# Forelesning 9: Automatisk bevissøk – introduksjon, substitusjoner og unifisering

Martin Giese - 7. april 2008

## 1 Automatisk bevissøk

### 1.1 Introduksjon

#### Automatisk bevissøk i førsteordens logikk

- Sekventkalkylen LK tilbyr
  - et sett med regler for å bygge opp utledninger, og
  - en egenskap som skiller bevis fra utledninger.
- *Sunnhet* sikrer oss at enhver bevisbar sekvent er gyldig.
- *Kompletthet* sikrer oss at det *finnes* et bevis for enhver gyldig sekvent.
- Kalkylen sier imidlertid ingenting om *hvordan* man finner bevis for gyldige sekventer!
- Kompletthetsbeviset for LK gir hint om hvordan vi kan lage en søkealgoritme.
- La oss forsøke!

#### Noen begreper

- En utledning er *lukket* hvis alle grenene er lukket.
- En utledning er *utvidbar* hvis det er mulig å anvende en regel på en formel i en løvsekvent i utledningen.
- En søkealgoritme er *komplett* hvis den *finner* et bevis for enhver gyldig sekvent.

#### Algoritme: gyldig?($\Gamma \vdash \Delta$)

$\pi := \Gamma \vdash \Delta$;<br>
**while** *($\pi$ ikke er lukket)* **do**<br>
    **if** *($\pi$ ikke er utvidbar)* **then**<br>
        return *"ikke gyldig"*<br>
    **else**<br>
        $\varphi$ := ikke-atomær formel i løvsekvent i $\pi$;<br>
        utvid $\pi$ ved å anvende riktig LK-regel på $\varphi$<br>
    **end**<br>
**end**<br>
return *"gyldig"*;

- Algoritmen er komplett hvis utvelgelsen av $\varphi$ er *rettferdig*.

### Effektivitet

- Effektiviteten til algoritmen avhenger av tre ting:
  1. Hvor effektivt er det å sjekke om utledningen er lukket?
  2. Strategi for valg av utvidelse av utledningen.
  3. Hvor effektiv er selve utvidelsen, dvs. regelanvendelsen?
- I første runde ser vi på punkt 1 og 3.
- Senere introduseres *koblingskalkylen*, som gir oppgav til en strategi for valg av utvidelser av utledningene.
- La oss starte med punkt 3 – effektiviteten til regelanvendelsene.

### Hvor kostbare er regelanvendelsene?

- $\alpha$- og $\beta$-reglene henter ut delformler fra en sammensatt formel:

$$\frac{\Gamma, A\ ,\ \ B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\wedge \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\ \mathsf{R}\wedge$$

- All nødvendig informasjon tilgjengelig i hovedformelen: kan utføres i konstant tid.
- Riktignok får vi en del formelkopiering i $\beta$-regelen, men dette kan optimaliseres med f.eks. pekere i en objektorientert implementasjon.
- $\delta$-regelen setter inn en ny parameter for den bundne variabelen:

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\exists$$

- Parametrene kan nummereres: utføres i lineær tid.

### $\gamma$-reglene

- La oss se på $\gamma$-reglene:

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\forall \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x \varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x \varphi}\ \mathsf{R}\exists$$

- Vi kan sette inn en vilkårlig lukket term $t$ for $x$.
- For å få en komplett algoritme, må vi (før eller senere) instansiere hver $\gamma$-formel med *alle* termene i Herbranduniverset.
- Vi kan nummerere termene i Herbranduniverset og instansiere $\gamma$-formlene i denne rekkefølgen.
- Hvilken rekkefølge er gunstig med tanke på å *finne bevis så tidlig som mulig*?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pa, \ldots, Pfffa \vdash Pfffa, Qga}{\vdots}}{\forall x Px, Pa \vdash Pfffa, Qga}}{\forall x Px \vdash Pfffa, Qga} \qquad \underset{1}{a}, \underset{2}{fa}, \underset{3}{ga}, \underset{4}{ffa}, \underset{5}{fga}, \ldots, \underset{i}{fffa}, \ldots$$

### Utsette valg av $\gamma$-term

- En bedre idé: Utsette valg av term i $\gamma$-reglene til et senere tidspunkt.
- La $\gamma$-reglene sette inn *frie variable*:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{a/u}{\forall x Px, Pu \vdash Pa}}{\forall x Px \vdash Pa} \qquad \dfrac{\overset{b/v}{\forall x Px, Pv \vdash Pb}}{\forall x Px \vdash Pb}}{\forall x Px \vdash Pa \land Pb}$$

- Substituere termer for variable slik at løvnodene blir aksiomer.
- Hvilke substitusjoner vi kan anvende på løvnoder med frie variable slik at de blir aksiomer?
- Problemet kan løses med *unifiseringsalgoritmer*.

### $\delta$-reglene

- Når vi setter inn variable i $\gamma$-reglene får vi imidlertid problemer med $\delta$-reglene.
- Hvordan sikre at parameteren vi setter inn er *ny* når vi ennå ikke har satt inn termer for de frie variablene?

$$\dfrac{\dfrac{\overset{b/u,\, a/v}{Lua \vdash Lbv}}{\exists y Luy \vdash \forall x Lxv}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists y \forall x Lxy} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\text{kan ikke lukkes}}{Luf(u) \vdash Lg(v)v}}{\exists y Luy \vdash \forall x Lxv}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists y \forall x Lxy}$$

- Vi lar $\delta$-reglene introdusere en *Skolemterm*:
$$f(u_1, \ldots, u_n),$$
der $f$ er et nytt funksjonssymbol, kalt en *Skolemfunksjon*, og $u_1, \ldots, u_n$ er alle variablene som forekommer fritt i $\delta$-formelen.
- På den måten sikrer vi at termen introdusert av $\delta$-regelen er *ny* uansett hva slags verdi vi velger å instansiere de frie variablene med.

### Oppsummering

- Vi skal introdusere en *fri-variabel sekventkalkyle* og vise at den er *sunn* og *komplett*.
- $\gamma$-reglene introduserer nye *frie variable* og $\delta$-reglene introduserer *Skolemtermer*.
- Ved hjelp av *unifiseringsalgoritmer* finner vi *substitusjoner* som *lukker* utledningen.

## 1.2 Substitusjoner

- Vi har tidligere definert $\varphi[s/x]$ som formelen vi får ved å erstatte alle frie forekomster av $x$ i $\varphi$ med $s$.
- I fri-variabel sekventkalkyle har vi behov for å erstatte flere forskjellige variable med termer *samtidig*.
- Vi skal nå definere en bestemt type funksjoner – *substitusjoner* – som generaliserer én-variabel substitusjon til flere variable.
- Notasjon: Når vi anvender en substitusjon $\sigma$ på en formel $\varphi$ eller en term $t$ skriver vi $\varphi\sigma$ eller $t\sigma$ istedenfor $\sigma(\varphi)/\sigma(t)$.

**Definisjon 1.1** (Substitusjon)**.** *En* substitusjon *er en funksjon $\sigma$ fra mengden variable $\mathcal{V}$ til mengden av termer $\mathcal{T}$ i et gitt førsteordens språk.*

- Støtten *(support) eller* støttemengden *(support set) til $\sigma$ er mengden av variable $x$ slik at $x\sigma \neq x$.*
- *$\sigma$ er* grunn *dersom $x\sigma$ er en lukket term for alle variable $x$ i støttemengden til $\sigma$.*

**Notasjon.** *En substitusjon $\sigma$ med endelig støtte $\{x_1, \dots, x_n\}$ slik at $x_1\sigma = t_1, \dots, x_n\sigma = t_n$ skriver vi ofte slik:*

$$\sigma = \{t_1/x_1, \dots, t_n/x_n\}$$

- Substitusjonen $\epsilon$ slik at $x\epsilon = x$ for alle variable $x$ kalles *identitetssubstitusjonen*.
- Identitetssubstitusjonen kan skrives $\{\}$ siden den har tom støttemengde.

$$\sigma = \{a/x, fa/y\}$$

- er en substitusjon slik at
  - $x\sigma = a$
  - $y\sigma = fa$
  - $z\sigma = z$ for alle andre variable
- er en grunn substitusjon

$$\tau = \{a/y, fx/z\}$$

- er en substitusjon slik at
  - $y\sigma = a$
  - $z\sigma = fx$
  - $v\sigma = v$ for alle andre variable
- er *ikke* en grunn substitusjon

#### Substitusjon på termer

- Vi definerer substitusjon på termer som tidligere.

**Definisjon 1.2** (Substitusjon på termer)**.** *Vi definerer resultatet av å anvende en substitusjon $\sigma$ på vilkårlige termer rekursivt ved:*

- *$c\sigma = c$ for et konstantsymbol $c$.*
- *$f(t_1, \dots, t_n)\sigma = f(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma)$ for en funksjonsterm $f(t_1, \dots, t_n)$.*

**La** $\sigma = \{gy/x, y/z\}$**.**

- $f(x, a)\sigma = f(gy, a)$
- $h(y, z)\sigma = h(y, y)$
- $x\sigma = gy$

**La** $\tau = \{y/x, x/y\}$**.**

- $x\tau = y$
- $f(x, y)\tau = f(y, x)$

**Substitusjon på formler**

- Som tidligere, ønsker vi at substitusjoner *ikke* skal endre *bundne* variable.
- Eksempel: for $\sigma = \{a/x, b/y\}$ så vil $\forall x(Px \to Qy)\sigma = \forall x Px \to Qb$.
- Vi begrenser substitusjonen på den bundne variabelen:

**Definisjon 1.3** (Begrenset substitusjon)**.** *La $\sigma$ være en substitusjon. Substitusjonen $\sigma$ begrenset på $x$, skrevet $\sigma_x$, er definert slik at*

$$y\sigma_x = \begin{cases} y & \textit{hvis } y = x \\ y\sigma & \textit{ellers} \end{cases}$$

*for enhver variabel $y$.*

**Definisjon 1.4** (Substitusjon på formler)**.** *$\varphi\sigma$ er definert rekursivt ved:*

1. $R(t_1, \ldots, t_n)\sigma = R(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$
2. $\neg\psi\sigma = \neg(\psi\sigma)$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)\sigma = (\varphi_1\sigma \circ \varphi_2\sigma)$*, hvor* $\circ \in \{\wedge, \vee, \to\}$
4. $(\mathsf{Q}x\psi)\sigma = \mathsf{Q}x(\psi\sigma_x)$*, hvor* $\mathsf{Q} \in \{\forall, \exists\}$

- Vi antar, som tidligere, at ingen variable blir bundet som resultat av å anvende en substitusjon.
- Dette kan vi unngå ved å omdøpe bundne variable.

**La** $\sigma = \{fx/x, a/y, y/z\}$

- $\sigma_x = \{\cancel{fx/x}, a/y, y/z\}$
- $\sigma_y = \{fx/x, \cancel{a/y}, y/z\}$
- $\sigma_z = \{fx/x, a/y, \cancel{y/z}\}$
- $P(x, y)\sigma = P(fx, a)$
- $\forall x P(x, y)\sigma = \forall x(P(x, y)\sigma_x) = \forall x P(x, a)$
- $\exists z(Px \to Qz)\sigma = \exists z((Px \to Qz)\sigma_z) = \exists z(Pfx \to Qz)$

#### Komposisjon av substitusjoner

- La $\sigma$ og $\tau$ være substitusjoner.
- Anta at vi først anvender $\sigma$ og så $\tau$ på en formel $\varphi$: $(\varphi\sigma)\tau$.
- Vi har av og til bruk for å snakke om den substitusjonen som tilsvarer å anvende $\sigma$ etterfulgt av $\tau$.

**Definisjon 1.5** (Komposisjon av substitusjoner)**.** *La $\sigma$ og $\tau$ være substitusjoner.* Komposisjonen *av $\sigma$ og $\tau$ er en substitusjon skrevet $\sigma\tau$ slik at $x(\sigma\tau) = (x\sigma)\tau$ for hver variabel $x$.*

- Oppgave: vis at $\varphi(\sigma\tau) = (\varphi\sigma)\tau$ for alle formler $\varphi$ og alle substitusjoner $\sigma$ og $\tau$.

#### Komposisjon av substitusjoner med endelig støtte

**Påstand 1.1.** *La $\sigma_1 = \{s_1/x_1, \ldots, s_n/x_n\}$ og $\sigma_2 = \{t_1/y_1, \ldots, t_k/y_k\}$. Da er*

$$\sigma_1\sigma_2 = \{(s_1\sigma_2)/x_1, \ldots, (s_n\sigma_2)/x_n, (z_1\sigma_2)/z_1, \ldots, (z_m\sigma_2)/z_m\}$$

*der $z_1, \ldots, z_m$ er de variablene blant $y_1, \ldots, y_k$ som ikke er blant $x_1, \ldots, x_n$.*

**La $\sigma = \{z/x, a/y\}$ og $\tau = \{b/y, a/z\}$.**

Da er $\sigma\tau = \{(z\tau)/x, (a\tau)/y, (z\tau)/z\} = \{a/x, a/y, a/z\}$.

**La $\sigma = \{y/x\}$ og $\tau = \{x/y\}$.**

Da er $\sigma\tau = \{(y\tau)/x, (y\tau)/y\} = \{x/x, x/y\} = \{x/y\}$.

## 1.3 Unifisering

- I fri-variabel sekventkalkyle kan vi ha løvsekventer på formen

  $$\Gamma, P(s_1, \ldots, s_n) \vdash P(t_1, \ldots, t_n), \Delta$$

  der hver $s_i$ og $t_i$ er termer som kan inneholde variable.
- For å lukke løvsekventen må vi finne en substitusjon $\sigma$ slik at $s_i\sigma = t_i\sigma$ for hver $i$.
- *Det er ikke sikkert at noen slik substitusjon finnes!*

**Unifiseringsproblemet**
La $s$ og $t$ være termer. Finn *alle* substitusjoner som gjør $s$ og $t$ syntaktisk like, dvs. alle $\sigma$ slik at $s\sigma = t\sigma$.

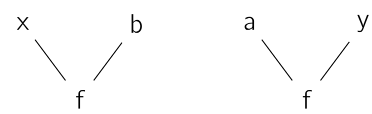
- En substitusjon som gjør termene $s$ og $t$ syntaktisk like, kalles en *unifikator* for $s$ og $t$.
- To termer er *unifiserbare* hvis de har en unifikator.

**Er $f(x)$ og $f(a)$ unifiserbare?**

Ja. Vi ser at $\sigma = \{a/x\}$ er en *unifikator*: $f(x)\sigma = f(a)$

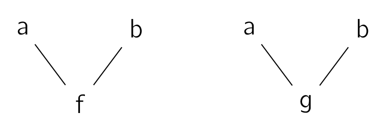
**Er $f(x, b)$ og $f(a, y)$ unifiserbare?**

Kan være lettere å se hvis vi skriver termene som *trær*:



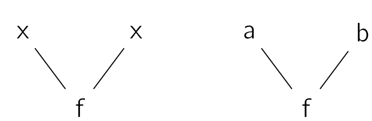

- Symbolene i posisjon 0 (rotposisjonen) er like.
- Symbolene i venstre barn er ulike, men kan unifiseres med $\{a/x\}$.
- Symbolene i høyre barn er ulike, men kan unifiseres med $\{b/y\}$.

**Er $f(a, b)$ og $g(a, b)$ unifiserbare?**




- Symbolene i posisjon 0 er ulike, og kan *ikke* unifiseres!

**Er $f(x, x)$ og $f(a, b)$ unifiserbare?**




- Symbolene i posisjon 0 er like.
- Symbolene i venstre barn er ulike, men kan unifiseres med $\{a/x\}$.
- Vi må anvende $\{a/x\}$ på $x$ i både venstre og høyre barn.
- Symbolene i høyre barn er nå ulike, og kan *ikke* unifiseres!

**Er $x$ og $f(x)$ unifiserbare?**


- Symbolene i posisjon 0 er ulike, men kan unifiseres med $\{f(x)/x\}$.
- Vi må samtidig anvende $\{f(x)/x\}$ på $x$ i høyre tre.
- På posisjon 1 ser vi nå at symbolene $x$ og $f$ er ulike.
- Hvis vi unifiserer med $\{f(x)/x\}$, må vi igjen erstatte $x$ i høyre tre.
- Sånn kan vi holde på en stund...

**Generelt har vi:**

- To *ulike* konstantsymboler eller funksjonssymboler er *ikke* unifiserbare.
- En variabel $x$ er *ikke* unifiserbar med en term som *inneholder* $x$.

- Vi skal lage en *unifiseringsalgoritme*, som finner *alle* unifikatorer for to termer.
- Problem: To termer har potensielt uendelig mange unifikatorer! Vi kan ikke returnere alle...
- Løsning: Finne en *representant* $\sigma$ for mengden av unifikatorer slik at alle andre unifikatorer kan konstrueres fra $\sigma$.
- En slik unifikator kalles en *mest generell unifikator*.

**Definisjon 1.6** (Mer generell substitusjon)**.** *La $\sigma_1$ og $\sigma_2$ være substitusjoner. Vi sier at $\sigma_2$ er* mer generell *enn $\sigma_1$ hvis det finnes en substitusjon $\tau$ slik at $\sigma_1 = \sigma_2\tau$.*

**Er $\{f(y)/x\}$ mer generell enn $\{f(a)/x\}$?**

Ja, siden $\{f(a)/x\} = \{f(y)/x\}\{a/y\}$.

**Er $\{f(a)/x\}$ mer generell enn $\{f(y)/x\}$?**

Nei, for det finnes ingen substitusjon $\sigma$ slik at $\{f(y)/x\} = \{f(a)/x\}\sigma$.

**Er $\{f(y)/x\}$ mer generell enn $\{f(y)/x\}$?**

Ja, siden $\{f(y)/x\} = \{f(y)/x\}\epsilon$. (Husk: $\epsilon$ er identitetssubstitusjonen.)

**Definisjon 1.7** (Unifikator)**.** *La $s$ og $t$ være termer. En substitusjon $\sigma$ er*

- *en* unifikator *for $s$ og $t$ hvis $s\sigma = t\sigma$.*
- *en* mest generell unifikator *(mgu) for $s$ og $t$ hvis*
  - *den er en unifikator for $s$ og $t$, og*
  - *den er mer generell enn alle andre unifikatorer for $s$ og $t$.*

*Vi sier at $s$ og $t$ er* unifiserbare *hvis de har en unifikator.*

**La** $s = f(x)$ **og** $t = f(y)$**.**

- $\sigma_1 = \{a/x, a/y\}$ er en unifikator for $s$ og $t$
- $\sigma_2 = \{y/x\}$ og $\sigma_3 = \{x/y\}$ er også unifikatorer for $s$ og $t$
- $\sigma_2$ og $\sigma_3$ er de mest generelle unifikatorene for $s$ og $t$

### Variabelomdøping

- Fra det foregående eksempelet ser vi at to termer kan ha flere forskjellige mest generelle unifikatorer.
- Disse mgu-ene er imidlertid like *opp til omdøping av variable*.

**Definisjon 1.8** (Variabelomdøping)**.** *En substitusjon $\eta$ er en* variabelomdøping *hvis*

1. *$x\eta$ er en variabel for alle $x \in \mathcal{V}$, og*
2. *$x\eta \neq y\eta$ for alle $x, y \in \mathcal{V}$ slik at $x \neq y$.*

### Er disse substitusjonene variabelomdøpinger?

- $\sigma_1 = \{z/x, x/y, y/z\}$ Ja.
- $\sigma_2 = \{z/x, y/z\}$ Nei, siden $y\sigma_2 = z\sigma_2$.
- $\sigma_3 = \{z/x, x/y, y/z, a/u\}$ Nei, siden $u\sigma_3$ ikke er en variabel.

### Unikhet "opp til omdøping av variable"

**Påstand 1.2.** *Hvis $\sigma_1$ og $\sigma_2$ er mest generelle unifikatorer for to termer $s$ og $t$, så finnes en variableomdøping $\eta$ slik at $\sigma_1\eta = \sigma_2$.*

- Bevis som oppgave?

### Deltermer

**Definisjon 1.9** (Deltermer)**.** *Mengden av deltermer av en term $t$ er den minste mengden $T$ slik at*

- *$t \in T$, og*
- *hvis $f(t_1, \ldots, t_n) \in T$, så er hver $t_i \in T$.*

*Alle termer i $T$ utenom $t$ er ekte deltermer av $t$.*

**La** $s = gx$**.**

- Deltermer er: $x$, $gx$
- Ekte deltermer er: $x$

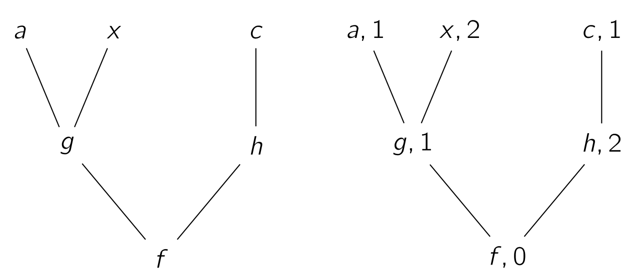
**La** $t = f(x, a)$**.**

- Deltermer er: $x$, $a$, $f(x, a)$
- Ekte deltermer er: $x$, $a$

- En term er altså en delterm av seg selv.

### Nummererte termtrær

- Vi har sett at termer kan representeres med trær.
- Når vi unifiserer er det gunstig å nummerere barna til noder i termtreet:




- Slike trær kalles *nummererte termtrær*.
- Vi referer til roten til det nummererte termtreet til en term $t$ som rot($t$).

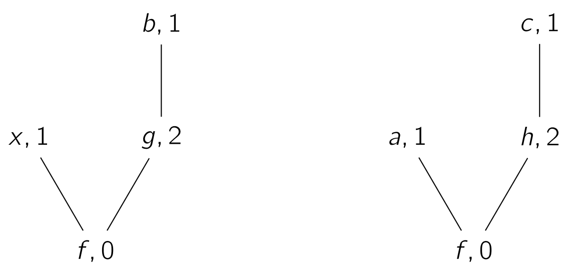
### Kritisk par

- Når vi skal unifisere to termer $t_1$ og $t_2$ er vi interessert i å finne par av deltermer som er *ulike*.
- Samtidig er det ønskelig å se på ulike deltermer så nærme roten som mulig.

**Definisjon 1.10** (Kritisk par)**.** *Et kritisk par for to termer $t_1$ og $t_2$ er et par $\langle k_1, k_2 \rangle$ slik at*

- $k_1$ *er en delterm av* $t_1$
- $k_2$ *er en delterm av* $t_2$
- *når vi tenker på termer som nummererte termtrær så er*
  - *rot($k_1$) forskjellig fra rot($k_2$)*
  - *stien fra rot($t_1$) til rot($k_1$) er lik stien fra rot($t_2$) til rot($k_2$)*
- Merk: stiene kan være tomme, dvs. at termene er ulike allerede i rotsymbolet. Tomme stier er trivielt like...

**Eksempel.** *La* $s = f(x, gb)$ *og* $t = f(a, hc)$. *Vi får følgende nummererte termtrær:*




- *Er* $\langle b, c \rangle$ *kritisk par for* $s$ *og* $t$*?*
  - *Nei, stien fra rot($s$) til rot($b$) er ulik stien fra rot($t$) til rot($c$).*
- *Er* $\langle x, a \rangle$ *kritisk par for* $s$ *og* $t$*? Ja.*
- *Er* $\langle gb, hc \rangle$ *kritisk par for* $s$ *og* $t$*? Ja.*

**Algoritme: unifiser(**$t_1$**,** $t_2$**)**

$\sigma := \epsilon$;
**while** *(*$t_1\sigma \neq t_2\sigma$*)* **do**
    velg et kritisk par $\langle k_1, k_2 \rangle$ for $t_1\sigma, t_2\sigma$;
    **if** *(hverken* $k_1$ *eller* $k_2$ *er en variabel)* **then**
        return *"ikke unifiserbare"*;
    **end**
    $x :=$ den av $k_1, k_2$ som er variabel (hvis begge er, så velg én);
    $t :=$ den av $k_1, k_2$ som ikke er $x$;
    **if** *(*$x$ *forekommer i* $t$*)* **then**
        return *"ikke unifiserbare"*;
    **end**
    $\sigma := \sigma\{t/x\}$;
**end**
return $\sigma$;

**Egenskaper ved unifiseringsalgoritmen**

- Hvis termene $t_1$ og $t_2$ er unifiserbare, så returnerer algoritmen en mest generell unifikator for $t_1$ og $t_2$.
- Denne mgu-en er en representant for alle andre unifikatorer for $t_1$ og $t_2$.
- Hvis $t_1$ og $t_2$ *ikke* er unifiserbare, så returnerer algoritmen *"ikke unifiserbare"*.