

INF4170 – Logikk

Forelesning 10: Automatisk bevissøk II – fri-variabel sekventkalkyle og sunnhet

Martin Giese

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

14. april 2008



Dagens plan

1 Automatisk bevissøk II

1 Automatisk bevissøk II

- Fri-variabel sekventkalkyle
- Semantikk
- Sunnhet

Fri-variabel sekventkalkyle

- Valg av term i γ -slutninger utsettes ved å sette inn en **fri** variabel.
- Introduksjon av frie variable i γ -slutninger gjør at vi må la δ -slutninger introdusere **Skolemtermer**.
- Ved unifikasjon finner vi en substitusjon som erstatter frie variable med termer slik at utledningen lukkes.

$$\frac{\frac{u/a, v/fa}{Lufu \vdash Lav}}{\exists yLuy \vdash Lav}}{\forall x\exists yLxy \vdash \exists xLax}$$

Utvidet språk

- δ -slutningene introduserer **Skolemkonstanter** og **Skolemfunksjoner**.
- Disse symbolene er **nye** symboler som ikke forekommer i det språket som defineres av rotsekventen i en utledning.
- Språket som brukes i utledningene er **utvidet** med slike Skolemsymboler.

Definisjon (Utvidet språk)

La \mathcal{L} være et førsteordens språk. La S være en mengde som består av

- tellbart uendelig mange **Skolemkonstanter**, og
- tellbart uendelig mange **Skolemfunksjoner** av hver aritet,

slik at symbolene i S er forskjellig fra symbolene i \mathcal{L} . La \mathcal{L}^{sko} være språket vi får ved å utvide \mathcal{L} med konstant- og funksjonssymbolene i S .

Sekventer

Definisjon (Sekvent)

La \mathcal{L} være et førsteordens språk.

- En **sekvent** er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av førsteordens formler i \mathcal{L}^{sko} .
- En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er **lukket** hvis formlene i Γ og Δ er lukkede.

Sekventer

- 1 $\forall xPx \vdash Pa$
- 2 $\forall x\exists yLxy \vdash \exists x\forall yLyx$
- 3 $\forall xPxy \vdash Pufu$
- 4 $Pu \vdash Pa$
- 5 $Pu \vdash Pu, \exists xPx$

Lukkede sekventer

Nr. 1 og 2 er lukkede sekventer.

 γ -regleneDefinisjon (γ -regler i fri-variabel LK)

γ -reglene i fri-variabel LK er:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[u/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta} L\forall \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[u/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi} R\exists$$

u er en **ny** fri variabel

- Med **ny** mener vi her at u ikke må forekomme fritt i utledningen fra før.

 δ -regleneDefinisjon (δ -regler i fri-variabel LK)

δ -reglene i fri-variabel LK er:

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(\vec{u})/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta} L\exists \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[f(\vec{u})/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\varphi} R\forall$$

f er en **ny** Skolemfunksjon

$\vec{u} = u_1, \dots, u_n$ er de frie variablene i hovedformelen

- Med **ny** mener vi her at f ikke må forekomme i utledningen fra før.

Slutningsregler og utledninger

Definisjon (Slutningsreglene i fri-variabel LK)

Slutningsreglene i fri-variabel LK er

- γ - og δ -reglene for frie variable, og
 - α - og β -reglene fra utsagnslogisk LK.
- Mengden av **fri-variabel utledninger** defineres induktivt:
 - **Basismengden** er mengden av **lukkede** sekventer.
 - Mengden er lukket under slutningsreglene i fri-variabel LK.
 - Vi krever altså at rotsekventen i en utledning *kun* inneholder lukkede formler!
 - Formlene i de andre sekventene i en utledning behøver imidlertid ikke være lukkede.

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\frac{\frac{\forall xPx, Pu \vdash \exists xPx, Pv}{\forall xPx, Pu \vdash \exists xPx} R\exists}{\forall xPx \vdash \exists xPx} L\forall$$

$R\exists$ kan ikke introdusere u , siden denne allerede forekommer fri i utledningen.

$$\frac{\frac{\forall xPx, Pu \vdash Pa}{\forall xPx \vdash Pa} L\forall \quad \frac{\forall xPx, Pv \vdash Pb}{\forall xPx \vdash Pb} L\forall}{\forall xPx \vdash Pa \wedge Pb} R\wedge$$

$L\forall$ i høyre og venstre gren kan ikke introdusere den samme variabelen, av samme grunn som over.

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\frac{\frac{\frac{\forall x(Px \vee Qx), Pu \vdash Pa, \forall xQx}{\forall x(Px \vee Qx), Pu \vdash \forall xPx, \forall xQx} R\forall \quad \frac{\forall x(Px \vee Qx), Qu \vdash \forall xPx, Qb}{\forall x(Px \vee Qx), Qu \vdash \forall xPx, \forall xQx} L\forall}{\forall x(Px \vee Qx), Pu \vee Qu \vdash \forall xPx, \forall xQx} L\vee}{\forall x(Px \vee Qx) \vdash \forall xPx, \forall xQx} L\forall$$

- Vi krever at hver δ -slutning introduserer et **nytt** Skolemsymbol, dvs. et som **ikke** forekommer i utledningen fra før.
- Derfor kan $R\forall$ i høyre gren **ikke** introdusere den samme Skolemkonstanten som $R\forall$ i venstre gren.
- Dette er et *strengere* krav enn for δ -reglene i LK uten frie variable, der den introduserte parameteren ikke må forekomme i *konklusjonen*.
- I utledningen over vet vi ikke hvilke symboler som forekommer i konklusjonen før vi har instansiert u !

Eksempel på objekter som ikke er utledninger

~~$$\frac{\frac{Px \vdash Pa}{Px \vdash \forall xPx} R\forall}{\vdash Px \rightarrow \forall xPx} R\rightarrow$$~~

Rotsekventen er ikke lukket.

~~$$\frac{\frac{\frac{\forall x\exists yPxy, Puf(u) \vdash Pf(v)v, \exists x\forall yPyx}{\forall x\exists yPxy, Puf(u) \vdash \forall yPyv, \exists x\forall yPyx} R\forall}{\forall x\exists yPxy, Puf(u) \vdash \exists x\forall yPyx} R\exists}{\frac{\forall x\exists yPxy, \exists yPuy \vdash \exists x\forall yPyx}{\forall x\exists yPxy \vdash \exists x\forall yPyx} L\exists} L\forall$$~~

De to δ -slutningene introduserer det samme Skolemfunksjonssymbol.

Lukkede utledninger

- For at en fri-variabel LK-utledning skal være et bevis, må vi instansiere de frie variablene i utledningen slik at løvsekventene blir aksiomer.
- Dette kalles å **lukke** en utledning.

Definisjon (Lukking)

La π være en fri-variabel utledning, og la σ være en substitusjon.

- σ **lukker** en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ i π hvis det finnes atomære formler $\varphi \in \Gamma$ og $\psi \in \Delta$ slik at $\varphi\sigma = \psi\sigma$.
- σ **lukker** π hvis σ lukker alle løvsekventene i π .

Bevis

Definisjon (Bevis)

Et **fri-variabel LK-bevis** for en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er et par $\langle \pi, \sigma \rangle$ der

- π er en utledning med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, og
- σ er en **grunn** substitusjon som lukker π .

- Vi krever at den lukkende substitusjonen skal være **grunn**, siden dette gjør sunnhetsbeviset *litt* lettere.
- Senere skal vi se at vi kan lempe på dette kravet og tillate lukkende substitusjoner som ikke er grunne.

Eksempel (1)

La π være utledningen

$$\frac{\frac{\forall xPx, Pu \vdash \exists xPx, Pv}{\forall xPx, Pu \vdash \exists xPx} R\exists}{\forall xPx \vdash \exists xPx} L\forall$$

og la $\sigma = \{a/u, a/v\}$.

- σ lukker løvsekventen: $(Pu)\sigma = Pa = (Pv)\sigma$.
- σ lukker π , siden den lukker den eneste løvsekventen.
- Da er $\langle \pi, \sigma \rangle$ et **bevis** for sekventen $\forall xPx \vdash \exists xPx$.

Merk:

Slik vi har definert fri-variabel LK vil f.eks. $\langle \pi, \sigma' \rangle$ der $\sigma' = \{v/u\}$ **ikke** være et bevis, siden σ' ikke er grunn.

Eksempel (2)

La π være utledningen

$$\frac{\frac{\forall xPx, Pu \vdash Pa}{\forall xPx \vdash Pa} L\forall \quad \frac{\forall xPx, Pv \vdash Pb}{\forall xPx \vdash Pb} L\forall}{\forall xPx \vdash Pa \wedge Pb} R\wedge$$

og la $\sigma = \{a/u, b/v\}$.

- σ lukker venstre løvsekvent: $(Pu)\sigma = Pa$.
- σ lukker høyre løvsekvent: $(Pv)\sigma = Pb$.
- σ lukker π , siden den lukker begge løvsekventene.
- Da er $\langle \pi, \sigma \rangle$ et **bevis** for sekventen $\forall xPx \vdash Pa \wedge Pb$.

Eksempel (3)

La π være utledningen

$$\frac{\frac{\forall x(Px \vee Qx), Pu \vdash Pa, \forall xQx}{\forall x(Px \vee Qx), Pu \vdash \forall xPx, \forall xQx} \text{RV} \quad \frac{\forall x(Px \vee Qx), Qu \vdash \forall xPx, Qb}{\forall x(Px \vee Qx), Qu \vdash \forall xPx, \forall xQx} \text{RV}}{\frac{\forall x(Px \vee Qx), Pu \vee Qu \vdash \forall xPx, \forall xQx}{\forall x(Px \vee Qx) \vdash \forall xPx, \forall xQx} \text{LV}} \text{LV}$$

- Det finnes ingen substitusjon som lukker begge løvsekventene, siden *u ikke* kan instansieres med både *a* og *b* samtidig.
- Derfor finnes ikke noe bevis for sekventen $\forall x(Px \vee Qx) \vdash \forall xPx, \forall xQx$ basert på utledningen π .
- Er rotsekventen gyldig...?

1 Automatisk bevisøøk II

- Fri-variabel sekventkalkyle
- Semantikk
- Sunnhet

Semantikk

- For å kunne vise at kalkylen er sunn må vi ha klart for oss hvordan vi tolker formlene i utledningene.
- Tidligere inneholdt våre sekventer bare *lukkede* formler.
- Vi har imidlertid definert semantikken av formler med frie variabler gjennom **variabeltilordninger**.
- Vi gir nå en repetisjon av definisjonene.

Variabeltilordninger

Definisjon (Variabeltilordning)

La \mathcal{M} være en modell. En **variabeltilordning** for \mathcal{M} er en funksjon fra mengden av variable til $|\mathcal{M}|$.

- En variabeltilordning er alltid gitt relativ til en modell \mathcal{M} siden den tolker variable som elementer i domenet til \mathcal{M} .
- For en gitt modell kan vi ha mange variabeltilordninger.
- Hvis $|\mathcal{M}| = \{1, 2, 3\}$, så kan vi ha
 - μ_1 slik at $\mu_1(x_1) = 1, \mu_1(x_2) = 1, \mu_1(x_3) = 1, \dots$
 - μ_2 slik at $\mu_2(x_1) = 2, \mu_2(x_2) = 2, \mu_2(x_3) = 2, \dots$
 - μ_3 slik at $\mu_3(x_1) = 1, \mu_3(x_2) = 2, \mu_3(x_3) = 3, \dots$
 - \dots

Tolkning av termer med frie variable

- Tolkningsfunksjonen i modellen tolker konstant- og funksjonssymboler.
- Tolkningen av frie variable overlates til variabeltilordningen.

Definisjon (Tolkning av termer med frie variable)

La \mathcal{L} være et førsteordens språk og \mathcal{M} en modell for \mathcal{L} . La μ være en variabeltilordning for \mathcal{M} . Tolkningen av en term t i \mathcal{M} under μ , skrevet $t^{\mathcal{M},\mu}$, defineres rekursivt.

- $x^{\mathcal{M},\mu} = \mu(x)$ for en variabel x
- $c^{\mathcal{M},\mu} = c^{\mathcal{M}}$ for et konstantsymbol c
- $f(t_1, \dots, t_n)^{\mathcal{M},\mu} = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M},\mu}, \dots, t_n^{\mathcal{M},\mu})$ for en funksjonsterm

Tolkning av formler med frie variable

Definisjon (Tolkning av formler med frie variable)

La \mathcal{L} være et førsteordens språk og \mathcal{M} en modell for \mathcal{L} . La μ være en variabeltilordning for \mathcal{M} . Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en formel φ er sann i \mathcal{M} under μ ; vi skriver $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ når φ er sann i \mathcal{M} under μ .

- Atomære fml: $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \dots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M},\mu}, \dots, t_n^{\mathcal{M},\mu} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \wedge \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \vee \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ eller $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \rightarrow \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ impliserer $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \forall x\varphi$ hvis $\mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\} \models \varphi$ for alle $a \in |\mathcal{M}|$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \exists x\varphi$ hvis $\mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\} \models \varphi$ for minst en $a \in |\mathcal{M}|$.

Eksempel I

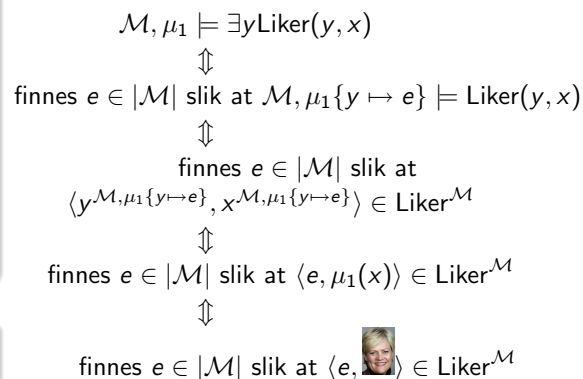
Modellen \mathcal{M}

$|\mathcal{M}| = \{ \text{A}, \text{B}, \text{C} \}$
 $\text{Liker}^{\mathcal{M}} =$
 $\{ \langle \text{A}, \text{B} \rangle, \langle \text{A}, \text{C} \rangle, \langle \text{B}, \text{A} \rangle, \langle \text{B}, \text{C} \rangle, \langle \text{C}, \text{A} \rangle, \langle \text{C}, \text{B} \rangle \}$

Variabeltilordningen μ_1

$\mu_1(x) = \text{B}$

- Er det slik at $\mathcal{M}, \mu_1 \models \exists y \text{Liker}(y, x)$?
- Fra semantikken:



- Ja, både $e = \text{A}$ og $e = \text{B}$.

Falsifiserbarhet

- Vi har tidligere definert gyldighet av en lukket sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ slik:
 - Enhver modell som oppfyller alle formlene i Γ må oppfylle minst én formel i Δ .
- Vi kan også definere en gyldig sekvent som en sekvent som ikke er falsifiserbar.
- En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er falsifiserbar hvis den har en motmodell, dvs. en modell som oppfyller alle formlene i Γ og gjør alle formlene i Δ usanne.
- I fri-variabel LK kan Γ og Δ inneholde formler som ikke er lukket.
- Vi ønsker at en motmodell til en sekvent skal være en motmodell uavhengig av hvordan vi tolker de frie variablene.

Falsifiserbarhet II

Se på sekventen $Qx \vdash Px$

- En motmodell vil f.eks. være modellen \mathcal{M} slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $Q^{\mathcal{M}} = \{a, b\}$ og $P^{\mathcal{M}} = \emptyset$.
- Her finnes to aktuelle variabeltilordninger: $\mu_1(x) = a$ og $\mu_2(x) = b$.
- Uansett hvilken av disse vi bruker til å tolke de frie variablene, så vil \mathcal{M} være en motmodell til sekventen.

Se på sekventen $Px \vdash Pa$

- Et forsøk på å lage en motmodell kan være \mathcal{M}' slik at $|\mathcal{M}'| = \{a, b\}$ og $P^{\mathcal{M}'} = \{b\}$.
- Hvis vi tolker x som b , ser vi at \mathcal{M}' oppfyller Px og falsifiserer Pa .
- Men hvis vi tolker x som a , ser vi at \mathcal{M}' ikke lenger er en motmodell.
- Her finnes en variabeltilordning som gjør at \mathcal{M}' ikke er en motmodell til sekventen.

Falsifiserbarhet III

- Hvorvidt en modell \mathcal{M} er en motmodell til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ avhenger altså av hvilke sannhetsverdier formlene i Γ og Δ får for **hver enkelt** variabeltilordning for \mathcal{M} .
- Det leder til følgende definisjon.

Definisjon (Falsifiserbar sekvent)

En modell \mathcal{M} er en **motmodell** til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ hvis følgende holder for alle variabeltilordninger μ for \mathcal{M} :

- \mathcal{M}, μ gjør alle formlene i Γ sanne, og
- \mathcal{M}, μ gjør alle formlene i Δ usanne.

En sekvent er

- **falsifiserbar** hvis den har en motmodell
- **gyldig** hvis den ikke er falsifiserbar

1 Automatisk bevissøk II

- Fri-variabel sekventkalkyle
- Semantikk
- Sunnhet

Sunnhet

Definisjon (Sunnhet)

En sekventkalkyle er **sunn** dersom enhver bevisbar sekvent er gyldig.

- Kjernen i sunnhetsbeviset for utsagnslogisk LK og grunn LK er at slutningsreglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
- Reglene i fri-variabel LK har **ikke** denne egenskapen!

β -regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \quad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \vee Qu \vdash Pa, Qb}$$

- La \mathcal{M} være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- Vi har to aktuelle variabeltilordninger for \mathcal{M} : $\mu_1(u) = a$ og $\mu_2(u) = b$.
- \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen:
 - \mathcal{M} falsifiserer begge formlene i succedenten.
 - $\mathcal{M}, \mu_1 \models Qu$ og $\mathcal{M}, \mu_2 \models Pu$, så \mathcal{M} gjør formelen i antecedenten sann uavhengig av variabeltilordning.
- Premissene er **ikke** falsifiserbare. (Prøv!)
- Konklusjonen er falsifiserbar, mens premissene **ikke** er det!

Sunnhet – alternativ framgangsmåte

- På grunn av β -slutningene vil en fri variabel kunne forekomme i flere *forskjellige* grener i en utledning.
- De forskjellige forekomstene er *avhengige* av hverandre i den forstand at de må tildeles den samme verdien av en variabeltilordning.
- Vi skal definere hva det vil si at en utledning er **falsifiserbar**.
- Vi skal så vise at alle utledninger med falsifiserbar rotsekvent er falsifiserbare.
- Når vi har denne egenskapen, er resten av sunnhetsbeviset for fri-variabel LK tilsvarende beviset for den grønne kalkylen.

Falsifiserbarhet

- Husk at hvis G er en gren i en utledning, så er
 - G^{\top} alle formler som forekommer i en antecedent på G , og
 - G^{\perp} alle formler som forekommer i en succedent på G .

Definisjon (Falsifiserbarhet)

La π være en fri-variabel utledning, og la \mathcal{M} være en modell.

- Anta at μ er en variabeltilordning for \mathcal{M} . En gren G i π er **falsifisert** av \mathcal{M} under μ hvis
 - \mathcal{M}, μ gjør alle formlene i G^{\top} sanne, **og**
 - \mathcal{M}, μ gjør alle formlene i G^{\perp} usanne.
- \mathcal{M} **falsifiserer** π hvis for alle variabeltilordninger μ for \mathcal{M} så finnes en gren i π som er falsifisert av \mathcal{M} under μ .

En utledning er **falsifiserbar** hvis det finnes en modell som falsifiserer den.

Falsifisert gren avhenger av variabeltilordningen

La π være følgende utledning (der γ -kopiene ikke vises):

$$\frac{\frac{Pu \vdash Pa, Qb \quad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \vee Qu \vdash Pa, Qb}}{\forall x(Px \vee Qx) \vdash Pa, Qb}$$

- La \mathcal{M} være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- \mathcal{M} falsifiserer π :
 - Hvis $\mu_1(u) = a$, så har vi at den høyre grenen er falsifisert av \mathcal{M} under μ_1 .
 - Hvis $\mu_2(u) = b$, så har vi at den venstre grenen er falsifisert av \mathcal{M} under μ_2 .

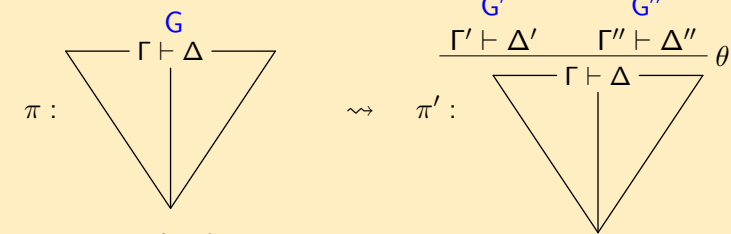
Lemma

Hvis en slutningsregel fra fri-variabel LK anvendes på en falsifiserbar utledning, så får vi en ny falsifiserbar utledning.

- Vi skal med andre ord vise at reglene *bevarer falsifiserbarhet*.
- Vi får ett tilfelle for hver regel.
- Alle tilfellene bortsett fra δ -reglene ($L\exists$ og $R\forall$) går på samme måte.
- Vi viser først hvordan beviset går for disse og tar δ -reglene til slutt.

Bevis.

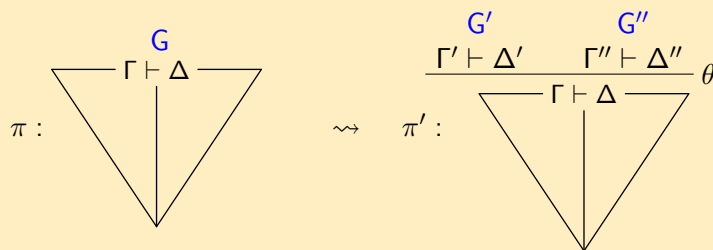
Overblikk:



- Anta at π er falsifiserbar.
- Skal vise at π' er falsifiserbar.
- La \mathcal{M} være en modell som falsifiserer π .
- Velg en vilkårlig variabeltilordning μ for \mathcal{M} .
- Vi får to tilfeller:
 - 1 Den grenen i π som er falsifisert av \mathcal{M} under μ er en annen enn G .
 - 2 Den falsifiserte grenen er G .

□

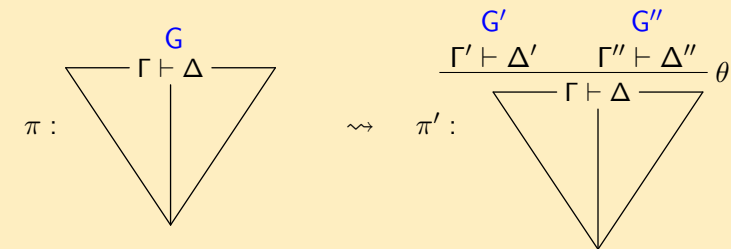
Bevis (tilfelle 1).



- Har antatt at π er falsifiserbar.
- Har valgt en modell \mathcal{M} som falsifiserer π og en variabeltilordning μ for \mathcal{M} .
- Har antatt at grenen i π som er falsifisert av \mathcal{M} under μ **ikke** er G .
- Da er den falsifiserte grenen i π også en gren i π' .

□

Bevis (tilfelle 2).



- Har antatt at π er falsifiserbar.
- Har en modell \mathcal{M} som falsifiserer π og en variabeltilordning μ for \mathcal{M} .
- Har antatt at G i π er falsifisert av \mathcal{M} under μ .
- Må vise at enten G' eller G'' er falsifisert i π' .
- Vi får ett tilfelle for hver LK-regel.
- Vi viser argumentet for $L\forall$ og $L\exists$.

□

Bevis (tilfelle 2 – L \vee).

$$\frac{\frac{G'}{\Gamma, A \vdash \Delta} \quad \frac{G''}{\Gamma, B \vdash \Delta}}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \text{L}\vee$$

|
G

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av \mathcal{M} under μ , så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{A \vee B\}$ og at \mathcal{M}, μ gjør alle i Δ usanne.
- Fra semantikken har vi at $\mathcal{M}, \mu \models A$ eller $\mathcal{M}, \mu \models B$.
- Hvis $\mathcal{M}, \mu \models A$, så er G' falsifisert av \mathcal{M} under μ .
- Hvis $\mathcal{M}, \mu \models B$, så er G'' falsifisert av \mathcal{M} under μ . □

Bevis (tilfelle 2 – L \forall).

$$\frac{G'}{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[u/x] \vdash \Delta} \text{L}\forall$$

|
G

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av \mathcal{M} under μ , så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{\forall x \varphi\}$ og at \mathcal{M}, μ gjør alle formler i Δ usanne.
- Anta at $\mu(u) = e$ (der $e \in |\mathcal{M}|$).
- Siden $\mathcal{M}, \mu \models \forall x \varphi$ har vi fra semantikken at $\mathcal{M}, \mu\{x \mapsto a\} \models \varphi$ for alle $a \in |\mathcal{M}|$.
- Spesielt vil $\mathcal{M}, \mu\{x \mapsto e\} \models \varphi$, men da vil $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[u/x]$, på grunn av substitusjonslemmaet.
- Da er G' falsifisert av \mathcal{M} under μ . □

Bevis (δ -regler).

Når en δ -regel anvendes, må vi vise lemmaet på en annen måte. Vi gjør tilfellet for L \exists .

$$\frac{G'}{\Gamma, \varphi[f(u_1, \dots, u_n)/x] \vdash \Delta} \text{L}\exists$$

|
G

- La \mathcal{M}' være en modell som er lik \mathcal{M} bortsett fra tolkningen av f , som defineres som følger:
 - La $a_1, \dots, a_n \in |\mathcal{M}'|$ og la μ' være en variabeltilordning slik at $\mu'(u_i) = a_i$ for $1 \leq i \leq n$.
 - Hvis $\mathcal{M}, \mu' \models \exists x \varphi$, så finnes $e \in |\mathcal{M}|$ slik at $\mathcal{M}, \mu'\{x \mapsto e\} \models \varphi$. La $f^{\mathcal{M}'}(a_1, \dots, a_n) = e$.
 - Hvis $\mathcal{M}, \mu' \not\models \exists x \varphi$, så la $f^{\mathcal{M}'}(a_1, \dots, a_n)$ være et vilkårlig element i $|\mathcal{M}'|$.
- Påstand: \mathcal{M}' falsifiserer π' . Oppgave! □

Lemma

Enhver utledning med falsifiserbar rotsekvent er falsifiserbar.

Bevis.

Ved strukturell induksjon på utledninger.

- Basistilfellet: rotsekventen er falsifiserbar.
- Induksjonssteget: følger fra Lemma. □

En variant av substitusjonslemmaet, for flere variabler, men bare for grunn substitusjoner:

Lemma

La \mathcal{M} være en modell, og la σ være en grunn substitusjon. La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ . Hvis φ er en formel slik at de frie variablene i φ er med i støtten til σ , så holder $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ hvis og bare hvis $\mathcal{M} \models \varphi\sigma$.

Bevis.

Ukeoppgave.

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen fri-variabel LK er sunn.

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma finnes en modell \mathcal{M} som falsifiserer π .
- La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ .
- Da finnes en gren G i π som er falsifisert av \mathcal{M} under μ .
- Siden σ lukker løvsekventen på G , så finnes atomære formler $\varphi \in G^\top$ og $\psi \in G^\perp$ slik at $\varphi\sigma = \psi\sigma$.
- Siden G er falsifisert av \mathcal{M} under μ , så $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \not\models \psi$.
- Fra Lemma har vi $\mathcal{M} \models \varphi\sigma$ og $\mathcal{M} \not\models \psi\sigma$. Men $\varphi\sigma = \psi\sigma$, motsigelse.