_{\varphi}
 \end{array}
 \end{array}$$

- Herbranduniverset til grenen G , og domenet til \mathcal{M} , er $\{a, b\}$.
- Siden $Pa \in G^\top$ vil $a \in P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \models Pa$.
- Siden $Qa \in G^\top$ vil $a \in Q^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \models Qa$ og $\mathcal{M} \models Pa \rightarrow Qa$.
- Siden $Qb \in G^\perp$ vil $b \notin Q^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Qb$ og $\mathcal{M} \not\models \forall x Qx$.
- Siden $Pb \in G^\perp$ vil $b \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Pb$ og $\mathcal{M} \models Pb \rightarrow Qb$.
- Dermed har vi også $\mathcal{M} \models \forall x (Px \rightarrow Qx)$.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \times \\
 \varphi, Pa \vdash \forall xQx, Pa
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 G \qquad \qquad \qquad \times \\
 Qa, \varphi, Pa \vdash Qb, Pb \qquad Qb, Qa, \varphi, Pa \vdash Qb \\
 \hline
 Qa, \varphi, Pb \rightarrow Qb, Pa \vdash Qb \\
 \hline
 Qa, \varphi, Pa \vdash Qb \\
 \hline
 Qa, \varphi, Pa \vdash \forall xQx
 \end{array} \\
 \hline
 \varphi, Pa \rightarrow Qa, Pa \vdash \forall xQx \\
 \hline
 \underbrace{\forall x(Px \rightarrow Qx), Pa \vdash \forall xQx}_{\varphi}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

- Herbranduniverset til grenen G , og domenet til \mathcal{M} , er $\{a, b\}$.
- Siden $Pa \in G^\top$ vil $a \in P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \models Pa$.
- Siden $Qa \in G^\top$ vil $a \in Q^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \models Qa$ og $\mathcal{M} \models Pa \rightarrow Qa$.
- Siden $Qb \in G^\perp$ vil $b \notin Q^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Qb$ og $\mathcal{M} \not\models \forall xQx$.
- Siden $Pb \in G^\perp$ vil $b \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Pb$ og $\mathcal{M} \models Pb \rightarrow Qb$.
- Dermed har vi også $\mathcal{M} \models \forall x(Px \rightarrow Qx)$.
- \mathcal{M} oppfyller alle formlene i G^\top og falsifiserer alle formlene i G^\perp .

$$\underbrace{\forall x(Pxa \rightarrow Pxb)}_{\varphi}, Paa \vee Pba \vdash Pab$$

$$\underbrace{\forall x(Pxa \rightarrow Pxb)}_{\varphi}, Paa \vee Pba \vdash Pab$$

- Herbranduniverset til grenen G - og domenet til \mathcal{M} - er $\{a, b\}$.

$$\underbrace{\forall x(Pxa \rightarrow Pxb), Paa \vee Pba}_{\varphi} \vdash Pab$$

- Herbranduniverset til grenen G - og domenet til \mathcal{M} - er $\{a, b\}$.

$$\underbrace{\forall x(Pxa \rightarrow Pxb), Paa \vee Pba}_{\varphi} \vdash Pab$$

- Herbranduniverset til grenen G - og domenet til \mathcal{M} - er $\{a, b\}$.
- Siden $Pab \in G^\perp$ vil $\langle a, b \rangle \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Pab$.

$$\underbrace{\forall x(Pxa \rightarrow Pxb)}_{\varphi}, Paa \vee Pba \vdash Pab$$

- Herbranduniverset til grenen G - og domenet til \mathcal{M} - er $\{a, b\}$.
- Siden $Pab \in G^\perp$ vil $\langle a, b \rangle \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Pab$.

$$\frac{\varphi, Paa \vdash Pab \qquad \varphi, Pba \vdash Pab}{\underbrace{\forall x(Pxa \rightarrow Pxb), Paa \vee Pba \vdash Pab}_{\varphi}}$$

- Herbranduniverset til grenen G - og domenet til \mathcal{M} - er $\{a, b\}$.
- Siden $Pab \in G^\perp$ vil $\langle a, b \rangle \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Pab$.

$$\frac{\varphi, Paa \vdash Pab \qquad \varphi, Pba \vdash Pab}{\underbrace{\forall x(Pxa \rightarrow Pxb), Paa \vee Pba \vdash Pab}_{\varphi}}$$

- Herbranduniverset til grenen G - og domenet til \mathcal{M} - er $\{a, b\}$.
- Siden $Pab \in G^\perp$ vil $\langle a, b \rangle \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Pab$.

$$\frac{\frac{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Paa \vdash Pab}{\varphi, Paa \vdash Pab} \quad \varphi, Pba \vdash Pab}{\underbrace{\forall x(Pxa \rightarrow Pxb), Paa \vee Pba \vdash Pab}_{\varphi}}$$

- Herbranduniverset til grenen G - og domenet til \mathcal{M} - er $\{a, b\}$.
- Siden $Pab \in G^\perp$ vil $\langle a, b \rangle \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Pab$.

$$\frac{\frac{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Paa \vdash Pab}{\varphi, Paa \vdash Pab} \quad \varphi, Pba \vdash Pab}{\underbrace{\forall x(Pxa \rightarrow Pxb), Paa \vee Pba \vdash Pab}_{\varphi}}$$

- Herbranduniverset til grenen G - og domenet til \mathcal{M} - er $\{a, b\}$.
- Siden $Pab \in G^\perp$ vil $\langle a, b \rangle \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Pab$.

(Greit. Begge grener lukkes.)

$$\frac{\frac{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Paa \vdash Pab}{\varphi, Paa \vdash Pab} \quad \varphi, Pba \vdash Pab}{\underbrace{\forall x(Pxa \rightarrow Pxb), Paa \vee Pba \vdash Pab}_{\varphi}}$$

- Herbranduniverset til grenen G - og domenet til \mathcal{M} - er $\{a, b\}$.
- Siden $Pab \in G^\perp$ vil $\langle a, b \rangle \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Pab$.

(Greit. Begge grener lukkes.)

$$\frac{\frac{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Paa \vdash Pab}{\varphi, Paa \vdash Pab} \quad \varphi, Pba \vdash Pab}{\underbrace{\forall x(Pxa \rightarrow Pxb), Paa \vee Pba \vdash Pab}_{\varphi}}$$

- Herbranduniverset til grenen G - og domenet til \mathcal{M} - er $\{a, b\}$.
- Siden $Pab \in G^\perp$ vil $\langle a, b \rangle \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Pab$.

(Greit. Begge grener lukkes.)

$$\frac{\frac{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Paa \vdash Pab}{\varphi, Paa \vdash Pab} \quad \varphi, Pba \vdash Pab}{\underbrace{\forall x(Pxa \rightarrow Pxb), Paa \vee Pba \vdash Pab}_{\varphi}}$$

- Herbranduniverset til grenen G - og domenet til \mathcal{M} - er $\{a, b\}$.
- Siden $Pab \in G^\perp$ vil $\langle a, b \rangle \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Pab$.
- Siden $Pba \in G^\top$ vil $\langle b, a \rangle \in P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \models Pba$ og $\mathcal{M} \models Paa \vee Pba$.

(Greit. Begge grener lukkes.)

$$\frac{\frac{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Paa \vdash Pab}{\varphi, Paa \vdash Pab} \quad \varphi, Pba \vdash Pab}{\underbrace{\forall x(Pxa \rightarrow Pxb), Paa \vee Pba \vdash Pab}_{\varphi}}$$

- Herbranduniverset til grenen G - og domenet til \mathcal{M} - er $\{a, b\}$.
- Siden $Pab \in G^\perp$ vil $\langle a, b \rangle \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Pab$.
- Siden $Pba \in G^\top$ vil $\langle b, a \rangle \in P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \models Pba$ og $\mathcal{M} \models Paa \vee Pba$.

(Greit. Begge grener lukkes.)

$$\frac{\frac{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Paa \vdash Pab}{\varphi, Paa \vdash Pab} \quad \frac{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Pba \vdash Pab}{\varphi, Pba \vdash Pab}}{\underbrace{\forall x(Pxa \rightarrow Pxb), Paa \vee Pba \vdash Pab}_{\varphi}}$$

- Herbranduniverset til grenen G - og domenet til \mathcal{M} - er $\{a, b\}$.
- Siden $Pab \in G^\perp$ vil $\langle a, b \rangle \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Pab$.
- Siden $Pba \in G^\top$ vil $\langle b, a \rangle \in P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \models Pba$ og $\mathcal{M} \models Paa \vee Pba$.

(Greit. Begge grener lukkes.)

$$\frac{\frac{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Paa \vdash Pab}{\varphi, Paa \vdash Pab} \quad \frac{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Pba \vdash Pab}{\varphi, Pba \vdash Pab}}{\underbrace{\forall x(Pxa \rightarrow Pxb), Paa \vee Pba \vdash Pab}_{\varphi}}$$

- Herbranduniverset til grenen G - og domenet til \mathcal{M} - er $\{a, b\}$.
- Siden $Pab \in G^\perp$ vil $\langle a, b \rangle \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Pab$.
- Siden $Pba \in G^\top$ vil $\langle b, a \rangle \in P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \models Pba$ og $\mathcal{M} \models Paa \vee Pba$.

(Greit. Begge grener lukkes.)

$$\frac{\frac{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Paa \vdash Pab}{\varphi, Paa \vdash Pab} \quad \frac{\frac{\varphi, Pba \vdash Pab, Paa}{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Pba \vdash Pab} \quad Pab, \varphi, Pba \vdash Pab}{\varphi, Pba \vdash Pab}}{\underbrace{\forall x(Pxa \rightarrow Pxb), Paa \vee Pba \vdash Pab}_{\varphi}}$$

- Herbranduniverset til grenen G - og domenet til \mathcal{M} - er $\{a, b\}$.
- Siden $Pab \in G^\perp$ vil $\langle a, b \rangle \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Pab$.
- Siden $Pba \in G^\top$ vil $\langle b, a \rangle \in P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \models Pba$ og $\mathcal{M} \models Paa \vee Pba$.

(Greit. Begge grener lukkes.)

$$\frac{\frac{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Paa \vdash Pab}{\varphi, Paa \vdash Pab} \quad \frac{\frac{\varphi, Pba \vdash Pab, Paa}{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Pba \vdash Pab} \quad Pab, \varphi, Pba \vdash Pab}{\varphi, Pba \vdash Pab}}{\underbrace{\forall x(Pxa \rightarrow Pxb), Paa \vee Pba \vdash Pab}_{\varphi}}$$

- Herbranduniverset til grenen G - og domenet til \mathcal{M} - er $\{a, b\}$.
- Siden $Pab \in G^\perp$ vil $\langle a, b \rangle \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Pab$.
- Siden $Pba \in G^\top$ vil $\langle b, a \rangle \in P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \models Pba$ og $\mathcal{M} \models Paa \vee Pba$.

(Greit. Begge grener lukkes.)

$$\frac{\frac{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Paa \vdash Pab}{\varphi, Paa \vdash Pab} \quad \frac{\frac{\varphi, Pba \vdash Pab, Paa}{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Pba \vdash Pab} \quad \frac{Pab, \varphi, Pba \vdash Pab}{\varphi, Pba \vdash Pab}}{\underbrace{\forall x(Pxa \rightarrow Pxb), Paa \vee Pba \vdash Pab}_{\varphi}}$$

- Herbranduniverset til grenen G - og domenet til \mathcal{M} - er $\{a, b\}$.
- Siden $Pab \in G^\perp$ vil $\langle a, b \rangle \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Pab$.
- Siden $Pba \in G^\top$ vil $\langle b, a \rangle \in P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \models Pba$ og $\mathcal{M} \models Paa \vee Pba$.

(Greit. Begge grener lukkes.)

$$\frac{\frac{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Paa \vdash Pab}{\varphi, Paa \vdash Pab} \quad \frac{\frac{\varphi, Pba \vdash Pab, Paa}{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Pba \vdash Pab} \quad \frac{Pab, \varphi, Pba \vdash Pab}{\varphi, Pba \vdash Pab}}{\underbrace{\forall x(Pxa \rightarrow Pxb), Paa \vee Pba \vdash Pab}_{\varphi}}$$

- Herbranduniverset til grenen G - og domenet til \mathcal{M} - er $\{a, b\}$.
- Siden $Pab \in G^\perp$ vil $\langle a, b \rangle \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Pab$.
- Siden $Pba \in G^\top$ vil $\langle b, a \rangle \in P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \models Pba$ og $\mathcal{M} \models Paa \vee Pba$.

(Greit. Begge grener lukkes.)

$$\frac{\frac{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Paa \vdash Pab}{\varphi, Paa \vdash Pab} \quad \frac{\frac{\varphi, Pba \vdash Pab, Paa}{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Pba \vdash Pab} \quad \frac{Pab, \varphi, Pba \vdash Pab}{\varphi, Pba \vdash Pab}}{\underbrace{\forall x(Pxa \rightarrow Pxb), Paa \vee Pba \vdash Pab}_{\varphi}}$$

- Herbranduniverset til grenen G - og domenet til \mathcal{M} - er $\{a, b\}$.
- Siden $Pab \in G^\perp$ vil $\langle a, b \rangle \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Pab$.
- Siden $Pba \in G^\top$ vil $\langle b, a \rangle \in P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \models Pba$ og $\mathcal{M} \models Paa \vee Pba$.
- Siden $Paa \in G^\perp$ vil $\langle a, a \rangle \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Paa$ og $\mathcal{M} \models Paa \rightarrow Pab$.

(Greit. Begge grener lukkes.)

$$\frac{\frac{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Paa \vdash Pab}{\varphi, Paa \vdash Pab} \quad \frac{\frac{\varphi, Pba \vdash Pab, Paa \quad Pab, \varphi, Pba \vdash Pab}{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Pba \vdash Pab}}{\varphi, Pba \vdash Pab}}{\underbrace{\forall x(Pxa \rightarrow Pxb), Paa \vee Pba \vdash Pab}_{\varphi}}$$

- Herbranduniverset til grenen G - og domenet til \mathcal{M} - er $\{a, b\}$.
- Siden $Pab \in G^\perp$ vil $\langle a, b \rangle \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Pab$.
- Siden $Pba \in G^\top$ vil $\langle b, a \rangle \in P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \models Pba$ og $\mathcal{M} \models Paa \vee Pba$.
- Siden $Paa \in G^\perp$ vil $\langle a, a \rangle \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Paa$ og $\mathcal{M} \models Paa \rightarrow Pab$.

$$\begin{array}{c}
 \text{(Greit. Begge grener lukkes.)} \\
 \frac{\frac{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Paa \vdash Pab}{\varphi, Paa \vdash Pab}}{\frac{\frac{\frac{\varphi, Pba \rightarrow Pbb, Pba \vdash Pab, Paa}{\varphi, Pba \vdash Pab, Paa} \quad \times \quad Pab, \varphi, Pba \vdash Pab}{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Pba \vdash Pab}}{\varphi, Pba \vdash Pab}} \\
 \frac{\underbrace{\forall x(Pxa \rightarrow Pxb)}_{\varphi}, Paa \vee Pba \vdash Pab}{\varphi}
 \end{array}$$

- Herbranduniverset til grenen G - og domenet til \mathcal{M} - er $\{a, b\}$.
- Siden $Pab \in G^\perp$ vil $\langle a, b \rangle \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Pab$.
- Siden $Pba \in G^\top$ vil $\langle b, a \rangle \in P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \models Pba$ og $\mathcal{M} \models Paa \vee Pba$.
- Siden $Paa \in G^\perp$ vil $\langle a, a \rangle \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Paa$ og $\mathcal{M} \models Paa \rightarrow Pab$.

(Greit. Begge grener lukkes.)

$$\frac{\frac{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Paa \vdash Pab}{\varphi, Paa \vdash Pab} \quad \frac{\frac{\frac{\varphi, Pba \rightarrow Pbb, Pba \vdash Pab, Paa}{\varphi, Pba \vdash Pab, Paa}}{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Pba \vdash Pab} \quad \frac{Pab, \varphi, Pba \vdash Pab}{\varphi, Pba \vdash Pab}}{\underbrace{\forall x(Pxa \rightarrow Pxb), Paa \vee Pba \vdash Pab}_{\varphi}}$$

- Herbranduniverset til grenen G - og domenet til \mathcal{M} - er $\{a, b\}$.
- Siden $Pab \in G^\perp$ vil $\langle a, b \rangle \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Pab$.
- Siden $Pba \in G^\top$ vil $\langle b, a \rangle \in P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \models Pba$ og $\mathcal{M} \models Paa \vee Pba$.
- Siden $Paa \in G^\perp$ vil $\langle a, a \rangle \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Paa$ og $\mathcal{M} \models Paa \rightarrow Pab$.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\varphi, Pba \vdash Pab, Paa, Pba \quad Pbb, \varphi, Pba \vdash Pab, Paa}{\varphi, Pba \rightarrow Pbb, Pba \vdash Pab, Paa} \\
 \frac{\varphi, Pba \vdash Pab, Paa \quad Pab, \varphi, Pba \vdash Pab}{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Pba \vdash Pab} \quad \times \\
 \frac{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Paa \vdash Pab}{\varphi, Paa \vdash Pab} \quad \frac{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Pba \vdash Pab}{\varphi, Pba \vdash Pab} \\
 \frac{\varphi, Paa \vdash Pab \quad \frac{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Pba \vdash Pab}{\varphi, Pba \vdash Pab}}{\underbrace{\forall x(Pxa \rightarrow Pxb), Paa \vee Pba \vdash Pab}_{\varphi}}
 \end{array}$$

(Greit. Begge grener lukkes.)

- Herbranduniverset til grenen G - og domenet til \mathcal{M} - er $\{a, b\}$.
- Siden $Pab \in G^\perp$ vil $\langle a, b \rangle \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Pab$.
- Siden $Pba \in G^\top$ vil $\langle b, a \rangle \in P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \models Pba$ og $\mathcal{M} \models Paa \vee Pba$.
- Siden $Paa \in G^\perp$ vil $\langle a, a \rangle \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Paa$ og $\mathcal{M} \models Paa \rightarrow Pab$.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\varphi, Pba \vdash Pab, Paa, Pba \quad Pbb, \varphi, Pba \vdash Pab, Paa}{\varphi, Pba \rightarrow Pbb, Pba \vdash Pab, Paa} \\
 \frac{\varphi, Pba \vdash Pab, Paa \quad Pab, \varphi, Pba \vdash Pab}{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Pba \vdash Pab} \quad \times \\
 \frac{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Paa \vdash Pab}{\varphi, Paa \vdash Pab} \quad \frac{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Pba \vdash Pab}{\varphi, Pba \vdash Pab} \\
 \hline
 \underbrace{\forall x(Pxa \rightarrow Pxb), Paa \vee Pba \vdash Pab}_{\varphi}
 \end{array}$$

(Greit. Begge grener lukkes.)

- Herbranduniverset til grenen G - og domenet til \mathcal{M} - er $\{a, b\}$.
- Siden $Pab \in G^\perp$ vil $\langle a, b \rangle \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Pab$.
- Siden $Pba \in G^\top$ vil $\langle b, a \rangle \in P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \models Pba$ og $\mathcal{M} \models Paa \vee Pba$.
- Siden $Paa \in G^\perp$ vil $\langle a, a \rangle \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Paa$ og $\mathcal{M} \models Paa \rightarrow Pab$.

$$\begin{array}{c}
 \times \\
 \frac{\varphi, Pba \vdash Pab, Paa, Pba \quad Pbb, \varphi, Pba \vdash Pab, Paa}{\varphi, Pba \rightarrow Pbb, Pba \vdash Pab, Paa} \\
 \frac{\varphi, Pba \vdash Pab, Paa}{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Pba \vdash Pab} \quad \times \\
 \frac{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Paa \vdash Pab}{\varphi, Paa \vdash Pab} \quad \frac{Pab, \varphi, Pba \vdash Pab}{\varphi, Pba \vdash Pab} \\
 \hline
 \underbrace{\forall x(Pxa \rightarrow Pxb), Paa \vee Pba \vdash Pab}_{\varphi}
 \end{array}$$

(Greit. Begge grener lukkes.)

- Herbranduniverset til grenen G - og domenet til \mathcal{M} - er $\{a, b\}$.
- Siden $Pab \in G^\perp$ vil $\langle a, b \rangle \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Pab$.
- Siden $Pba \in G^\top$ vil $\langle b, a \rangle \in P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \models Pba$ og $\mathcal{M} \models Paa \vee Pba$.
- Siden $Paa \in G^\perp$ vil $\langle a, a \rangle \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Paa$ og $\mathcal{M} \models Paa \rightarrow Pab$.

$$\begin{array}{c}
 \times \\
 \frac{\varphi, Pba \vdash Pab, Paa, Pba \quad Pbb, \varphi, Pba \vdash Pab, Paa}{\varphi, Pba \rightarrow Pbb, Pba \vdash Pab, Paa} \\
 \frac{\varphi, Pba \vdash Pab, Paa}{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Pba \vdash Pab} \quad \times \\
 \frac{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Paa \vdash Pab}{\varphi, Paa \vdash Pab} \quad \frac{Pab, \varphi, Pba \vdash Pab}{\varphi, Pba \vdash Pab} \\
 \hline
 \underbrace{\forall x(Pxa \rightarrow Pxb), Paa \vee Pba \vdash Pab}_{\varphi}
 \end{array}$$

(Greit. Begge grener lukkes.)

- Herbranduniverset til grenen G - og domenet til \mathcal{M} - er $\{a, b\}$.
- Siden $Pab \in G^\perp$ vil $\langle a, b \rangle \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Pab$.
- Siden $Pba \in G^\top$ vil $\langle b, a \rangle \in P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \models Pba$ og $\mathcal{M} \models Paa \vee Pba$.
- Siden $Paa \in G^\perp$ vil $\langle a, a \rangle \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Paa$ og $\mathcal{M} \models Paa \rightarrow Pab$.

$$\begin{array}{c}
 \times \\
 \frac{\varphi, Pba \vdash Pab, Paa, Pba \quad Pbb, \varphi, Pba \vdash Pab, Paa}{\varphi, Pba \rightarrow Pbb, Pba \vdash Pab, Paa} \\
 \frac{\varphi, Pba \vdash Pab, Paa}{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Pba \vdash Pab} \quad \times \\
 \frac{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Paa \vdash Pab}{\varphi, Paa \vdash Pab} \quad \frac{Pab, \varphi, Pba \vdash Pab}{\varphi, Pba \vdash Pab} \\
 \hline
 \underbrace{\forall x(Pxa \rightarrow Pxb), Paa \vee Pba \vdash Pab}_{\varphi}
 \end{array}$$

(Greit. Begge grener lukkes.)

- Herbranduniverset til grenen G - og domenet til \mathcal{M} - er $\{a, b\}$.
- Siden $Pab \in G^\perp$ vil $\langle a, b \rangle \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Pab$.
- Siden $Pba \in G^\top$ vil $\langle b, a \rangle \in P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \models Pba$ og $\mathcal{M} \models Paa \vee Pba$.
- Siden $Paa \in G^\perp$ vil $\langle a, a \rangle \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Paa$ og $\mathcal{M} \models Paa \rightarrow Pab$.
- Siden $Pbb \in G^\top$ vil $\langle b, b \rangle \in P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \models Pbb$ og $\mathcal{M} \models Pba \rightarrow Pbb$.

$$\begin{array}{c}
 \times \\
 \frac{\varphi, Pba \vdash Pab, Paa, Pba \quad Pbb, \varphi, Pba \vdash Pab, Paa}{\varphi, Pba \rightarrow Pbb, Pba \vdash Pab, Paa} \\
 \frac{\varphi, Pba \vdash Pab, Paa}{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Pba \vdash Pab} \quad \times \\
 \frac{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Paa \vdash Pab}{\varphi, Paa \vdash Pab} \quad \frac{Pab, \varphi, Pba \vdash Pab}{\varphi, Pba \vdash Pab} \\
 \hline
 \underbrace{\forall x(Pxa \rightarrow Pxb), Paa \vee Pba \vdash Pab}_{\varphi}
 \end{array}$$

(Greit. Begge grener lukkes.)

- Herbranduniverset til grenen G - og domenet til \mathcal{M} - er $\{a, b\}$.
- Siden $Pab \in G^\perp$ vil $\langle a, b \rangle \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Pab$.
- Siden $Pba \in G^\top$ vil $\langle b, a \rangle \in P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \models Pba$ og $\mathcal{M} \models Paa \vee Pba$.
- Siden $Paa \in G^\perp$ vil $\langle a, a \rangle \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Paa$ og $\mathcal{M} \models Paa \rightarrow Pab$.
- Siden $Pbb \in G^\top$ vil $\langle b, b \rangle \in P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \models Pbb$ og $\mathcal{M} \models Pba \rightarrow Pbb$.
- Dermed har vi også $\mathcal{M} \models \forall x(Pxa \rightarrow Pxb)$.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \frac{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Paa \vdash Pab}{\varphi, Paa \vdash Pab} \\
 \frac{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Paa \vdash Pab}{\varphi, Paa \vdash Pab}
 \end{array}
 \quad
 \frac{
 \begin{array}{c}
 \times \\
 \frac{\varphi, Pba \vdash Pab, Paa, Pba \quad Pbb, \varphi, Pba \vdash Pab, Paa}{\varphi, Pba \rightarrow Pbb, Pba \vdash Pab, Paa} \\
 \frac{\varphi, Pba \rightarrow Pbb, Pba \vdash Pab, Paa}{\varphi, Pba \vdash Pab, Paa}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 G \\
 \frac{\varphi, Paa \rightarrow Pab, Pba \vdash Pab}{\varphi, Pba \vdash Pab} \\
 \times \\
 \frac{Pab, \varphi, Pba \vdash Pab}{\varphi, Pba \vdash Pab}
 \end{array}
 }{
 \underbrace{\forall x(Pxa \rightarrow Pxb), Paa \vee Pba \vdash Pab}_{\varphi}
 }
 \end{array}$$

(Greit. Begge grener lukkes.)

- Herbranduniverset til grenen G - og domenet til \mathcal{M} - er $\{a, b\}$.
- Siden $Pab \in G^\perp$ vil $\langle a, b \rangle \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Pab$.
- Siden $Pba \in G^\top$ vil $\langle b, a \rangle \in P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \models Pba$ og $\mathcal{M} \models Paa \vee Pba$.
- Siden $Paa \in G^\perp$ vil $\langle a, a \rangle \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Paa$ og $\mathcal{M} \models Paa \rightarrow Pab$.
- Siden $Pbb \in G^\top$ vil $\langle b, b \rangle \in P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \models Pbb$ og $\mathcal{M} \models Pba \rightarrow Pbb$.
- Dermed har vi også $\mathcal{M} \models \forall x(Pxa \rightarrow Pxb)$.

