INF3170 – Logikk

Obligatorisk oppgave 3 – vår 2007

Skolemisering

Vi skal i denne oppgaven kikke på en kjent teknikk for å relatere en formel φ i førsteordens logikk til en formel φ' på preneks normalform hvor alle kvantorene er $\forall$-kvantorer.

Oppgave 1 La $\exists x\psi$ være en lukket førsteordens formel. Utvid språket med en konstant c og se på formelen $\psi[c/x]$. Vis at

$$\exists x\psi \text{ er oppfyllbar} \qquad \Leftrightarrow \qquad \psi[c/x] \text{ er oppfyllbar.}$$

Oppgave 2 La $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y\psi$ være en lukket førsteordens formel. Utvid språket med et funksjonssymbol f med aritet n og se på formelen $\forall x_1 \ldots \forall x_n \psi[f(x_1, \ldots, x_n)/y]$. Vis at

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y\psi \text{ er oppfyllbar} \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x_1 \ldots \forall x_n \psi[f(x_1, \ldots, x_n)/y] \text{ er oppfyllbar.}$$

Det å fjerne alle $\exists$-kvantorene og sette inn funksjonssymboler kalles *skolemisering*. Funksjonssymbolene som settes inn kalles *Skolemfunksjoner*.

Definisjon 0.1 (Skolem normalform – SNF)**.** *En formel er på* Skolem normalform *(SNF) hvis den er på preneks normalform (definert i ukeoppgavene, sett 6) med bare $\forall$-kvantorer, dvs. på formen $\forall x_1 \ldots \forall x_n \psi$ hvor ψ er en åpen (kvantorfri) formel.*

Skolemfunksjonene brukes for å eliminere $\exists$-kvantorer og få en formel på Skolem normalform som er oppfyllbar hvis og bare hvis formelen vi begynte med var oppfyllbar. (Sammenlikn dette med hva som skjer når man anvender R$\exists$-regelen i LK: I premisset har vi en egenparameter som ikke forekommer i konklusjonen, og hvis konklusjonen er falsifiserbar, så må premisset være det. Vi kan se på egenparameteren som et *vitne* for at den aktuelle formelen er falsifiserbar. Skolemfunksjonene fungerer som vitne-funksjoner for falsifiserbarhet.)

Oppgave 3 Vis at for enhver lukket førsteordens formel φ så fins det en formel φ' på Skolem normalform som er oppfyllbar hvis og bare hvis φ er oppfyllbar.

Oppgave 4 Finn Skolem normalform for følgende formler:

1. $\forall x \exists y Pxy$
2. $\forall x \exists y \forall z \exists w Pxyzw$
3. $\forall x(Px \to \forall x Px)$
4. $\exists x(Px \to \forall x Px)$
5. $\forall x(Px \to \exists x Px)$
6. $\forall x \exists y Pxy \to \forall x \exists y Pxy$

Likhet

I denne oppgaven skal vi se på førsteordens språk med likhet og utvide LK med regler for formler med likhet.

Definisjon 0.2. *La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk. Vi utvider de* atomære *formlene i $\mathcal{L}$ på følgende måte.*

- *Hvis s og t er termer, så er $s \doteq t$ en atomær formel.*

Vi krever nå at alle modeller for $\mathcal{L}$ tolker $\doteq$ som den ordinære likhetsrelasjonen, dvs. $a \doteq^{\mathcal{M}} a$ for alle $a \in |\mathcal{M}|$. Vi bruker notasjonen $s \not\doteq t$ for formelen $\neg(s \doteq t)$.

Eksempel. *Vi kan nå uttrykke følgende på en naturlig måte:*

- *"det fins minst to elementer": $\exists x \exists y (x \not\doteq y)$*
- *"funksjonene f og g er like": $\forall x (fx = gx)$*

Oppgave 5 Finn førsteordens formler som uttrykker:

1. Det fins minst tre elementer.
2. Det fins nøyaktig tre elementer.

Vi utvider LK med følgende to regler.

$$\frac{\times}{\Gamma \vdash t \doteq t, \Delta} \qquad \frac{\Gamma', s \doteq t \vdash \Delta'}{\Gamma, s \doteq t \vdash \Delta}$$

der s og t er vilkårlige termer og der Γ' og Δ' fremkommer fra Γ og Δ ved å erstatte et vilkårlig antall forekomster av s med t. Det er nå altså lov å lukke en løvsekvent hvis $t \doteq t$ forekommer i succedenten.

Oppgave 6 Vis at den nye kalkylen er sunn.

Oppgave 7 Finn bevis for følgende sekventer:

1. $\vdash \forall x (x \doteq x)$
2. $\vdash \forall x \forall y (x \doteq y \to y \doteq x)$
3. $\vdash \forall x \forall y \forall z ((x \doteq y \land y \doteq z) \to x \doteq z)$
4. $\vdash \forall x \exists y (x \doteq y)$
5. $\vdash \exists x (x \doteq a \land \forall y (y \doteq a \to x \doteq y))$
6. $\exists x \forall y (x \doteq y) \vdash \forall x \forall y (x \doteq y)$

Oppgave 8 Angi en endelig mengde formler i predikatlogikk med likhet som ikke har noen endelig modell og som har minst en uendelig modell. (Hint: aksiomatiser en "mindre–enn"–relasjon.)