

INF3170 – Logikk

Ukeoppgaver – oppgavesett 2

Utsagnslogikk

Oppgave 1 Finn for hver av formlene nedenfor én valuasjon som falsifiserer formelen og én valuasjon som oppfyller den.

- P
- $\neg P$
- $P \wedge Q$
- $P \vee Q$
- $P \rightarrow Q$
- $((P \rightarrow Q) \vee (R \vee P)) \wedge \neg Q$

Oppgave 2 Sett opp en sannhetsverditabell som viser at

- $P \rightarrow Q$ er sann hvis og bare hvis $\neg P \vee Q$ er sann.
- $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$ er en tautologi.

Oppgave 3 La S være en delmengde av utsagnsvariablene, og la v_1 og v_2 være boolske valuasjoner slik at $v_1(P) = v_2(P)$ for alle $P \in S$. Vis ved strukturell induksjon på \mathcal{F}_U at $v_1(A) = v_2(A)$ for alle utsagnslogiske formler A som bare inneholder utsagnsvariable fra S .

Oppgave 4 La v_1 og v_2 være boolske valuasjoner slik at hvis $v_1(P) = \mathbf{1}$, så er $v_2(P) = \mathbf{1}$ for alle utsagnsvariable P .

- Vis at hvis A er en utsagnslogisk formel som *ikke* inneholder noen andre konnektiver enn \wedge og \vee , og $v_1(A) = \mathbf{1}$, så er $v_2(A) = \mathbf{1}$.
- Holder det at hvis A ikke inneholder andre konnektiver enn \wedge og \vee , og $v_2(A) = \mathbf{1}$, så er $v_1(A) = \mathbf{1}$? Begrunn svaret ditt.

Merk i de påfølgende oppgaver at Gallier bruker litt andre symboler og begreper enn i kurset. Ekvivalens skrives '≡': $A \equiv B$ er sann hvis og bare hvis $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ er sann. Konstanten \perp falsifiseres av alle valuasjoner. Konstanten \top oppfylles av alle valuasjoner. Gallier skriver "proposition" om utsagnslogisk formel, "propositional letter" om utsagnsvariabel og ' \rightarrow ' som ' \supset '.

Oppgave 5 Gjør oppgave 3.3.1 på side 54/55 i Gallier.

Merk at hvis Γ^1 er en mengde utsagnslogiske formler og A er en utsagnslogisk formel, så holder $\Gamma \models A$ hvis alle valuasjoner som oppfyller alle formlene i Γ også oppfyller A .

Oppgave 6 Gjør oppgave 3.3.11 på side 57 i Gallier.

Oppgave 7 Gjør oppgave 3.3.12 b) på side 57 i Gallier.

Oppgave 8 La A og B være utsagnslogiske formler. Se på følgende påstander:

- (1) A er sann hvis og bare hvis B er sann.
- (2) A er en tautologi hvis og bare hvis B er en tautologi.

Lag et bevis eller finn et moteksempel til hver av påstandene nedenfor.

- a. Påstand (1) følger fra påstand (2).
- b. Påstand (2) følger fra påstand (1).

Hvis F er en utsagnslogisk formel og P en utsagnsvariabel, så betyr notasjonen $F(P)$ at eventuelle forekomster av P i F har en spesiell betydning. Hvis vi senere skriver $F(A)$ der A er en utsagnslogisk formel, så betegner $F(A)$ formelen F der alle forekomster av P er erstattet med A . Merk at P ikke trenger å forekomme i $F(P)$. Hvis $F(Q) = P \wedge Q$ så blir $F(\neg R) = P \wedge \neg R$. Hvis $F(Q) = P \wedge \neg P$ så er $F(\neg R) = P \wedge \neg P$.

Oppgave 9 La $F(P)$, A og B være utsagnslogiske formler.

- a. Vis at hvis A er ekvivalent med B , så er $F(A)$ ekvivalent med $F(B)$. *Hint: Vis ved induksjon på $F(P)$ at $v(A) = v(B)$ impliserer $v(F(A)) = v(F(B))$ for alle utsagnslogiske formler A , B og alle boolske valuasjoner v .*
- b. Anta nå at $A \rightarrow B$ er en tautologi. Ta stilling til om $F(A) \rightarrow F(B)$ er en tautologi. Finn et bevis eller et moteksempel. *Hint: $P \rightarrow R$ impliserer ikke $(P \vee Q) \rightarrow R$.*

¹Uttales "gamma".