INF3170 – Logikk

Ukeoppgaver – oppgavesett 4

Sekventkalkyle

Oppgave 1 Lag en regel slik at LK blir usunn når denne regelen legges til.

Oppgave 2 (Induktiv definisjon av utledninger)

- Vi har definert mengden av LK-utledninger (for utsagnslogikk) induktivt ved å begynne med rotsekventer og anvende reglene "nedenfra og opp". Dette svarer til en *analytisk* måte å tenke på. (Ordet *analyse* betyr å dele opp/ta fra hverandre.)
- En annen måte å definere mengden av utledninger på, er å starte med løvsekventer og anvende reglene "ovenfra og ned". Dette svarer til en *syntetisk* måte å tenke på. (Ordet *syntetisk* betyr å sette sammen.)

1. Gi en induktiv definisjon av mengden av utledninger som svarer til den syntetiske måten å tenke på.
2. Forklar hvordan vi kan definere mengden av *bevis* induktivt på denne måten.
3. Gjør greie for hvordan sunnhetsbeviset går med denne definisjonen av utledninger.

Førsteordens logikk

Oppgave 3 (Rekursive definisjoner)

1. Skriv ut hele den rekursive definisjonen av mengden av frie variable i en formel.
2. Definer rekursivt mengden $\mathsf{BV}(\varphi)$ av *bundne* variable i en formel φ.
3. Skriv ut hele den rekursive definisjonen av tolkningen av en lukket term.

Oppgave 4 (Førsteordens formler)

Finn førsteordens formler i språket $\langle -; -; \mathsf{Lat}, \mathsf{IfiStud}, \mathsf{Problemer} \rangle$ for følgende setninger.

1. Alle Ifi-studenter er late.
2. Ingen Ifi-studenter er late.

3. Noen Ifi-studenter er late.
4. Alle Ifi-studenter som er late, får problemer på eksamen.
5. Noen Ifi-studenter som er late, får ingen problemer på eksamen.

Finn førsteordens formler i språket $\langle \mathsf{Ola}, \mathsf{Kari}; -; \mathsf{Mor}, \mathsf{Far} \rangle$ for følgende setninger.

1. Ola er far til Kari
2. Kari er mor til noen
3. Ola har ingen mor
4. Alle har en mor og en far
5. Alle har en mormor
6. Ingen er både mor og far

Oppgave 5 (Induksjon) Vi har definert strukturell induksjon for $\mathcal{F}_u$, mengden av utsagnslogiske formler. Forklar hvordan strukturell induksjon blir for $\mathcal{T}$, mengden av termer, og for $\mathcal{F}$, mengden av førsteordens formler (for et gitt språk $\mathcal{L}$).

1. La φ være en førsteordens formel, a og b to konstanter og x og y to forskjellige variable. Vis at $\varphi[a/x][b/y] = \varphi[b/y][a/x]$. (Oppgave 5.2.3 fra Gallier.)
2. Vis at for enhver formel φ og enhver konstant c, så $\mathsf{FV}(\varphi[c/x]) = \mathsf{FV}(\varphi) \setminus \{x\}$. (Oppgave 5.2.4 fra Gallier.)
3. Vis at for enhver formel φ og term t, hvis y ikke er i $FV(\varphi)$, så $\varphi[t/y] = \varphi$. (Oppgave 5.2.5 fra Gallier.)

Oppgave 6 (Gyldighet/oppfyllbarhet)

Vis at følgende formler er oppfyllbare. (Spesifiser en modell for hver formel - i det underliggende språket - som oppfyller denne formelen.)

- $\exists x \mathsf{Liten}(x)$
- $\exists x(\mathsf{Liten}(x) \land \mathsf{Stor}(x))$
- $\exists x Px \to \forall x Px$

Vis at følgende formler ikke er oppfyllbare. (Hint: Anta at formelen *er* oppfyllbar.)

- $Pa \land \neg Pa$
- $\exists x(\mathsf{Liten}(x) \land \neg \mathsf{Liten}(x))$
- $\neg \mathsf{Stor}(a) \land \forall x \mathsf{Stor}(x)$

Vis at følgende formler er gyldige. (Hint: Velg en vilkårlig modell.)

- $\forall x Pxa \rightarrow \forall z Pza$
- $(\forall x Px \wedge \forall y Qy) \rightarrow \forall x Px$
- $\exists x \mathsf{Liten}(x) \vee \exists x \neg \mathsf{Liten}(x)$

Vis at følgende formler er falsifiserbare. (Spesifiser en modell for hver formel - i det underliggende språket - som falsifiserer denne formelen.)

- $\forall x Px$
- $\exists x \mathsf{Stor}(x) \rightarrow \forall x \mathsf{Stor}(x)$
- $\exists x Px \rightarrow \exists x (Px \wedge Qx)$

Andre oppgaver

Oppgave 7 (Konger, damer og tigre) En konge gir sin fange valget mellom to rom. I hvert rom er det enten en dame eller en tiger, men ikke begge deler. På utsiden av dørene står det følgende:

(1)	(2)
I MINST ETT AV DISSE ROMMENE ER DET EN DAME	I DET ANDRE ROMMET ER DET EN TIGER

Kongen sier så: "Enten så er begge påstandene sanne, eller så er begge usanne!"

Hvilken dør bør fangen velge?

(Oppgaven er hentet fra *The lady or the tiger?*, Raymond Smullyan, 1982)

Oppgave 8 (Tre søsken) Tre søsken, A, B og C, er i et hus, og må rette seg etter følgende regler:

i) Hvis A går ut, så må B gå ut.

ii) Hvis C går ut, så, hvis A går ut, så må B være inne.

(1) Formaliser påstandene ved hjelp av utsagnslogikk.

(2) Sjekk om det er mulig at C kan gå ut. Begrunn svaret.

(3) Gitt et språk med bare tre atomære utsagn; hvor mange ikke-ekvivalente utsagn kan du lage fra disse? Begrunn svaret skikkelig eller lag en liste over alle mulige slike utsagn.

(4) Hva er det mulig for A, B og C å gjøre?

Oppgave 9 (Konger, damer og tigre II) På utsiden av dørene står det nå følgende:

(1)
ENTEN ER DET EN TIGER I DETTE ROMMET ELLER SÅ ER DET EN DAME I DET ANDRE ROMMET

(2)
I DET ANDRE ROMMET ER DET EN DAME

Kongen sier igjen: "Enten så er begge påstandene sanne, eller så er begge usanne!"

Inneholder det første rommet en dame eller en tiger? Hva med det andre rommet?

(Oppgaven er hentet fra *The lady or the tiger?*, Raymond Smullyan, 1982)