Forelesning 11: Automatisk bevissøk III – fri-variabel kompletthet og repetisjon av sunnhet

Martin Giese - 31. april 2008

1 Kompletthet av fri-variabel LK

Teorem 1.1 (Kompletthet)**.** *Hvis* $\Gamma \vdash \Delta$ *er gyldig, så er den bevisbar i fri-variabel* LK.

For å vise *kompletthet*, viser vi den ekvivalente påstanden:

Lemma 1.1 (Modelleksistens)**.** *Hvis* $\Gamma \vdash \Delta$ ikke *er bevisbar i LK, så er den falsifiserbar.*

Husk:

- En modell $\mathcal{M}$ *falsifiserer* $\Gamma \vdash \Delta$ hvis ethvert valg av variabeltilordning for $\mathcal{M}$ gjør alle formler i Γ sanne og alle formler i Δ usanne.
- Hvis formlene i Γ og Δ er *lukkede*, vil sannhetsverdiene til formlene under $\mathcal{M}$ være *uavhengig av variabeltilordning*.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon

Beviset for modelleksistens for fri-variabel LK bygger på beviset for grunn LK. Hovedtrekkene i beviset for grunn LK:

- Vi antar at en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ *ikke* er bevisbar i grunn LK.
  - Det betyr at alle utledninger med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ har en åpen gren.
- Vi bruker en *rettferdig strategi* til å konstruere en *grenseutledning* for $\Gamma \vdash \Delta$ der hver åpen gren G har følgende egenskaper:
  - enhver α-, β- og δ-formel på G er hovedformel i en slutning på G, og
  - hvis G inneholder en γ-formel på formen $Qx\varphi$, så er $\varphi[t/x]$ aktiv formel i en slutning på G for hver term t i Herbrand-universet til G.
  - *"Alle mulige regelanvendelser er forsøkt på alle åpne grener."*
- Siden $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar, så må grenseutledningen inneholde en *åpen* gren G (ved Königs lemma).

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon II

- Vi benytter informasjonen i G til å konstruere en Herbrand-modell $\mathcal{M}$ på følgende måte:
  - Domenet til $\mathcal{M}$ er Herbrand-universet til G.
  - For lukkede termer t på G: $t^{\mathcal{M}} = t$
  - For n-ære relasjonssymboler P på G: $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in P^{\mathcal{M}} \;\Leftrightarrow\; P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{G}^{\top}$

- *Husk: Herbrand-universet til en gren er mengden av alle grunne termer som kan konstrueres fra konstant- og funksjonssymboler på grenen.*
- Vi viser så ved strukturell induksjon på formler i G at $\mathcal{M}$ oppfyller alle formler i $G^\top$ og falsifiserer alle formler i $G^\bot$.
  - Basissteget har to tilfeller: $P(t_1, \ldots, t_n) \in G^\top$ og $P(t_1, \ldots, t_n) \in G^\bot$.
  - I induksjonssteget får vi ett hovedtilfelle for hvert konnektiv.
  - I hvert hovedtilfelle må vi se på om formelen forekommer i $G^\top$ eller $G^\bot$.
- Det følger at $\mathcal{M}$ falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$, siden $\Gamma \subseteq G^\top$ og $\Delta \subseteq G^\bot$.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon III

- I argumentet for at $\mathcal{M}$ oppfyller alle formler i $G^\top$ og falsifiserer alle formler i $G^\bot$ gjør vi strukturell induksjon på formlene i G.
- Basissteget følger pr. definisjon av Herbrand-modellen $\mathcal{M}$.
- I induksjonssteget antar vi at en formel φ forekommer på den åpne grenen G og benytter oss av at grenseutledningen er konstruert med en rettferdig strategi:
  - For α-, β- og δ-formler bruker vi at φ er hovedformel i en slutning på G, og at de umiddelbare delformlene til φ derfor må være i G.
  - For γ-formler bruker vi at den umiddelbare delformelen til φ er instansiert med alle termer i Herbrand-universet til G.
- Siden delformlene er av enklere struktur enn φ, kan vi anta at påstanden holder for disse, og bruke semantikken til å slutte at påstanden holder for φ.

Modelleksistens for fri-variabel LK

- I beviset for modelleksistens for fri-variabel LK skal vi
  - bruke en *rettferdig strategi* til å konstruere en grenseutledning med en åpen gren for en ikke-bevisbar sekvent, og
  - anvende en *grunn* substitusjon på alle formlene i den åpne grenen slik at alle frie variable blir instansiert med grunne termer.
- Vi kan så konstruere en Herbrand-modell fra den *grunnede* åpne grenen på samme måte som for grunn LK, og bruke det samme induksjonsargumentet.
- I fri-variabel LK introduserer γ-reglene imidlertid *frie variable* istedenfor termer, så vi trenger en ny definisjon av *rettferdig strategi*.
- Vi må også velge den grunnende substitusjonen slik at den grunnede åpne grenen får samme egenskaper m.h.p. γ-formler som i grenseutledningen i grunn LK.

Rettferdig strategi for fri-variabel LK

- En rettferdig strategi vil før eller senere anvende en regel på enhver ikke-atomær formel i en løvsekvent i utledningen.
- Siden hovedformelen i en γ-slutning kopieres, vil vi (hvis vi fortsetter å anvende regler i det uendelige) måtte introdusere uendelig mange frie variable for hver γ-formel på en gren.

Definisjon 1.1 (Rettferdig strategi)**.** *En strategi er* rettferdig *hvis enhver grenseutledning som fås ved å følge strategien har følgende egenskaper:*

1. *Hvis φ er en α-, β- eller δ-formel i en gren, så er φ hovedformel i en slutning i grenen.*
2. *Hvis φ er en γ-formel på formen $\mathsf{Q}x\psi$ i en gren, så er $\psi[u/x]$ aktiv formel i en slutning i grenen, for uendelig mange variable u.*

Rettferdig substitusjon

- Grenseutledningen til høyre er generert med en rettferdig strategi.
- Formelen $\forall x Px$ introduserer uendelig mange frie variable u_i.
- La substitusjonen σ være slik at $\sigma(u_i) = a$ for alle u_i.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\vdots}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2, Pu_3 \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2 \vdash Qfa}}{\cfrac{\forall x Px, Pu_1 \vdash Qfa}{\forall x Px \vdash Qfa}}$$

- Utledningen har kun én gren, kall den G. Hvis vi anvender σ på formlene i G, så vil alle Pu_i-formlene bli til Pa.
- Vi ser at Herbrand-universet til $\mathrm{G}\sigma$ er $a, fa, ffa, fffa, \ldots$ Det finnes nå termer t i Herbrand-universet slik at Pt *ikke* er i $\mathrm{G}\sigma$, f.eks. $t = fa$.
- Herbrand-modellen generert fra $\mathrm{G}\sigma$ vil derfor *ikke* gjøre $\forall x Px$ sann.

Rettferdig substitusjon II

- La substitusjonen τ være definert rekursivt slik at
  - $\tau(u_1) = a$, og
  - $\tau(u_{i+1}) = f\tau(u_i)$.
- Vi anvender τ på formlene i grenen G.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\vdots}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2, Pu_3 \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2 \vdash Qfa}}{\cfrac{\forall x Px, Pu_1 \vdash Qfa}{\forall x Px \vdash Qfa}}$$

- Vi har nå at $Pt \in \mathrm{G}\tau$ for alle termer t i Herbrand-universet til $\mathrm{G}\tau$.
- Derfor vil Herbrand-modellen generert fra $\mathrm{G}\tau$ oppfylle $\forall x Px$.
- Vi kaller τ en *rettferdig substitusjon*.

Rettferdig substitusjon III

Definisjon 1.2 (Rettferdig substitusjon)**.** *La π være en grenseutledning generert med en rettferdig strategi, og la* G *være en gren i* π*. La* σ *være en substitusjon.*

- σ *er* rettferdig m.h.p. en γ-formel $\mathsf{Q}x\varphi$ *i* G *hvis for alle termer* t *i Herbrand-universet til* G *så finnes en formel* $\varphi[u/x]$ *aktiv i en* γ*-slutning i* G *slik at* $\sigma(u) = t$*.*
- σ *er* rettferdig m.h.p. grenen G *hvis* σ *er rettferdig m.h.p. alle* γ*-formlene i* G*.*
- σ *er* rettferdig m.h.p. utledningen π *hvis* σ *er rettferdig m.h.p. hver gren i* π*.*

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

- Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ *ikke* er bevisbar i fri-variabel LK.
  - Det betyr at for alle utledninger med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, så finnes *ingen* substitusjon som lukker utledningen.
- Vi bruker en *rettferdig strategi* til å lage en *grenseutledning* med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.
- Vi velger en substitusjon σ som er *rettferdig* m.h.p. grenseutledningen og som instansierer alle frie variable i utledningen med grunne termer.
- Siden σ ikke lukker grenseutledningen, så vil det finnes en gren G i grenseutledningen som ikke er lukket av σ (ved Königs lemma).
- Vi anvender σ på alle formlene i G. Merk at $\mathsf{G}\sigma$ kun inneholder *lukkede* formler. Vi kan derfor gjøre resten av beviset på samme måte som for grunn LK.
- Merk at $\Gamma \vdash \Delta$ er *lukket*. Herbrand-modellen generert fra $\mathsf{G}\sigma$ vil derfor falsifisere $\Gamma \vdash \Delta$ uavhengig av variabeltilordning.

2 Repetisjon: sunnhet av fri-variabel LK

Sunnhet

Vi viste forrige gang at sekventkalkylen fri-variabel LK er *sunn*.

Teorem 2.1 (Sunnhet)**.** *Hvis en sekvent er bevisbar i fri-variabel* LK*, så er den gyldig.*

Sentralt i beviset står argumentet for at det å anvende en LK-regel på en falsifiserbar utledning gir en falsifiserbar utledning.

Lemma 2.1. *Enhver utledning med falsifiserbar rotsekvent er falsifiserbar.*

Vi skal ta en kort repetisjon av sunnhetsargumentet.

Falsifiserbarhet

- I sunnhetsbeviset for *grunn* LK viste vi at alle reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
- I fri-variabel LK utvidet vi semantikken med variabeltilordninger for å tolke formler med frie variable.
- Vi måtte også innføre et nytt falsifiseringsbegrep for sekventer med frie variable.
- β-reglene i fri-variabel LK bevarer *ikke* falsifiserbarhet oppover.
- Vi innførte derfor falsifiserbarhet for *utledninger*.
- En modell *falsifiserer* en utledning hvis ethvert valg av variabeltilordning for modellen gir en falsifisert gren.

β-regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \lor Qu \vdash Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- Vi har to aktuelle variabeltilordninger for $\mathcal{M}$: $\mu_1(u) = a$ og $\mu_2(u) = b$.
- $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen:
  - $\mathcal{M}$ falsifiserer begge formlene i succedenten.
  - $\mathcal{M}, \mu_1 \models Qu$ og $\mathcal{M}, \mu_2 \models Pu$, så $\mathcal{M}$ gjør formelen i antecedenten sann uavhengig av variabeltilordning.
- Premissene er *ikke* falsifiserbare. (Prøv!)
- Konklusjonen er falsifiserbar, mens premissene *ikke* er det!

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet

- Beviset for falsifiserbarhetslemmaet går ved strukturell induksjon på utledninger.
- I induksjonssteget
  - antar vi at en utledning π er falsifiserbar, og
  - viser at utledningen vi får når vi utvider π med en fri-variabel LK-regel også er falsifiserbar.
- Vi får ett tilfelle for hver LK-regel.
- Antagelsen om at π er falsifiserbar gir oss en falsifiserende modell $\mathcal{M}$.
- For α-, β- og γ-reglene kan vi vise at $\mathcal{M}$ også falsifiserer den utvidete utledningen.
- Det holder ikke for δ-reglene. Her konstruerer vi en ny modell (basert på $\mathcal{M}$) som falsifiserer den utvidete utledningen.

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet – δ-regelen

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(u_1, \ldots, u_n)/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} \text{L}\exists$$

- Hvis vi utvider med en δ-slutning, så vil den nye løvsekventen inneholder Skolemtermen $f(u_1, \ldots, u_n)$.
- Vi lager en ny modell $\mathcal{M}'$ som er lik $\mathcal{M}$ bortsett fra tolkningen av f.
- For hver variabeltilordning μ for $\mathcal{M}'$ spesifiserer vi $\mathcal{M}', \mu$ sin tolkning av den introduserte Skolemtermen slik at $\mathcal{M}', \mu$ gjør $\varphi[f(u_1, \ldots, u_n)/x]$ sann dersom $\mathcal{M}, \mu$ gjør $\exists x \varphi$ sann.
- Siden f ikke forekommer i π *og* $\mathcal{M}$ er lik $\mathcal{M}'$ utenom f, så er π falsifisert av $\mathcal{M}'$.
- Ved å bruke de semantiske definisjonene, viser vi så at $\mathcal{M}'$ falsifiserer den utvidete utledningen.

Teorem 2.2 (Sunnhet)**.** *Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ er bevisbar i fri-variabel* LK*, så er $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig.*

Bevis.
- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ *ikke* er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma finnes en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π.
- La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ.
- Da finnes en gren G i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.
- Siden σ lukker løvsekventen på G, så finnes atomære formler $\varphi \in \mathsf{G}^\top$ og $\psi \in \mathsf{G}^\perp$ slik at $\varphi\sigma = \psi\sigma$.
- Siden G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \not\models \psi$.
- Fra Lemma har vi $\mathcal{M} \models \varphi\sigma$ og $\mathcal{M} \not\models \psi\sigma$. Men $\varphi\sigma = \psi\sigma$, motsigelse.

□