

# INF5490 RF MEMS

## **L10: RF MEMS resonatorer II**

V2008, Oddvar Søråsen  
Institutt for informatikk, UiO

# Dagens forelesning

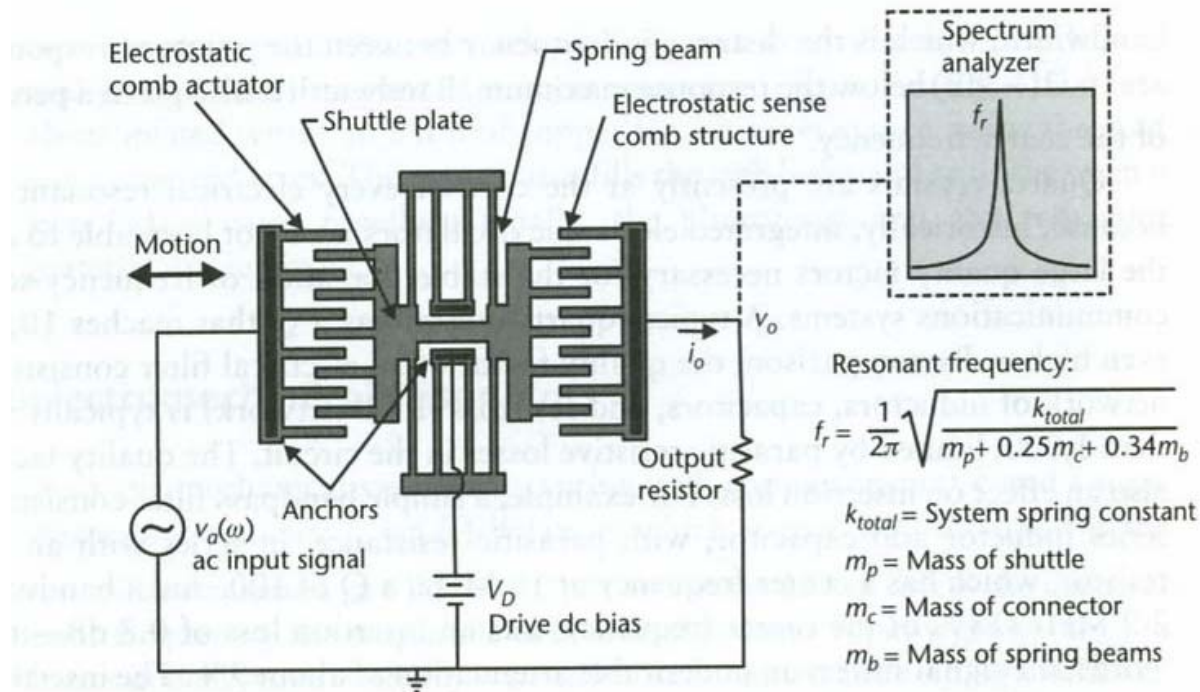
- Lateralt vibrerende resonator:  
**Kam-resonatoren**
  - **Virkemåte**
  - Detaljert **modellering**
    - A) "phasor"-modellering
    - B) modellering ved konvertering mellom mekanisk og elektrisk energidomene

# Lateral og vertikal bevegelse

- Lateral bevegelse i resonatoren
  - Parallelt med substratet
  - Foldet beam kam-struktur
- Vertikal bevegelse (neste forelesning)
  - Loddrett på substratet
  - Clamped-clamped beam (c-c beam)
    - Dobbeltinnspent bjelke
  - free-free beam (f-f beam)

# Kam-resonator

- Fast forankret kam + bevegelig, opphengt kam
- Opphengt ved foldede fjærer, kompakt utlegg
- Total-kapasitansen mellom kammene kan varieres
- Påtrykt spenning (+ eller -) genererer elektrostatisk kraft mellom venstre anker-kam og "shuttle"-kam. Plate trekkes til venstre i planet

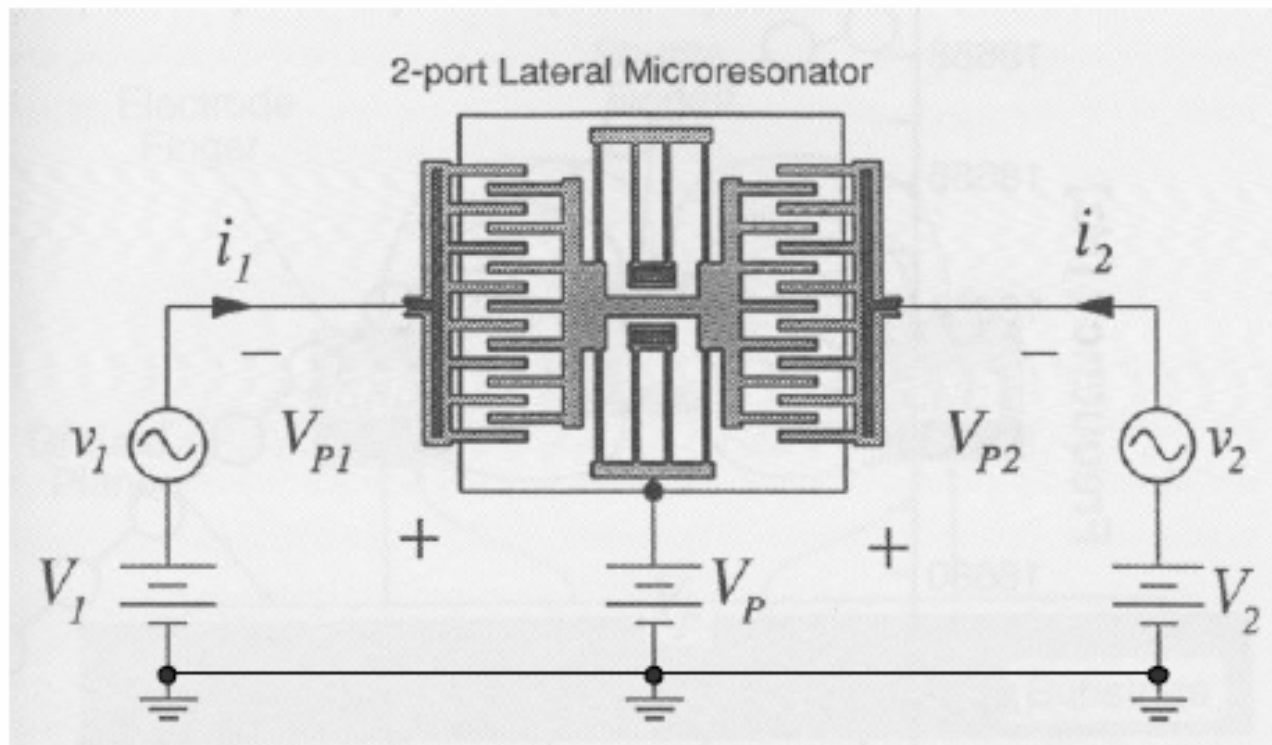


**Figure 7.9** Illustration of a micromachined folded-beam comb-drive resonator. The left comb drive actuates the device at a variable frequency  $\omega$ . The right capacitive-sense-comb structure measures the corresponding displacement by turning the varying capacitance into a current, which generates a voltage across the output resistor. There is a peak in displacement, current, and output voltage at the resonant frequency.

# Detaljert modellering

- Modellering av **lateral kam-struktur**
  - ”Phasor”-modellering ala [UoC, Berkeley](#)
    - Suplert med utfyllende mellomregninger
  - Konvertering mellom energidomener
    - Stoff fra [UCLA](#)
- I forelesning L11 modelleres **c-c beam** med referanse til boka
  - T. Itoh et al: RF Technologies for Low Power Wireless Communications”, kap. 12: ”Transceiver Front-End Architectures Using Vibrating Micromechanical Signal Processors”, by Clark T.-C. Nguyen

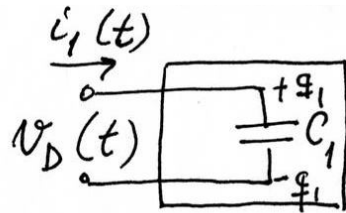
## The Lateral Resonator as a “Two-Port”



# Beregningsprosedyre

- **A.** Betrakt kammen som en to-port og undersøk først inngangsporten
- **B.** Når kammen beveger seg, vil inngangskapasitansen ha et fast + et variabelt ledd
- **C.** Finn inngangsstrømmen som funksjon av forskyvningen,  $X$ , ved bevegelse
- **D.** Beregn inngangs-admittansen,  $Y$  ("motional admittance")
  - **D1.**  $Y$  uttrykkes ved  $X$
  - **D2.**  $X$  er avhengig av den elektrostatiske kraften,  $F$ , samt  $m$ ,  $b$  og  $k$
  - **D3.**  $F$  er avhengig av påtrykt spenning,  $V$
- **E.** Sett inn og finn et uttrykk for  $Y$  (dynamisk oppførsel)
- **F.** Sammenlign med  $Y$  for en L-C-R-gren og finn ekvivalente elementer
- **G.** Sett opp ekvivalentkretsen for inngangsporten
- **H.** Finn utgangsstrømmen for den gitte inngangen
- **I.** Beregn forholdet mellom utgangs- og inngangs-strøm ("forward current gain")
- **J.** Sett opp en to-port ekvivalent-krets
- **K.** Sett opp en komplett to-port-modell

# A. Betrakt kammen som en to-port og undersøk først inngangsporten



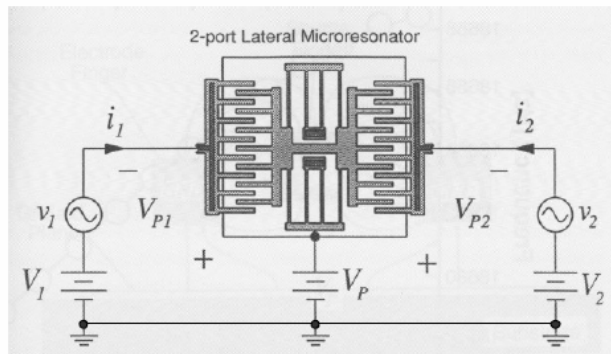
$$q_1 = C_1 v_D$$

$$\dot{q}_1(t) = i_1(t) = C_1 \frac{dv_D}{dt} + v_D \frac{dC_1}{dt}$$

$$v_D(t) = V_1 + v_1(t) - V_P = -V_{P1} + v_1 \cos \omega t$$

$$V_{P1} = V_P - V_1$$

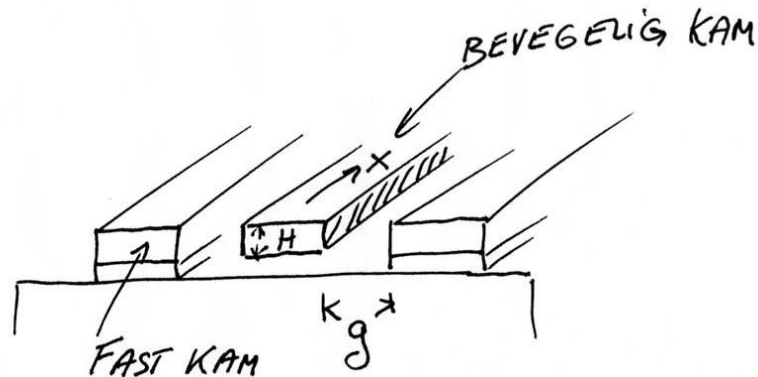
The Lateral Resonator as a “Two-Port”



$V_{P1}$  = positiv når  $V_P > V_1$



## B. Når kammen beveger seg, vil inngangskapasitansen ha et fast + et variabelt ledd



$$C_1(t) = C_{01} + C_{m1}(t)$$

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 A}{g} = \frac{\epsilon_0 \cdot x \cdot 2H \cdot n}{g}$$

$$C_1(t) = C_{01}(\text{fixed}) + C_{m1}(\text{prop. with } x(t))$$

$$C_1(t) = C_{01} + \frac{\partial C_1}{\partial x} \cdot x(t)$$

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots$$

← general formula

## C. Finn inngangsstrømmen som funksjon av forskyvningen, $X$ , ved bevegelse

$$i_1(t) = C_1 \frac{dv_D}{dt} + v_D \frac{dC_1}{dt}$$

$$= C_1 \frac{dv_1(t)}{dt} + (-V_{P1} + v_1(t)) \frac{\partial C_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \left[ C_{01} + \frac{\partial C_1}{\partial x} \cdot x(t) \right] \frac{dv_1(t)}{dt} + \dots$$

$$= C_{01} \frac{dv_1(t)}{dt} + \frac{\partial C_1}{\partial x} \cdot x(t) \cdot \frac{\partial v_1(t)}{\partial t} - V_{P1} \frac{\partial C_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + v_1(t) \frac{\partial C_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t}$$

$$= C_{01} \frac{dv_1(t)}{dt} + \underbrace{\frac{\partial C_1}{\partial x} \left( x \cdot \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial x}{\partial t} \right)}_{\frac{\partial}{\partial t} (x \cdot v_1)} - V_{P1} \frac{\partial C_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t}$$

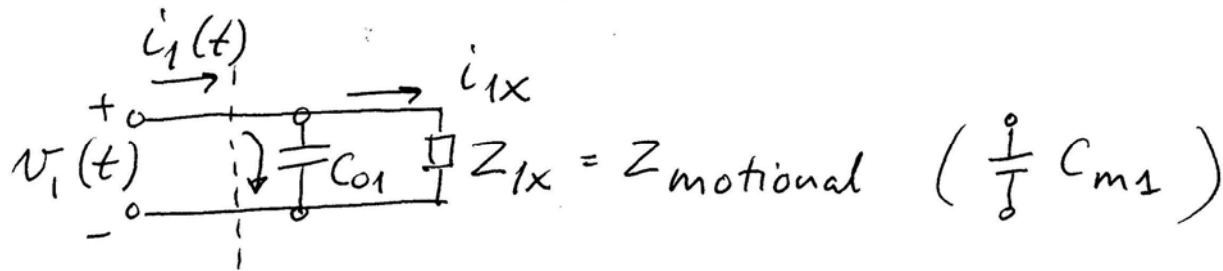
$$\frac{\partial}{\partial t} (x \cdot v_1), \text{ where } v_1 = v_0 \cos \omega t, \text{ } x = x_0 \cos \omega t$$

$$(x \cdot v_1) \cong \cos^2 \omega t = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega t)$$

↑  
doble frekvensen, lite ledd utenfor  $\omega$ -resonansen

$$i_1(t) \approx C_{01} \frac{\partial v_1(t)}{\partial t} - V_{P1} \frac{\partial C_1}{\partial x} \frac{\partial x(t)}{\partial t}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$  strøm inn i DC-kapasitansen       $\underbrace{\hspace{10em}}$  "motional current"



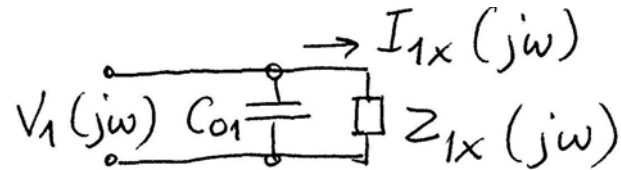
$$i_{1x}(t) = -V_{P1} \frac{\partial C_1}{\partial x} \frac{\partial x(t)}{\partial t} = \left( -V_{P1} \frac{\partial C_1}{\partial t} \right) \quad \text{"motional current"}$$

$$I_{1x}(j\omega) = -V_{P1} \frac{\partial C_1}{\partial x} \cdot j\omega \cdot X(j\omega) \quad \text{phasor-form av "motional current"}$$

**= strøm som funksjon av bevegelse ("forskyvning")**

## D. Beregn inngangs-admittansen, Y ("motional admittance")

- D1. Y uttrykkes ved X



$$Y_{1x}(j\omega) = \frac{I_{1x}(j\omega)}{V_1(j\omega)} = -V_{P1} \frac{\partial C_1}{\partial x} \cdot j\omega \cdot \frac{X(j\omega)}{V_1(j\omega)}$$

← forskyvning ("displacement")  
← spenning

- D2. X er avhengig av den elektrostatiske kraften, F, samt m, b og k

$$Y_{1x}(j\omega) = -V_{P1} \frac{\partial C_1}{\partial x} \cdot j\omega \cdot \frac{X(j\omega)}{F_d(j\omega)} \cdot \frac{F_d(j\omega)}{V_1(j\omega)}$$

$F_d$  er avhengig av m, b og k

spenning  $V_1$  forårsaker en elektrostatiske kraft  $F_d$

### D3. F er avhengig av påtrykt spenning, V

Forholdet mellom kraft og spenning finnes av:

$$U = \frac{1}{2} C_1 v_D^2(t) \quad \text{Potensiell energi, } v_D \text{ uavhengig av } x$$

$$F = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{2} v_D^2(t) \cdot \frac{\partial C_1}{\partial x} \quad \text{Ikke-lineært forhold}$$

$$F = F_0 + f \cos \omega t, \quad v_D = -V_{P1} + v_1 \cos \omega t \quad \text{Linearisering rundt DC-punktet}$$

$$F_0 + f \cos \omega t = \frac{1}{2} (-V_{P1} + v_1 \cos \omega t)^2 \cdot \frac{\partial C_1}{\partial x} \quad \text{Innsetting}$$

$$= \frac{1}{2} (V_{P1}^2 - 2 \cdot V_{P1} \cdot v_1 \cos \omega t + v_1^2 \cos^2 \omega t) \cdot \frac{\partial C_1}{\partial x}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\cos 2\omega t - \text{term}}$

$$f \cos \omega t = -V_{P1} \cdot v_1 \cos \omega t \cdot \frac{\partial C_1}{\partial x} \quad \text{Sammenligne AC-leddene}$$

$$f_{d,\omega} = -V_{P1} \frac{\partial C_1}{\partial x} v_1(t) \quad \leftarrow \text{LINEÆRT FORHOLD!}$$

$$F_d(j\omega) = -V_{P1} \frac{\partial C_1}{\partial x} \cdot V_1(j\omega) \quad \text{I phasor-form}$$

$$\frac{F_d(j\omega)}{V_1(j\omega)} = -V_{P1} \frac{\partial C_1}{\partial x}$$

Forholdet mellom forskyvning og kraft:

$$\frac{X(s)}{F_d(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} = \frac{1}{k} \frac{k/m}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}}$$

**D2.** X er avhengig av den elektrostatiske kraften, F, samt m, b og k

$$\omega_0^2 = k/m, \quad b/m = \omega_0/Q$$

Disse verdiene settes inn

$$Q = \frac{\sqrt{k/m}}{b/m} = \frac{\sqrt{km}}{b}$$

$$\frac{X(s)}{F_d(s)} = \frac{1}{k} \cdot \frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \xrightarrow{s=j\omega} \frac{1}{k} \cdot \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\frac{\omega_0\omega}{Q}}$$

$$\frac{X(j\omega)}{F_d(j\omega)} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\left[1 - (\omega/\omega_0)^2\right] + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

## E. Sett inn og finn et uttrykk for Y (dynamisk oppførsel)

$$\begin{aligned} Y_{1x}(j\omega) &= -V_{P1} \frac{\partial C_1}{\partial x} \cdot j\omega \cdot \frac{X(j\omega)}{F_d(j\omega)} \cdot \frac{F_d(j\omega)}{V_1(j\omega)} \\ &= -V_{P1} \frac{\partial C_1}{\partial x} \cdot j\omega \cdot \frac{1/k}{\left[1 - (\omega/\omega_0)^2\right] + j \frac{\omega}{\omega_0 Q}} \cdot \left(-V_{P1} \frac{\partial C_1}{\partial x}\right) \end{aligned}$$

$$\eta = V_{P1} \frac{\partial C_1}{\partial x}$$

←  $\eta$  innføres

$$Y_{1x}(j\omega) = \eta^2 \cdot j\omega \cdot \frac{1/k}{\left[1 - (\omega/\omega_0)^2\right] + j \frac{\omega}{\omega_0 Q}}$$

$$I_{1x}(j\omega) = [\dots] \cdot V_1(j\omega)$$

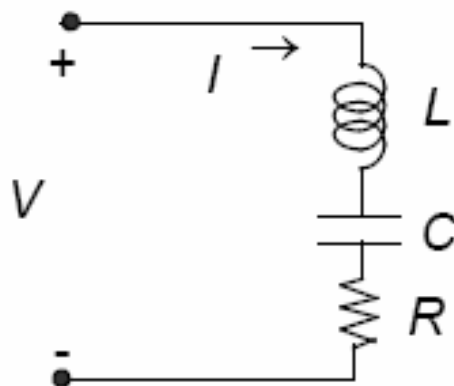
# Beregningsprosedyre

- **A.** Betrakt kammen som en to-port og undersøk først inngangsporten
- **B.** Når kammen beveger seg, vil inngangskapasitansen ha et fast + et variabelt ledd
- **C.** Finn inngangsstrømmen som funksjon av forskyvningen,  $X$ , ved bevegelse
- **D.** Beregn inngangs-admittansen,  $Y$  ("motional admittance")
  - **D1.**  $Y$  uttrykkes ved  $X$
  - **D2.**  $X$  er avhengig av den elektrostatiske kraften,  $F$ , samt  $m$ ,  $b$  og  $k$
  - **D3.**  $F$  er avhengig av påtrykt spenning,  $V$
- **E.** Sett inn og finn et uttrykk for  $Y$  (dynamisk oppførsel)
- **F. Sammenlign med  $Y$  for en L-C-R-gren og finn ekvivalente elementer**
- **G.** Sett opp ekvivalentkretsen for inngangsporten
- **H.** Finn utgangsstrømmen for den gitte inngangen
- **I.** Beregn forholdet mellom utgangs- og inngangs-strøm ("forward current gain")
- **J.** Sett opp en to-port ekvivalent-krets
- **K.** Sett opp en komplett to-port-modell



## F. Series $L$ - $C$ - $R$ Admittance

The current through an  $L$ - $C$ - $R$  branch is:

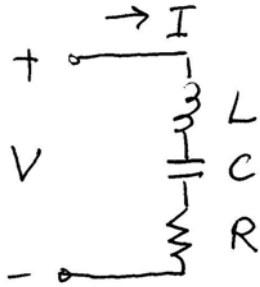


$$\frac{I(j\omega)}{V(j\omega)} = \frac{j\omega C}{1 - (\omega / \omega_o)^2 + j(\omega RC)}$$

$$\omega_o^{-2} = LC$$

Match terms in motional admittance  $\rightarrow$  find equivalent elements

## Strøm gjennom L-C-R-gren



$$V = I(sL + 1/sC + R)$$

$$\frac{I(s)}{V(s)} = \frac{sC}{s^2LC + sRC + 1}$$

$$Y(j\omega) = \frac{I(j\omega)}{V(j\omega)} = \frac{j\omega C}{-\omega^2 LC + j\omega RC + 1}$$

Innfører

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Y(j\omega) = \frac{j\omega C}{[1 - (\omega/\omega_0)^2] + j\omega RC} = \frac{j\omega C}{[\dots] + j \frac{\omega}{\omega_0 Q}}$$

$$RC = \frac{1}{\omega_0 Q}, \quad Q = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{\sqrt{LC}}{RC} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{1}{R}$$

Dette gir:

$$Y(j\omega) = \frac{j\omega C}{\left[1 - (\omega/\omega_0)^2\right] + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}$$

Sammenlign med

$$Y_{1x}(j\omega) = \eta^2 \cdot \frac{j\omega \cdot 1/k}{\left[1 - (\omega/\omega_0)^2\right] + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}$$

Resultatet blir:

$$C_{x1} = \eta^2 / k$$

$$\omega_0^2 = k/m = 1/LC \Rightarrow L_{x1} = \frac{1}{C} \cdot \frac{m}{k} = \frac{k}{\eta^2} \cdot \frac{m}{k} = \frac{m}{\eta^2}$$

$$RC = \frac{1}{Q\omega_0} = \frac{1}{Q\sqrt{k/m}} \Rightarrow R_{x1} = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{Q\sqrt{k/m}} = \frac{k}{\eta^2} \frac{\sqrt{m}}{Q\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{km}}{Q\eta^2}$$

$\eta$  = Elektromagnetisk koblingskoeffisient

$I_{x1} = \frac{V_1}{R_{x1}}$  Ved resonans opphever impedansene for L og C hverandre

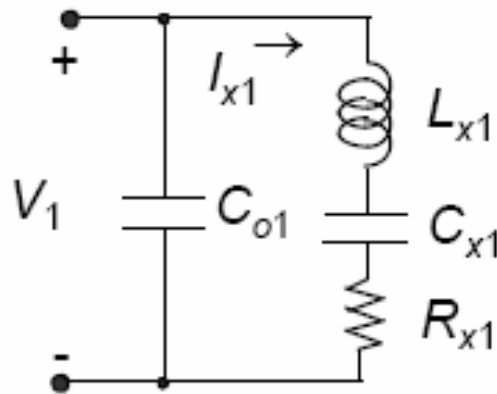
# Beregningsprosedyre

- **A.** Betrakt kammen som en to-port og undersøk først inngangsporten
- **B.** Når kammen beveger seg, vil inngangskapasitansen ha et fast + et variabelt ledd
- **C.** Finn inngangsstrømmen som funksjon av forskyvningen,  $X$ , ved bevegelse
- **D.** Beregn inngangs-admittansen,  $Y$  ("motional admittance")
  - **D1.**  $Y$  uttrykkes ved  $X$
  - **D2.**  $X$  er avhengig av den elektrostatiske kraften,  $F$ , samt  $m$ ,  $b$  og  $k$
  - **D3.**  $F$  er avhengig av påtrykt spenning,  $V$
- **E.** Sett inn og finn et uttrykk for  $Y$  (dynamisk oppførsel)
- **F.** Sammenlign med  $Y$  for en L-C-R-gren og finn ekvivalente elementer
- **G. Sett opp ekvivalentkretsen for inngangsporten**
- **H.** Finn utgangsstrømmen for den gitte inngangen
- **I.** Beregn forholdet mellom utgangs- og inngangs-strøm ("forward current gain")
- **J.** Sett opp en to-port ekvivalent-krets
- **K.** Sett opp en komplett to-port-modell

## G. Equivalent Circuit for Input Port

A series L-C-R circuit results in the identical expression  $\rightarrow$   
find equivalent values  $L_{x1}$ ,  $C_{x1}$ , and  $R_{x1}$

$$L_{x1} = \frac{m}{\eta^2} \quad C_{x1} = \frac{\eta^2}{k} \quad R_{x1} = \frac{\sqrt{km}}{Q\eta^2} \quad \eta = V_{p1} \frac{\partial C_1}{\partial x} = \text{electromechanical coupling coefficient}$$



At resonance, the impedances of the inductance and the capacitance *cancel out*  $\rightarrow$

$$I_{x1} = \frac{V_1}{R_{x1}}$$

# Beregningsprosedyre

- **A.** Betrakt kammen som en to-port og undersøk først inngangsporten
- **B.** Når kammen beveger seg, vil inngangskapasitansen ha et fast + et variabelt ledd
- **C.** Finn inngangsstrømmen som funksjon av forskyvningen,  $X$ , ved bevegelse
- **D.** Beregn inngangs-admittansen,  $Y$  ("motional admittance")
  - **D1.**  $Y$  uttrykkes ved  $X$
  - **D2.**  $X$  er avhengig av den elektrostatiske kraften,  $F$ , samt  $m$ ,  $b$  og  $k$
  - **D3.**  $F$  er avhengig av påtrykt spenning,  $V$
- **E.** Sett inn og finn et uttrykk for  $Y$  (dynamisk oppførsel)
- **F.** Sammenlign med  $Y$  for en L-C-R-gren og finn ekvivalente elementer
- **G.** Sett opp ekvivalentkretsen for inngangsporten
- **H. Finn utgangsstrømmen for den gitte inngangen**
- **I.** Beregn forholdet mellom utgangs- og inngangs-strøm ("forward current gain")
- **J.** Sett opp en to-port ekvivalent-krets
- **K.** Sett opp en komplett to-port-modell

## H. Beregning av utgangsstrøm (jmfr. inngangsstrøm pga. bevegelse)

$$i_{1x}(t) = -V_{P1} \frac{\partial C_1}{\partial t}$$

Denne bevegelsen gjør at utgangskapasitansen C2 også endrer seg.  
Utgangsstrøm pga. bevegelse ( $v_2 = 0V$ , kortsluttet)

$$i_2(t) = -V_{P2} \frac{\partial C_2}{\partial t} = -V_{P2} \frac{\partial C_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t}$$

$$I_2(j\omega) = -V_{P2} \frac{\partial C_2}{\partial x} \cdot j\omega \cdot X(j\omega)$$

I phasor-form

$$X(j\omega) = \frac{1/k}{[1 - (\omega/\omega_0)^2] + j \frac{\omega}{\omega_0 Q}} \cdot F_d(j\omega)$$

$$F_d(j\omega) = -V_{P1} \frac{\partial C_1}{\partial x} \cdot V_1(j\omega)$$

spenning  $\rightarrow$  kraft  $\rightarrow$  forskyvning  $\rightarrow$  strøm

$$\Rightarrow I_2(j\omega) = \frac{V_{P1} V_{P2} \frac{\partial C_1}{\partial x} \frac{\partial C_2}{\partial x}}{[1 - (\omega/\omega_0)^2] + j \frac{\omega}{\omega_0 Q}} \cdot j\omega \cdot 1/k \cdot V_1(j\omega)$$

# I. Beregn forholdet mellom utgangs- og inngangsstrøm ("forward current gain")

"Forward current gain"

$$\Phi_{21} = \frac{I_2(j\omega)}{I_{x1}(j\omega)} = \frac{-V_{P2} \frac{\partial C_2}{\partial x} \cdot j\omega \cdot X(j\omega)}{-V_{P1} \frac{\partial C_1}{\partial x} \cdot j\omega \cdot X(j\omega)} = \frac{V_{P2} \frac{\partial C_2}{\partial x}}{V_{P1} \frac{\partial C_1}{\partial x}}$$

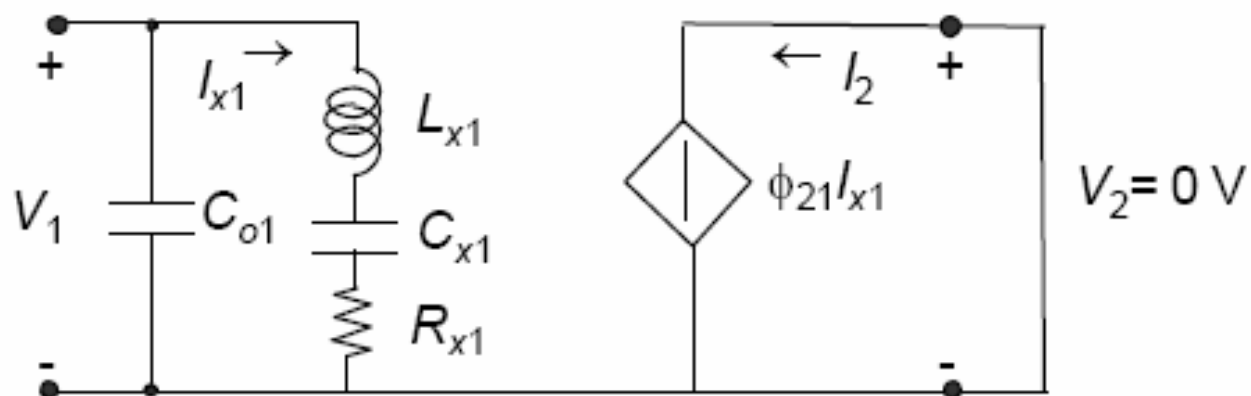
$$I_2(j\omega) = \Phi_{21} \cdot I_{x1}(j\omega), \quad V_2 = 0$$



# Beregningsprosedyre

- **A.** Betrakt kammen som en to-port og undersøk først inngangsporten
- **B.** Når kammen beveger seg, vil inngangskapasitansen ha et fast + et variabelt ledd
- **C.** Finn inngangsstrømmen som funksjon av forskyvningen,  $X$ , ved bevegelse
- **D.** Beregn inngangs-admittansen,  $Y$  ("motional admittance")
  - **D1.**  $Y$  uttrykkes ved  $X$
  - **D2.**  $X$  er avhengig av den elektrostatiske kraften,  $F$ , samt  $m$ ,  $b$  og  $k$
  - **D3.**  $F$  er avhengig av påtrykt spenning,  $V$
- **E.** Sett inn og finn et uttrykk for  $Y$  (dynamisk oppførsel)
- **F.** Sammenlign med  $Y$  for en L-C-R-gren og finn ekvivalente elementer
- **G.** Sett opp ekvivalentkretsen for inngangsporten
- **H.** Finn utgangsstrømmen for den gitte inngangen
- **I.** Beregn forholdet mellom utgangs- og inngangs-strøm ("forward current gain")
- **J.** Sett opp en to-port ekvivalent-krets
- **K.** Sett opp en komplett to-port-modell

**J. Two-Port Equivalent Circuit ( $v_2 = 0$ )**

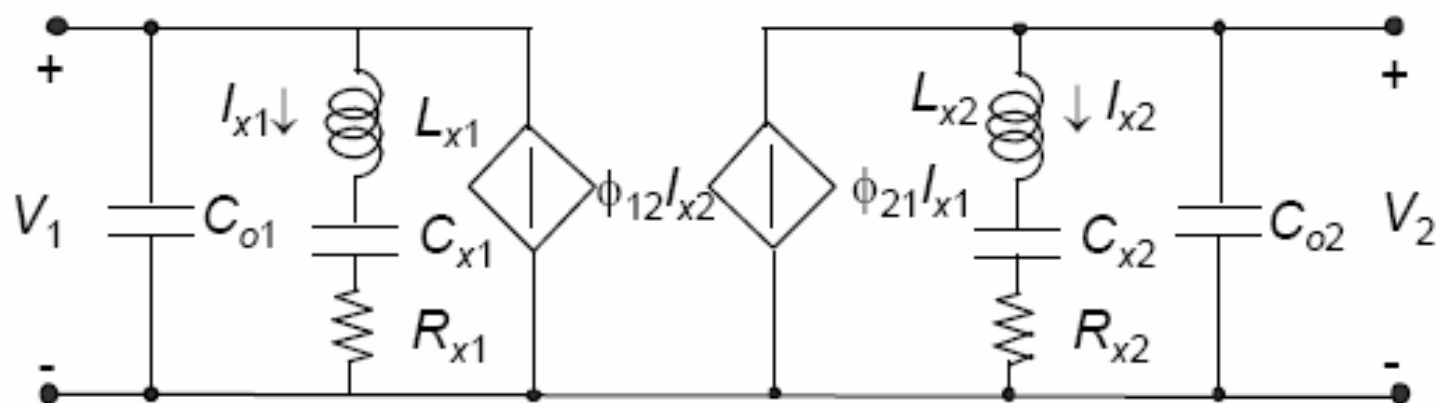


# Beregningsprosedyre

- **A.** Betrakt kammen som en to-port og undersøk først inngangsporten
- **B.** Når kammen beveger seg, vil inngangskapasitansen ha et fast + et variabelt ledd
- **C.** Finn inngangsstrømmen som funksjon av forskyvningen,  $X$ , ved bevegelse
- **D.** Beregn inngangs-admittansen,  $Y$  ("motional admittance")
  - **D1.**  $Y$  uttrykkes ved  $X$
  - **D2.**  $X$  er avhengig av den elektrostatiske kraften,  $F$ , samt  $m$ ,  $b$  og  $k$
  - **D3.**  $F$  er avhengig av påtrykt spenning,  $V$
- **E.** Sett inn og finn et uttrykk for  $Y$  (dynamisk oppførsel)
- **F.** Sammenlign med  $Y$  for en L-C-R-gren og finn ekvivalente elementer
- **G.** Sett opp ekvivalentkretsen for inngangsporten
- **H.** Finn utgangsstrømmen for den gitte inngangen
- **I.** Beregn forholdet mellom utgangs- og inngangs-strøm ("forward current gain")
- **J.** Sett opp en to-port ekvivalent-krets
- **K.** Sett opp en komplett to-port-modell

K.

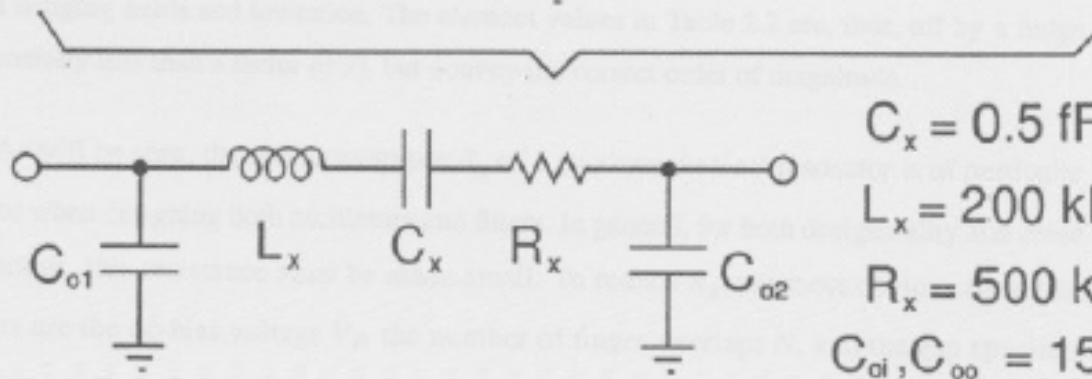
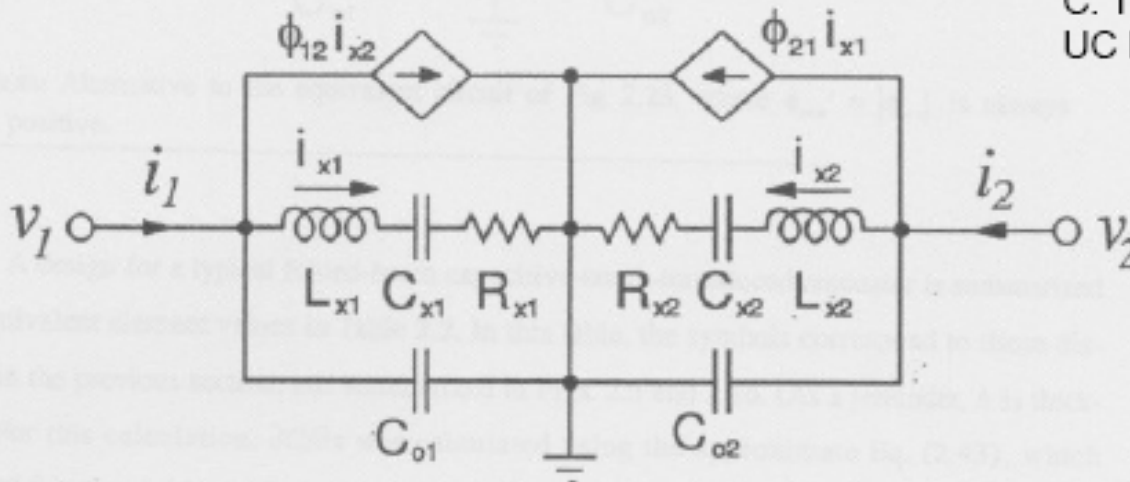
## Complete Two-Port Model



Symmetry implies that modeling can be done from port 2, with port 1 shorted  $\rightarrow$  superimpose the two models

## Equivalent Circuit for Symmetrical Resonator ( $\phi_{21} = \phi_{12} = 1$ )

C. T.-C. Nguyen, Ph.D.,  
UC Berkeley, 1994



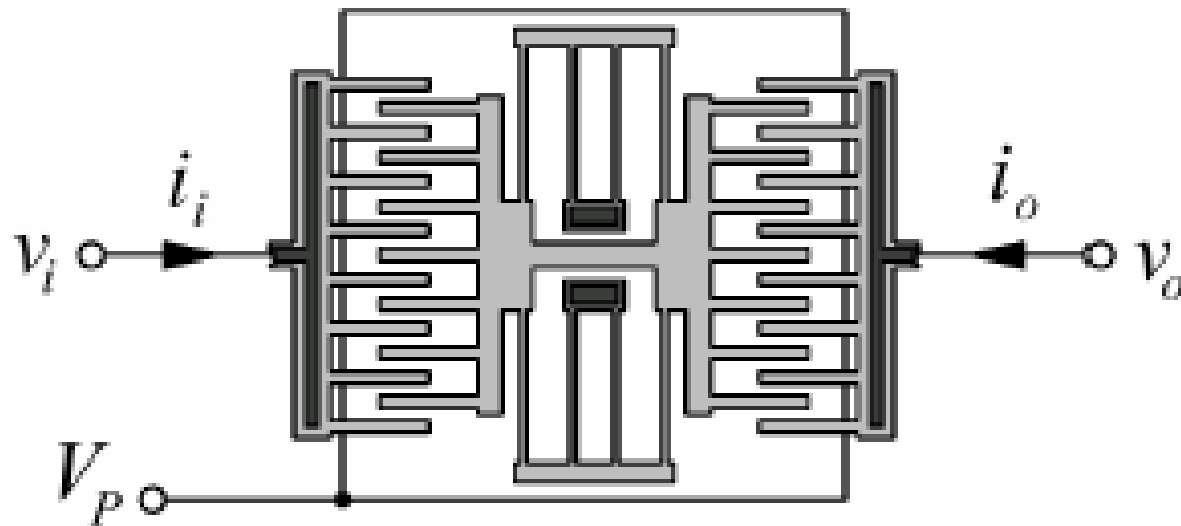
$C_x = 0.5 \text{ fF}$   
 $L_x = 200 \text{ nH}$   
 $R_x = 500 \text{ k}\Omega$   
 $C_{o1}, C_{o2} = 15 \text{ fF}$

# Alternativ modellering

- Benytte **konvertering** mellom mekanisk og elektrisk energidomene
  - Slides fra UCLA
- Utfylles ved notater →

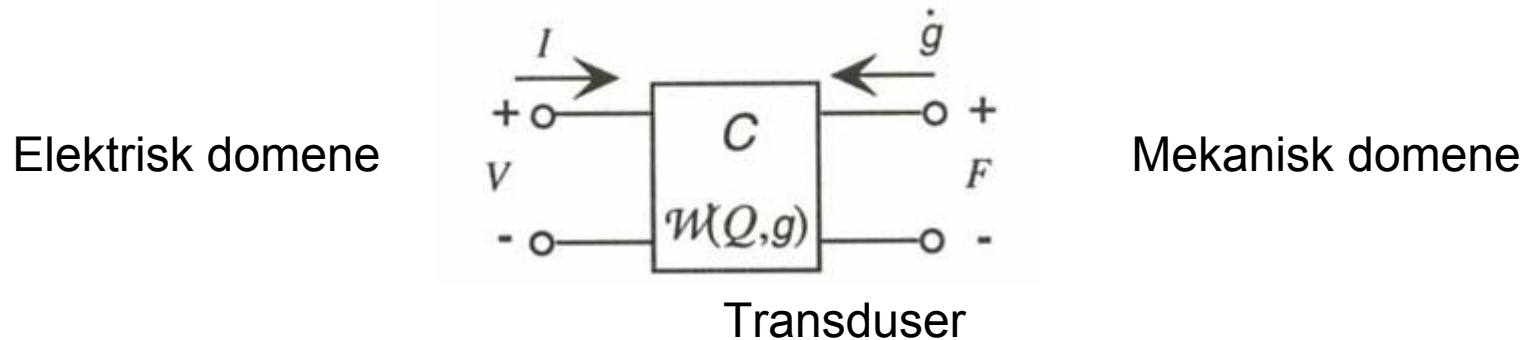
## Two-Port Micromechanical Resonator Using Comb-Drive Actuator

2-port Lateral Microresonator



# Konverteringer mellom energidomener

- Både vertikale og laterale resonator-strukturer kan beskrives ved en **generalisert ikke-lineær kapasitans,  $C$** , som **binder sammen** energidomenene



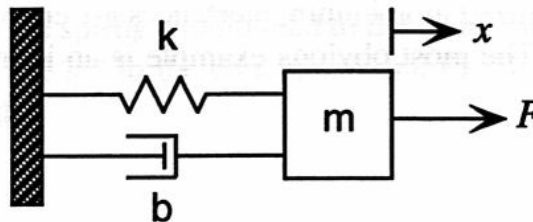
Sammenkobling hvor det **ikke er energitap**



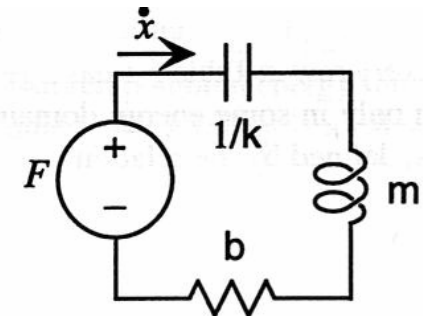
# Prosedyre

- Transformer først impedansene i det mekaniske domenet til sin **elektriske representasjon**
  - De mekaniske komponentene modelleres som "lumped" (diskrete) elektriske komponenter
- NB! En befinner seg fortsatt i det mekaniske domene!

- $C = 1/k$
- $L = m$
- $R = b$



Spring-mass-dashpot system



Equivalent circuit

- Power-variablene
  - Effort = kraft  $\rightarrow$  spenning
  - Flow = hastighet  $\rightarrow$  strøm

# Sammenkobling av forskjellige energidomener

- 1. Hver av energidomenene omformes til sin elektriske ekvivalent
- 2. Domenene forbindes med en generalisert ikke-lineær kapasitans,  $C$
- 3. Transformator og gyrator kan benyttes til **sammenkobling** hvis det er en **lineær sammenheng** mellom power-variablene!
  - Problem: Transduser  $C$  er generelt **IKKE** en lineær 2-port
- 4. Må **linearisere** 2-port transduseren for å kunne erstatte den med en **transformator**
- 5. Transformatoren kan "fjernes" ved at komponentverdiene regnes om til **nye verdier**
  - → **Elektromekanisk koblingskoeffisient benyttes!** = vindingstall ("turn ratio")
  - → **Resultatet er et felles "skjema"**

# Interaksjon mellom energidomener

- Anta **lineær** sammenheng mellom power-variablene
  - Et lineært 2-port element kan benyttes
  - Bruk av transformator eller gyrator

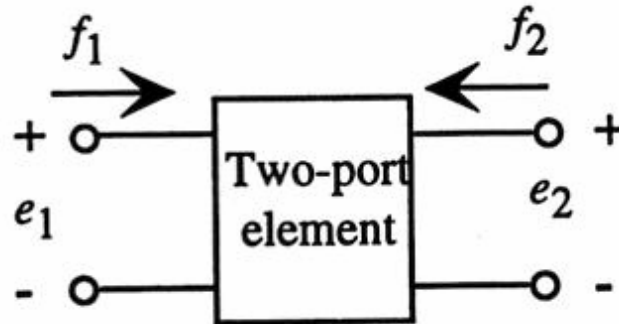


Figure 5.11. General two-port element.

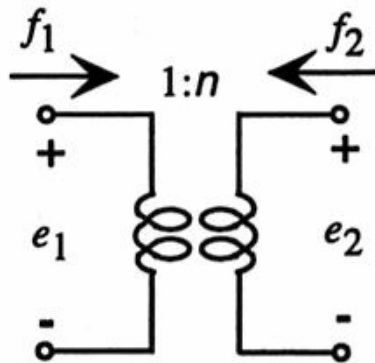
effekt inn = effekt ut    IKKE TAP

$$e_1 f_1 + e_2 f_2 = 0 \quad (5.41)$$

# Transformator

TRANSFORMER:

$$\begin{pmatrix} e_2 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & -\frac{1}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ f_1 \end{pmatrix} \quad (5.42)$$



Transformer

$$e_2 = n \cdot e_1$$
$$f_2 = -\frac{1}{n} f_1$$

$n$  = "turns ratio"

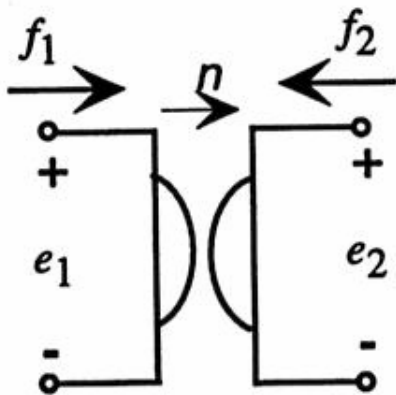
Eks. Binder sammen V og F

vindingstall

# Gyrator

GYRATOR:

$$\begin{pmatrix} e_2 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & n \\ -\frac{1}{n} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ f_1 \end{pmatrix} \quad (5.43)$$

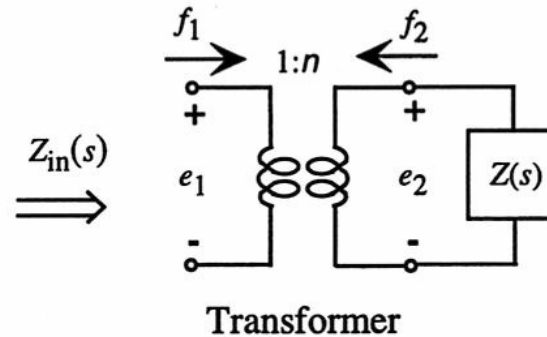


Gyrator

$$e_2 = n \cdot f_1$$
$$f_2 = -\frac{1}{n} e_1$$

# Impedanser transformereres

$$Z_{in}(s) = \frac{Z(s)}{n^2}$$

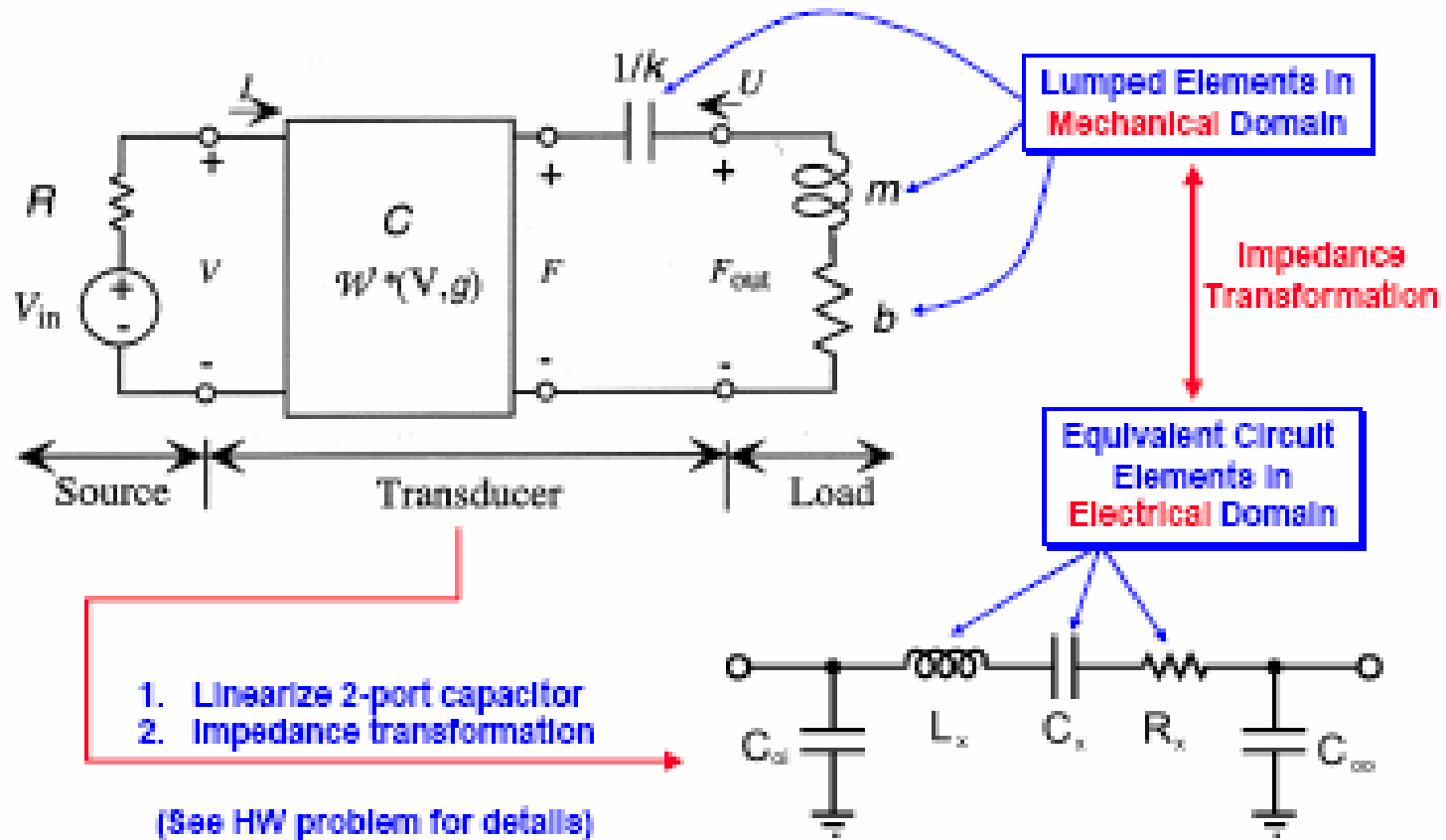


$n$  = koblingskoeffisienten mellom energidomenene

$$Z_{in}(s) = \frac{e_1}{f_1}$$

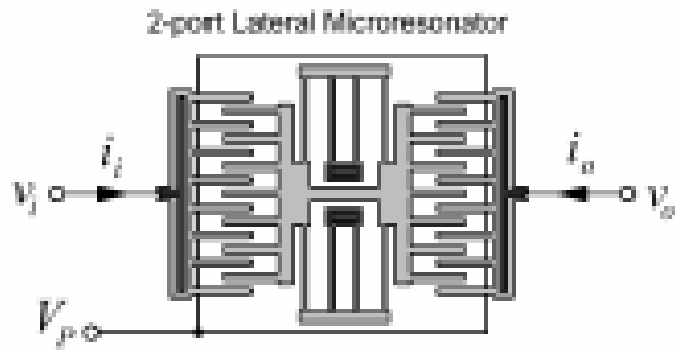
$$Z(s) = \frac{e_2}{-f_2} = \frac{n \cdot e_1}{\frac{1}{n} \cdot f_1} = n^2 \cdot \frac{e_1}{f_1} = n^2 \cdot Z_{in}(s)$$

## Lumped Element Model (Senturia's Book)

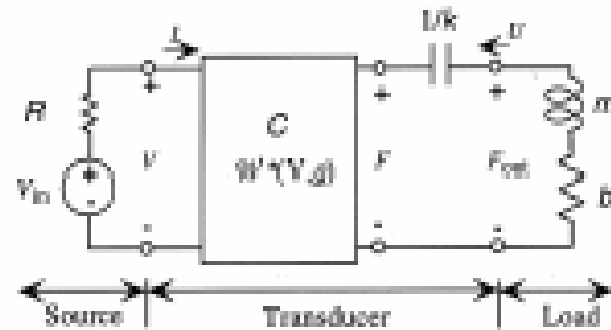


# Linearized Transducers

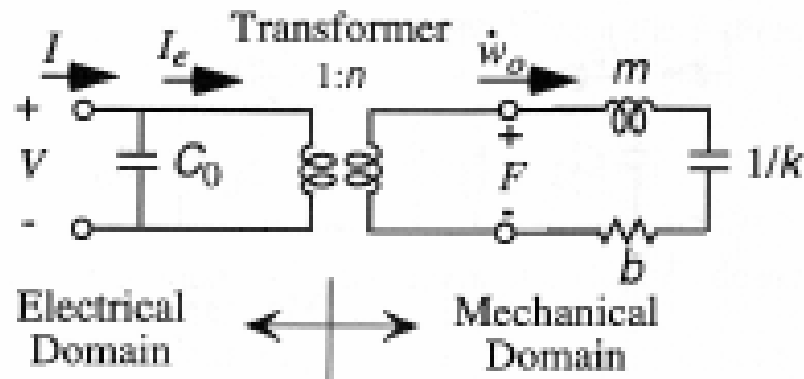
Physical Circuit



Equivalent Circuit (Nonlinear)



Linearized Equivalent Circuit





# Prosedyre

- Se på relasjonen mellom "efforts" og "flows" i de 2 domeneene
- **Efforts:** beregningsprosedyre
  - 1. Start med potensiell energi
  - 2. Beregn kraft
  - 3. Perturbasjoner rundt DC-likevekt
  - 4. Finn forholdet mellom AC-leddene
    - → Gir en lineær sammenheng

## Forhold mellom "efforts"

$$F = \frac{\partial W^*}{\partial x} = \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial C}{\partial x}$$

$$F = F_{\text{mek}} + f \cdot \sin(\omega t)$$

$$V = V_{\text{mek}} + v \cdot \sin(\omega t)$$

$$F_{\text{mek}} + f \cdot \sin(\omega t) = \frac{1}{2} (V_{\text{mek}} + v \cdot \sin(\omega t))^2 \frac{\partial C}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{2} \left( (V_{\text{mek}})^2 + 2 \cdot V_{\text{mek}} \cdot v \cdot \sin(\omega t) \right) \frac{\partial C}{\partial x}$$

$$f = V_{\text{mek}} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \cdot v \quad \leftarrow \text{AC terme}$$

effort (mek domene) = konst. \* effort (elektrisk domene)

## Linearization – Small Signal Analysis

Relations between "Efforts"

$$F = \frac{\partial W^*}{\partial x} = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial x}$$

$$F = F_{dc} + f \cdot \sin(\omega t)$$

$$V = V_{dc} + v \cdot \sin(\omega t)$$

$$F_{dc} + f \cdot \sin(\omega t) = \frac{1}{2} (V_{dc} + v \cdot \sin(\omega t))^2 \frac{\partial C}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{2} \left( (V_{dc})^2 + 2 \cdot V_{dc} \cdot v \cdot \sin(\omega t) \right) \frac{\partial C}{\partial x}$$

$$f = V_{dc} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \cdot v \quad \leftarrow \text{AC terms}$$

Relations between "Flows"

$$Q = V \cdot C$$

$$I = V \cdot \frac{\partial C}{\partial t} = V \cdot \frac{\partial C}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial t} = V \cdot \frac{\partial C}{\partial X} \cdot \dot{X}$$

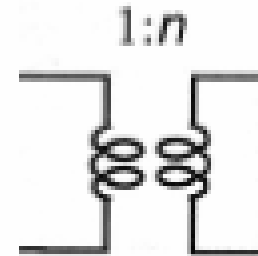
$$I = I_{dc} + i \cdot \sin(\omega t)$$

$$X = X_{dc} - x \cdot \sin(\omega t) \quad \text{Negative sign due to definition of flow direction}$$

$$i = -V_{dc} \frac{\partial C}{\partial X} \dot{x}$$

Linearized capacitive transducer is a Transformer

$$\begin{pmatrix} f \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & -\frac{1}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ i \end{pmatrix}$$



Turn Ratio:  $n = V_{dc} \frac{\partial C}{\partial X}$

# Strømretning, mek domene

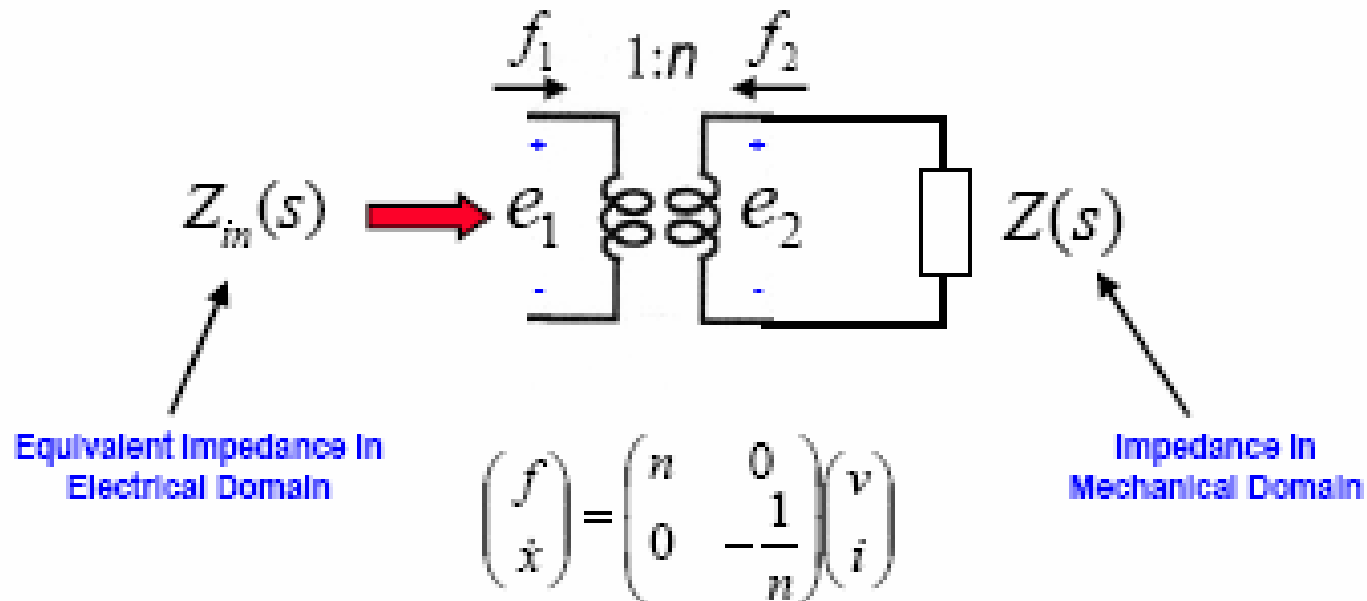
- Flow i det mek domene er definert **positiv inn** mot 2-port transduser
- Velger at strømmen går **ut av** 2-port C. Derved får vi:
  - **Strøm går inn** i det elektriske domene
  - → forårsaker tiltrekningskraft på kammen
  - → fjæra strekkes
  - → potensiell energi bygges opp
  - → analogt med at  $1/k$ -kondensatoren lades
  
  - → Økning i strøm → ladning på kondensatoren øker → tiltrekningskraften øker → **"displacement" (x) minker**

# En samsvarende relasjon både mellom "efforts" og "flows"

$$f = V_{dc} \cdot \frac{\partial c}{\partial x} \cdot v = n \cdot v \quad \text{der} \quad n = V_{dc} \cdot \frac{\partial c}{\partial x}$$
$$i = -V_{dc} \cdot \frac{\partial c}{\partial x} \cdot \dot{x} = -n \cdot \dot{x} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = -\frac{1}{n} \cdot i$$

- **effort** (mekanisk domene) =  $n$  \* **effort** (elektrisk domene)
- **flow** (mekanisk domene) =  $-1/n$  \* **flow** (elektrisk domene)
- En linearisert kapasitiv transduser i form av en **transformator** kan benyttes!

## Impedance Transformation



$$Z_{in}(s) = \frac{1}{n^2} Z(s)$$

# Transformasjon av impedanser

$$Z_{el} = \frac{1}{n^2} \cdot Z_{mek}$$

Spole

$$sL_{el} = \frac{1}{n^2} \cdot sL_{mek} = \frac{sm}{n^2} \Rightarrow L_{el} = \frac{m}{n^2}$$

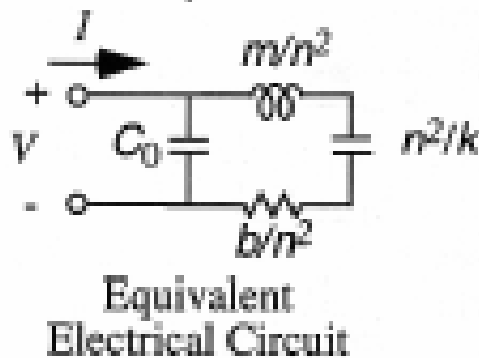
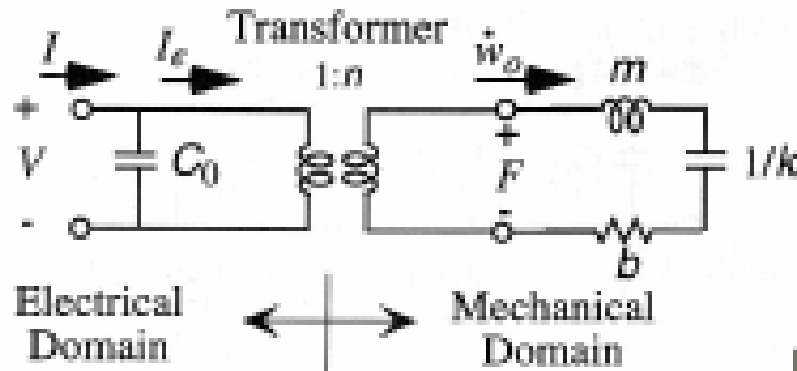
Motstand

$$R_{el} = \frac{1}{n^2} \cdot R_{mek} = \frac{b}{n^2}$$

Kondensator

$$\frac{1}{sC_{el}} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{sC_{mek}} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{k}{s} \Rightarrow C_{el} = \frac{n^2}{k}$$

# Small Signal Equivalent Circuit of Microresonators



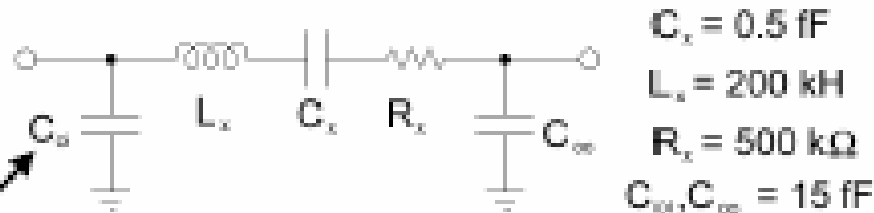
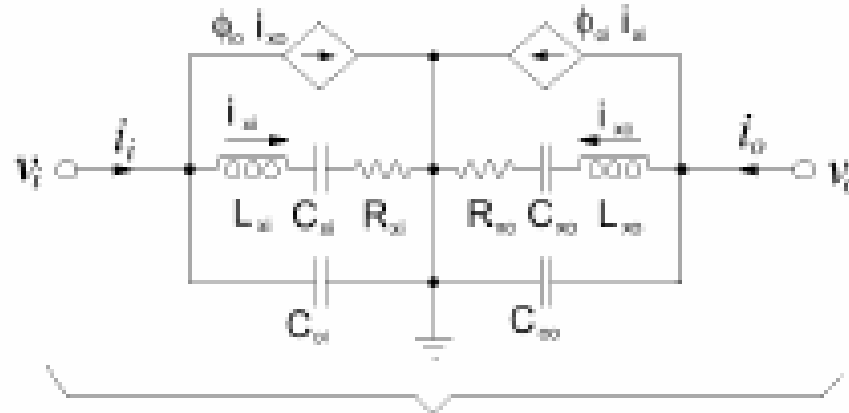
Unit of  $n^2/k$  is Farad

$$n = V_{dc} \frac{\partial C}{\partial x}$$



Begge metodene ender opp med samme krets:

## Equivalent Circuit of 2-Port Resonator (in Electrical Domain)



Fixed electrical  
Capacitance  
Between fixed comb  
And ground plane

$$C_{s1} = \frac{\eta_s^2}{k}$$

$$L_{s1} = \frac{M}{\eta_s^2}$$

$$R_{s1} = \frac{\sqrt{kM}}{Q\eta_s^2}$$

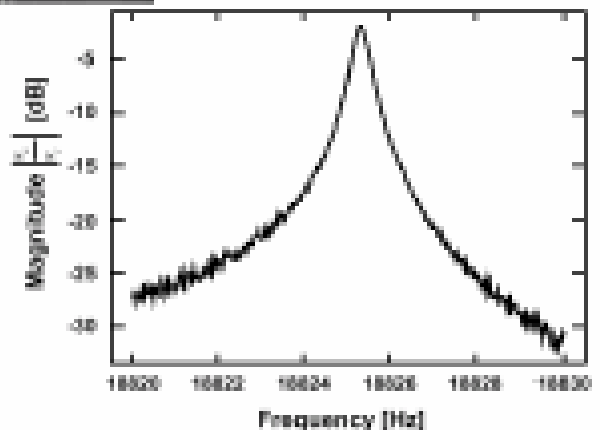
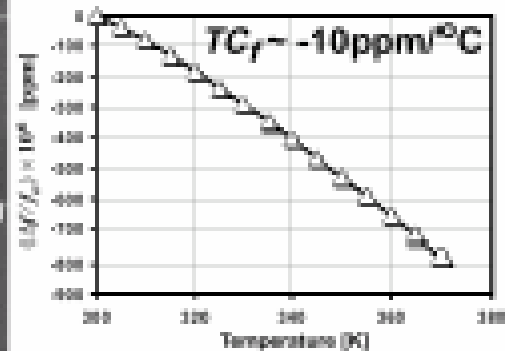
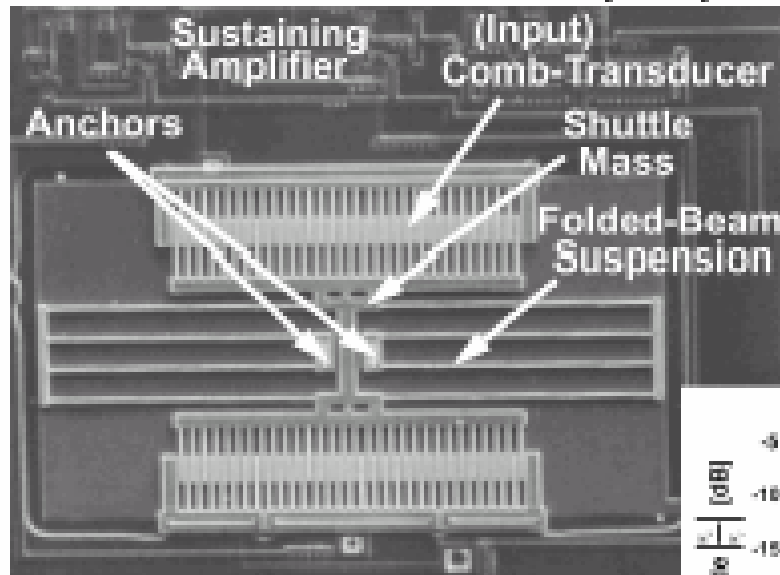
$$\phi_{s1} = \frac{\eta_{sp}}{\eta_s}$$

$$\eta_s = V_{Fs} \frac{\partial C_s}{\partial x}$$

C. T.-C. Nguyen, "Micromechanical resonators for oscillators and filters," Proceedings IEEE International Ultrasonics Symposium, Seattle, WA, pp. 489-496, Nov. 7-10, 1986

# Comb-Transduced Folded-Beam Microresonator

- Micromachined from *in situ* phosphorous-doped polysilicon



- At right:  $Q = 50,000$  measured at 20 mTorr pressure
- ( $Q = 27$  at atmospheric pressure)
- Problems: large mass  $\Rightarrow$  limited to low frequencies; low coupling

# Kam-resonator, oppsummering

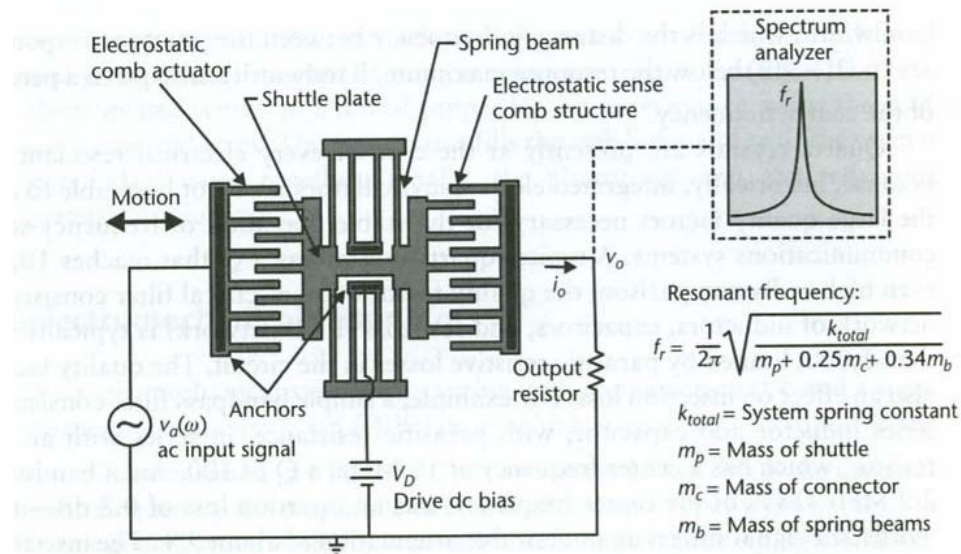
- Oppsummering fra modelleringen:
- Kraft:  $F_e = \frac{1}{2} \frac{dC}{dx} V^2$  (kraften er alltid tiltrekkende)
  - Inngangs-signal  $V_a \cdot \cos(\omega t)$
  - $F_e \sim V_a^2 \cdot \frac{1}{2} [1 + \cos(2\omega t)]$
  - Kraften som driver er 2x inngangs-frekvensen + DC: UØNSKET
- Legge til DC forspenning,  $V_d$ 
  - $F_e \sim V_d^2 + 2 V_d \cdot V_a \cdot \cos \omega t$  + neglisjerbart ledd av  $(2\omega t)$
  - Vektlegger linearisert AC kraft-komponent  $\sim V_d \cdot V_a$ , som varierer med  $V_a$  sin frekvens,  $\omega$
- $C$  øker når finger-overlappingen øker (kam beveges)
  - $\epsilon \cdot A/d$  ( $A$  = kam-tykkelse \* overlapps-lengde)
- $dC/dx =$  konstant for et gitt design (lineær forandring,  $C$  er proporsjonal med lengde-variasjon)

# Kam-resonator, utgangsstrøm

- Det dannes en tidsvarierende kapasitans ved utgangs-kammen
  - Beregning av utgangsstrøm når  $V_d$  holdes konstant og verdien av  $C$  varierer
    - $I_0 = d/dt (Q) = d/dt (C \cdot V) = V_d \cdot dC/dt = V_d \cdot dC/dx \cdot dx/dt$
    - $I_0 = V_d \cdot dC/dx \cdot \omega \cdot x_{\max}$
    - $I_0$  plottet mot frekvens, viser BP-karakteristikk

# Kam-resonator, fjærstivhet

- Fjærstivhet til enkel c-c beam som bøyes til siden
  - $k_{\text{beam}} = \text{const} * E * t * (w/L) \text{ exp}^3$ 
    - $E = \text{Youngs modul, } t = \text{tykkelse, } w = \text{bredde, } L = \text{lengde}$
- For eksemplet i figur 7.9:
  - $\text{const} = 1$
  - $k_{\text{total}} = 2 * k_{\text{beam}}$



**Figure 7.9** Illustration of a micromachined folded-beam comb-drive resonator. The left comb drive actuates the device at a variable frequency  $\omega$ . The right capacitive-sense-comb structure measures the corresponding displacement by turning the varying capacitance into a current, which generates a voltage across the output resistor. There is a peak in displacement, current, and output voltage at the resonant frequency.

# Design-parametre

- For å få **høyere resonans-frekvens:**
- Total **fjærstivhet** må økes
- **Bevegelses-massen** må avta
  - Vanskelig å få til dette fordi det trengs et visst antall fingre
    - For å få god nok elektrostatisk innkobling (spenning → kraft)
  - Oppløsningen i prosessen begrenser hvor små de laterale strukturene kan gjøres
  - Eks.  $L = 10\mu\text{m}$ ,  $w = 0.2\mu\text{m}$ , enkrystall Si-bjelke
    - $f_r = 14\text{ MHz}$
- Frekvens kan økes ved å bruke et **annet materiale** med større  **$E/\rho$**  enn Si
  - $E/\rho$  sier noe om fjærstivheten i forhold til tyngden
  - Aluminium og titan har  $E/\rho$  lavere enn for Si
  - Si carbide, poly diamond har  $E/\rho$  høyere enn for Si (poly diamond er forskningstema)