Forelesning 8: Førsteordens logikk – kompletthet

Martin Giese - 10. mars 2008

1 Repetisjon: Kalkyle og Sunnhet av LK

1.1 Sekventkalkyleregler

Definisjon 1.1 (γ-regler)**.** γ-reglene *i sekventkalkylen* LK *er:*

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\forall \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi}\ \mathsf{R}\exists$$

t er en lukket term

Merk: kopieringen av hovedformelen i γ-reglene medfører at bevissøk i førsteordens logikk ikke nødvendigvis behøver å terminere!

Definisjon 1.2 (δ-regler)**.** δ-reglene *i sekventkalkylen* LK *er:*

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\exists \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\varphi}\ \mathsf{R}\forall$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen.

1.2 Bevisstruktur

Strukturen i beviset for sunnhet

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
2. En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.
3. Alle aksiomer er gyldige.

Til slutt vises sunnhetsteoremet ved hjelp av lemmaene.

Bevis for at L$\forall$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x]\ \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi\ \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\forall \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.

- Det holder å vise at $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.
- Siden $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ har vi at $\mathcal{M}, \{x \mapsto d\} \models \varphi$ for alle $d \in |\mathcal{M}|$. (Her bruker vi semantikken av $\forall$.)
- Spesielt har vi at $\mathcal{M}, \{x \mapsto t^{\mathcal{M}}\} \models \varphi$.
- Med Substitusjonslemmaet får vi: $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$.

Bevis for at L$\exists$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \ \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \ \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\exists$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan *ikke* uten videre anta at $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ har vi at $\mathcal{M}, \{x \mapsto d\} \models \varphi$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen $\mathcal{M}$ lager vi en ny modell $\mathcal{M}'$ på følgende måte:
  - $\mathcal{M}'$ skal være helt lik $\mathcal{M}$ bortsett fra når det gjelder tolkningen av a.
  - Parameteren a skal tolkes som elementet d, dvs. $a^{\mathcal{M}'} = d$.
- Vi konkluderer med at $\mathcal{M}'$ falsifiserer premisset:
  - Siden a ikke forekommer i konklusjonen, så må $\mathcal{M}'$ og $\mathcal{M}$ tolke formlene i Γ og Δ likt. $\mathcal{M}'$ gjør derfor alle formlene i Γ sanne og alle formlene i Δ usanne.
  - $\mathcal{M}', \{x \mapsto d\} \models \varphi$, og med substitusjonslemmaet $\mathcal{M}' \models \varphi[a/x]$.

2 Kompletthet av LK

2.1 Kompletthet – Overblikk

- Vi skal nå bevise at LK er komplett.
- Ikke bare er LK sunn, den kan også vise *alle* gyldige sekventer.
- Det er ingen "hull" i mengden av LK-bevisbare formler.
- Det er to måter å forstå "fra φ følger ψ" på:
  1. Semantisk: $\varphi \vDash \psi$, hvis φ er sann, så er ψ sann.
  2. Syntaktisk: $\varphi \vdash \psi$, det fins et bevis for sekventen $\varphi \vdash \psi$ / fra antakelsen φ, så kan ψ bevises.
- Med sunnhet og kompletthet, så blir disse ekvivalente.

Kurt Gödel (1906-1978)

Kurt Gödel (1906-1978)

- En av de mest betydningsfulle logikere noensinne.
- Har hatt enorm innflytelse på logikk, matematikk og filosofi.
- Det er han som først viste kompletthet av førsteordens logikk (1929).
- Er mest kjent for ufullstendighetsteoremene (1931) og at kontinuumshypotesen er konsistent med mengdelæren (1937).

Teorem 2.1 (Kompletthet)**.** *Hvis* $\Gamma \vdash \Delta$ *er gyldig, så er den bevisbar i* LK*.*

For å vise *kompletthet*, viser vi den ekvivalente påstanden:

Lemma 2.1 (Modelleksistens)**.** *Hvis* $\Gamma \vdash \Delta$ ikke *er bevisbar i LK, så er den falsifiserbar.*

Dvs. det finnes en modell som gjør alle formler i Γ sanne og alle formler i Δ usanne.

Merk at vi uansett går fra en universell påstand ("for alle modeller") til en eksistensiell påstand ("det fins et bevis").

2.2 Strategier

- Hvis en formel eller sekvent er gyldig, kan vi ha en *garanti* for at vi finner et bevis ved å begynne med en rotsekvent og anvende LK-reglene gjentatte ganger?
- For å gjøre dette litt mer presist, innfører vi begrepet *strategi*.

Definisjon 2.1 (Strategi)**.** *En* strategi *for* LK *er en angivelse av hvordan* LK*-reglene systematisk skal anvendes på formler i* LK*-utledninger.*

- Med vilje litt vagt. Mye kan være en strategi.
- Vi er interessert i strategier som garanterer at vi får et bevis til slutt hvis det er slik at bevis fins. La oss kalle slike strategier for "gode".

Definisjon 2.2 (Formeltype)**.** *La* φ *være en formel i en utledning. Vi sier at* φ *er av* type θ *hvis* φ *kan være hovedformelen i en* θ*-slutning.*

Eksempel.

$$Pa \wedge Pb, Qa \vee Qb \vdash \exists x Px, \forall x Px$$

- *$Pa \land Pb$ er en α-formel*
- *$Qa \lor Qb$ er en β-formel*
- *$\exists x Px$ er en γ-formel*
- *$\forall x Px$ er en δ-formel*

En enkel strategi

1. Anvend α-regler så mange ganger som mulig, dvs. helt til ingen løvsekvent lenger inneholder en formel av type α. Gå til 2.
2. Anvend β-regler så mange ganger som mulig.

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{P,Q \vdash P} \qquad \overset{\times}{P,Q \vdash Q}}{P,Q \vdash P \land Q}\;2}{P \land Q \vdash P \land Q}\;1$$

- Denne strategien er ikke "god". Det kan hende at 1 må anvendes etter at 2 er anvendt.

En "god" strategi for utsagnslogikk.

1. Anvend α-regler så mange ganger som mulig. Gå til 2.
2. Anvend β-regler så mange ganger som mulig. Gå til 3.
3. Hvis det er mulig å anvende en α-regel, gå til 1.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{P,Q \vdash P,R,R} \qquad \overset{\times}{P,Q \vdash Q,R,R}}{P,Q \vdash P \land Q,R,R}\;2}{\neg(P \land Q),P,Q \vdash R,R}\;1 \qquad \overset{\times}{R,P,Q \vdash R,R}}{\neg(P \land Q) \lor R,P,Q \vdash R,R}\;2}{\neg(P \land Q) \lor R,P \vdash R,Q \to R}\;1}{\neg(P \land Q) \lor R \vdash P \to R,Q \to R}\;1}{\neg(P \land Q) \lor R \vdash (P \to R) \lor (Q \to R)}\;1$$

- Hva skal til for at en strategi skal være "god"?

1. Alle formler må analyseres før eller senere.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{Pffa, Pfa, Pa, \forall x Px, Qfa \land Qfa \vdash Qfa}{Pfa, Pa, \forall x Px, Qfa \land Qfa \vdash Qfa}}{Pa, \forall x Px, Qfa \land Qfa \vdash Qfa}}{\forall x Px, Qfa \land Qfa \vdash Qfa}$$

2. Vi må forsøke å sette inn "alle termer" for γ-formler.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{Pgga, Pga, Pa, \forall x Px \vdash Qga, Pfffb}{Pga, Pa, \forall x Px \vdash Qga, Pfffb}}{Pa, \forall x Px \vdash Qga, Pfffb}}{\forall x Px \vdash Qga, Pfffb}$$

- Vi må kunne snakke om "alle termer" på en presis måte...

2.3 Herbranduniverset

Definisjon 2.3 (Herbranduniverset)**.** *La T være en mengde termer. Da er $\mathcal{H}(T)$, Herbranduniverset til T, den minste mengden slik at:*

- *$\mathcal{H}(T)$ inneholder alle konstanter fra T. Hvis det ikke er noen konstanter i T, så er en parameter o fra* par *(kalt en dummykonstant) med i $\mathcal{H}(T)$.*
- *Hvis f er et funksjonssymbol i T med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer i $\mathcal{H}(T)$, så er $f(t_1, \ldots, t_n)$ i $\mathcal{H}(T)$.*

Herbranduniverset til en mengde formler er Herbranduniverset til mengden av termer som forekommer i formlene. Herbranduniverset til en gren er Herbranduniverset til mengden av formler som forekommer i grenen.

- Intuitivt, så er Herbranduniverset til T mengden av alle *lukkede* termer som kan genereres fra termer i T.

Eksempel. *La $T = \{f(x)\}$.Da er Herbranduniverset til Tmengden*

$$\{o, fo, ffo, fffo, \ldots\}$$

Eksempel. *La $T = \{a, f(x)\}$.Da er Herbranduniverset til Tmengden*

$$\{a, fa, ffa, fffa, \ldots\}$$

Eksempel. *La $F = \{\forall x H(f(g(x)))\}$.Da er Herbranduniverset til F mengden*

$$\{o, fo, go, fgo, gfo, ffo, ggo, , \ldots\}$$

2.4 Rettferdige strategier

- Enhver rettferdig strategi må gjøre at
  - alle formler blir analysert før eller senere, og
  - alle γ-formler blir instansiert med alle termer før eller senere.
- Hvis vi følger en rettferdig strategi, så skal én av to ting skje:
  1. Enten så klarer vi å lukke alle grener og får et bevis,
  2. eller så fins en åpen gren som vi kan lage en motmodell fra.
- For at dette skal gi mening må vi godta at utledninger kan være uendelig store, dvs. ha uendelig lange grener.

- Vi kan tenke at vi går til *grensen* i konstruksjonen av en utledning, enten ved at ingen regler lenger kan anvendes eller ved å fortsette med regelanvendelser i det uendelige. Vi kaller slike for *grenseutledninger*.
- Vi inkluderer altså uendelige trær når vi snakker om grenseutledninger.
- Merk: hvis alle grener i en utledning kan lukkes, så er utledningen endelig.

- Vi skal nå abstrahere over alle "gode" strategier.

Definisjon 2.4 (Rettferdig strategi)**.** *En strategi er* rettferdig *hvis enhver grenseutledning som fås ved å følge strategien har følgende egenskaper:*

1. *Hvis φ er en α-, β- eller δ-formel i en gren som ikke er lukket, så er φ hovedformel i en slutning i grenen.*
2. *Hvis φ er en γ-formel på formen $\mathsf{Q}x\psi$ i en gren som ikke er lukket, så er $\psi[t/x]$ aktiv formel i en slutning i grenen, for alle termer t i Herbranduniverset til grenen.*

2.5 Königs lemma

Lemma 2.2 (Königs lemma)**.** *Hvis T er et uendelig tre, men hvor enhver forgrening er endelig, så fins det en uendelig lang gren.*

Bevis. *Vi definerer en uendelig lang gren induktivt. La u_0 være rotnoden i treet T. Siden T er uendelig og u_0 har endelig mange etterkommere, så må ett av de umiddelbare deltrærne fra u_0 være uendelig. (Ellers ville T ha vært et endelig tre.) La u_1 være rotnoden i et slikt deltre. Hvis grenen $u_0, u_1, \ldots, u_n$ er generert, så finner man neste node u_{n+1} ved samme type resonnering. Denne prosessen gir en uendelig gren.*

Korollar 2.1. *Hvis T er et tre hvor enhver forgrening er endelig, og hvor alle grener er endelig lange, så er T endelig.*

2.6 Bevis for modelleksistensteoremet

- Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar.
- La π være en utledning (muligens uendelig) av $\Gamma \vdash \Delta$ som fremkommer ved å følge en rettferdig strategi. "En maksimal utledning".
- Siden $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar, så må det finnes minst en gren som ikke er lukket. (Her bruker vi Königs lemma.) La G være en slik gren. La

$G^\top$ være mengden av alle formler som forekommer i en antecedent i G,

$G^\perp$ være mengden av alle formler som forekommer i en succedent i G, og

A være mengden av alle atomære formler som forekommer i $G^\top$.

- Vi konstruerer nå en motmodell $\mathcal{M}$ for $\Gamma \vdash \Delta$.
- La domenet til $\mathcal{M}$ være Herbranduniverset til grenen (dvs. mengden av alle lukkede termer som kan genereres fra termer som forekommer i grenen).

- La $a^{\mathcal{M}} = a$ for alle konstantsymboler a.
- Hvis f er et funksjonssymbol med aritet n, la $f^{\mathcal{M}}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$.
  - Da vil $t^{\mathcal{M}} = t$ for alle lukkede termer t.
  - Alle termer tolkes som seg selv.
- Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n, la $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in R^{\mathcal{M}}$ hvis og bare hvis $R(t_1, \ldots, t_n) \in A$.
- En slik modell kalles ofte for en *Herbrandmodell* eller en *termmodell*.

- Vi viser ved induksjon på førsteordens formler (i språket $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$) at modellen $\mathcal{M}$ gjør *alle* formler i $G^{\top}$ sanne og alle formler i $G^{\perp}$ usanne.
- Påstandene som vi viser for førsteordens formler er:

  Hvis $\varphi \in G^{\top}$, så $\mathcal{M} \models \varphi$.
  Hvis $\varphi \in G^{\perp}$, så $\mathcal{M} \not\models \varphi$.

Basissteg 1: φ er en atomær formel $R(t_1, \ldots, t_n)$ i $G^{\top}$.

- Da må $R(t_1, \ldots, t_n) \in A$ og $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in R^{\mathcal{M}}$ ved konstruksjon.
- Da må $\mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$.

Basissteg 2: φ er en atomær formel $R(t_1, \ldots, t_n)$ i $G^{\perp}$.

- Siden G ikke er lukket, må $R(t_1, \ldots, t_n) \notin A$ og $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \notin R^{\mathcal{M}}$.
- Da vil $\mathcal{M} \not\models R(t_1, \ldots, t_n)$.

Induksjonssteg: Fra antakelsen om at påstandene holder for mindre formler, så må vi vise at de holder for $\neg\varphi$, $(\varphi \land \psi)$, $(\varphi \lor \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$.

I beviset for kompletthet av utsagnslogisk LK gjorde vi mesteparten.

F.eks. anta at $\varphi \land \psi \in G^{\top}$.

- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\varphi \land \psi$ vært hovedformel i en slutning i grenen G.
- Da vil $\varphi \in G^{\top}$ *og* $\psi \in G^{\top}$.
- Ved induksjonshypotesen vil $\mathcal{M} \models \varphi$ *og* $\mathcal{M} \models \psi$.
- Ved definisjonen av oppfyllbarhet har vi $\mathcal{M} \models \varphi \land \psi$.

Formler med kvantorer gjenstår.

Anta at $\exists x\varphi \in G^{\top}$.

- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\exists x\varphi$ vært hovedformel i en slutning i grenen.

- Da fins en parameter a slik at $\varphi[a/x] \in G^\top$.
- Ved induksjonshypotesen vil $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.
- Med substitusjonslemmaet: $\mathcal{M}, \{x \mapsto a^\mathcal{M}\} \models \varphi$.
- Ved definisjonen av oppfyllbarhet vil $\mathcal{M} \models \exists x \varphi$.

Anta at $\exists x \varphi \in G^\perp$.

- Vi må vise at $\mathcal{M} \not\models \exists x \varphi$. Anta at det ikke holder.
- Da gjelder $\mathcal{M}, \{x \mapsto t\} \models \varphi$ for en term $t \in |\mathcal{M}|$.
- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\varphi[t/x]$ vært aktiv formel på grenen.
- Vi har dermed følgende:
  - $\varphi[t/x] \in G^\perp$
  - $\mathcal{M} \not\models \varphi[t/x]$ (fra induksjonshypotesen)
  - $\mathcal{M}, \{x \mapsto t^\mathcal{M}\} \not\models \varphi$ (substitusjonslemmaet)
  - $\mathcal{M}, \{x \mapsto t\} \not\models \varphi$ (siden $t^\mathcal{M} = t$)
- Dermed har vi en motsigelse.

Anta at $\forall x \varphi \in G^\perp$.

- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\forall x \varphi$ vært hovedformel i en slutning i grenen.
- Da fins en parameter a slik at $\varphi[a/x] \in G^\perp$.
- Ved induksjonshypotesen vil $\mathcal{M} \not\models \varphi[a/x]$.
- Med substitusjonslemmaet: $\mathcal{M}, \{x \mapsto a^\mathcal{M}\} \not\models \varphi$.
- Ved definisjonen av oppfyllbarhet vil $\mathcal{M} \not\models \forall x \varphi$.

Anta at $\forall x \varphi \in G^\top$.

- Vi må vise at $\mathcal{M} \models \forall x \varphi$. Anta at det ikke holder.
- Da gjelder $\mathcal{M}, \{x \mapsto t\} \not\models \varphi$ for en term $t \in |\mathcal{M}|$.
- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\varphi[t/x]$ vært aktiv formel på grenen.
- Vi har dermed følgende:
  - $\varphi[t/x] \in G^\top$
  - $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$ (fra induksjonshypotesen)
  - $\mathcal{M}, \{x \mapsto t^\mathcal{M}\} \models \varphi$ (substitusjonslemmaet)
  - $\mathcal{M}, \{x \mapsto t\} \models \varphi$ (siden $t^\mathcal{M} = t$)
- Dermed har vi en motsigelse.

Noen kommentarer

- Vi kan se på konstruksjonen av en utledning som en tilnærming/approksimasjon til en motmodell for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Jo flere ganger vi anvender regler (ved å følge en rettferdig strategi), jo nærmere kommer vi en eventuell motmodell.
- For å lage en motmodell på denne måten, kan det være nødvendig å anvende reglene uendelig mange ganger.
- Ofte fins det endelige motmodeller der hvor denne metoden gir en uendelig motmodell. Å finne endelige motmodeller der hvor det fins er ikke lett. Dette er noe det forskes på.
- Idéen i kompletthetsbeviset er viktig. Konstruksjonen av modeller fra noe rent syntaktisk. Et filosofisk spørsmål: Er det egentlig et skille mellom syntaks og semantikk?

2.7 Eksempler på eksistens av motmodell

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\varphi, Pa \vdash \forall xQx, Pa} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{G}{Qa, \varphi, Pa \vdash Qb, Pb} \qquad \overset{\times}{Qb, Qa, \varphi, Pa \vdash Qb}}{Qa, \varphi, Pb \to Qb, Pa \vdash Qb}}{Qa, \varphi, Pa \vdash Qb}}{Qa, \varphi, Pa \vdash \forall xQx}}{\varphi, Pa \to Qa, Pa \vdash \forall xQx}}{\underbrace{\forall x(Px \to Qx)}_{\varphi}, Pa \vdash \forall xQx}$$

- Herbranduniverset til grenen G, og domenet til $\mathcal{M}$, er $\{a, b\}$.
- Siden $Pa \in G^\top$ vil $a \in P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \models Pa$.
- Siden $Qa \in G^\top$ vil $a \in Q^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \models Qa$ og $\mathcal{M} \models Pa \to Qa$.
- Siden $Qb \in G^\perp$ vil $b \notin Q^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Qb$ og $\mathcal{M} \not\models \forall xQx$.
- Siden $Pb \in G^\perp$ vil $b \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Pb$ og $\mathcal{M} \models Pb \to Qb$.
- Dermed har vi også $\mathcal{M} \models \forall x(Px \to Qx)$.
- $\mathcal{M}$ oppfyller alle formlene i $G^\top$ og falsifiserer alle formlene i $G^\perp$.

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\text{(Greit. Begge grener lukkes.)}}{\varphi, Paa \to Pab, Paa \vdash Pab}}{\varphi, Paa \vdash Pab} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\varphi, Pba \vdash Pab, Paa, Pba} \qquad \overset{G}{Pbb, \varphi, Pba \vdash Pab, Paa}}{\varphi, Pba \to Pbb, Pba \vdash Pab, Paa}}{\varphi, Pba \vdash Pab, Paa} \qquad \overset{\times}{Pab, \varphi, Pba \vdash Pab}}{\varphi, Paa \to Pab, Pba \vdash Pab}}{\varphi, Pba \vdash Pab}}{\underbrace{\forall x(Pxa \to Pxb)}_{\varphi}, Paa \lor Pba \vdash Pab}$$

- Herbranduniverset til grenen G - og domenet til $\mathcal{M}$ - er $\{a, b\}$.
- Siden $Pab \in G^{\perp}$ vil $\langle a, b\rangle \notin P^{\mathcal{M}}$ og $\mathcal{M} \not\models Pab$.
- Siden $Pba \in G^{\top}$ vil $\langle b, a\rangle \in P^{\mathcal{M}}$ og $\mathcal{M} \models Pba$ og $\mathcal{M} \models Paa \vee Pba$.
- Siden $Paa \in G^{\perp}$ vil $\langle a, a\rangle \notin P^{\mathcal{M}}$ og $\mathcal{M} \not\models Paa$ og $\mathcal{M} \models Paa \rightarrow Pab$.
- Siden $Pbb \in G^{\top}$ vil $\langle b, b\rangle \in P^{\mathcal{M}}$ og $\mathcal{M} \models Pbb$ og $\mathcal{M} \models Pba \rightarrow Pbb$.
- Dermed har vi også $\mathcal{M} \models \forall x(Pxa \rightarrow Pxb)$.
- $\mathcal{M}$ oppfyller alle formlene i $G^{\top}$ og falsifiserer alle formlene i $G^{\perp}$.