INF3170 – Logikk

Obligatorisk oppgave 1 – vår 2007

Oppgave 1 Sjekk om det finnes bevis for følgede sekventer. Gi beviset for sekventen eller konstruer en motmodell.

a. $\vdash (P \to (Q \to R)) \to ((P \land Q) \to R)$

b. $P \lor Q, P \to R, Q \to S \vdash R \land S$

c. $\vdash (P \lor Q) \to ((\neg P \land Q) \lor (P \land \neg Q))$

d. $\vdash (P \to R) \to ((Q \to R) \to ((P \lor Q) \to R))$

e. Hvilket teorem bruker vi for å konkludere fra at det fins en motmodell til at det ikke fins noe bevis?

Oppgave 2 Vis at en utsagnslogisk formel A er en motsigelse hvis og bare hvis sekventen $A \vdash$ er gyldig.

Oppgave 3 Vis at $\neg A \Leftrightarrow A \to \bot$. (Dvs.: $\neg A$ er sann hvis og bare hvis $A \to \bot$ er sann.) Argumenter semantisk. $\bot$ er et symbol som falsifiseres av alle boolske valuasjoner.

Oppgave 4 Vi sier at en sekventkalkyleregel er *falsifikasjonsbevarende* (oppover) hvis minst ett av premissene er falsifiserbare hver gang konklusjonen er falsifiserbar. Tilsvarende sier vi at en sekventkalkyleregel er *gyldighetsbevarende* (nedover) hvis konklusjonen er gyldig hver gang begge premissene er gyldige. Se på L$\to$-regelen:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\, \mathsf{L}\!\to$$

a. Vis at L$\to$ er gyldighetsbevarende.

b. Vis at falsifikasjonsbevarende og gyldighetsbevarende er ekvivalente egenskaper, dvs. at en regel er falsifikasjonsbevarende hvis og bare hvis den er gyldighetsbevarende.

Oppgave 5 Vi sier at en mengde utsagnslogiske formler er *oppfyllbar* hvis det finnes en boolsk valuasjon som oppfyller alle formlene i mengden. En *motmodell* til en mengde utsagnslogiske formler er en boolsk valuasjon som falsifiserer alle formlene i mengden. Vi definerer $\Delta^{\perp} = \{\neg\varphi \mid \varphi \in \Delta\}$. Vis at:

a. $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig hvis og bare hvis $\Gamma \cup \Delta^{\perp}$ ikke er oppfyllbar.

b. $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig hvis og bare hvis $\Gamma^{\perp} \cup \Delta$ ikke har en motmodell.

Oppgave 6 Vi skal starte denne oppgaven med å definere noen rekursive funksjoner på utsagnslogiske formler. I det følgende, la A være en utsagnslogisk formel og $\circ \in \{\land, \lor, \to\}$. Vi definerer *rangen* til A, $r(A)$, på følgende måte:

$$\begin{cases} r(A) & = 0,\ \text{hvis } A \text{ er atomær} \\ r((A \circ B)) & = max(r(A), r(B)) + 1 \\ r(\neg A) & = r(A) + 1 \end{cases}$$

Funksjonen $max : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ returnerer det største av to naturlige tall og er definert som følger:

$$max(m,n) = \begin{cases} m, & \text{hvis } m \geq n \\ n, & \text{hvis } m < n \end{cases}$$

Eksempel: $r(P \to \neg Q) = 2$, $r(\neg(\neg P \vee Q)) = 3$ og $r(((P \to Q) \vee P) \to \neg R) = 3$. Videre definerer vi antall *forekomster av logiske konnektiver* i A, $k(A)$, på følgende måte:

$$\begin{cases} k(A) & = 0, \text{ hvis } A \text{ er atomær} \\ k((A \circ B)) & = k(A) + k(B) + 1 \\ k(\neg A) & = k(A) + 1 \end{cases}$$

Eksempel: $k(P \to \neg Q) = 2$, $k(\neg(\neg P \vee Q)) = 3$ og $k(((P \to Q) \vee P) \to \neg R) = 4$. Til slutt definerer vi *mengden av delformler* av A, $Sub(A)$, som følger:

$$\begin{cases} Sub(A) & = \{A\}, \text{ hvis } A \text{ er atomær} \\ Sub((A \circ B)) & = Sub(A) \cup Sub(B) \cup \{(A \circ B)\} \\ Sub(\neg A) & = Sub(A) \cup \{\neg A\} \end{cases}$$

Vi sier at A er en *ekte* delformel av B hvis $A \neq B$ og $A \in Sub(B)$. Eksempel: $Sub(P \to \neg Q) = \{P, Q, \neg Q, P \to \neg Q\}$ og de *ekte* delformlene til $P \to \neg Q$ er P, Q og $\neg Q$.

a. Finn en utsagnslogisk formel A slik at $r(A) < k(A)$.

b. Finn en utsagnslogisk formel A slik at $r(A) = k(A)$.

c. Vis at $r(A) \leq k(A)$ for alle utsagnslogiske formler A. (*Hint:* Strukturell induksjon på A.)

d. Vis at hvis A er en ekte delformel av B, så er $r(A) < r(B)$. (*Hint:* Strukturell induksjon på B.)