TEORI FOR OPTISKE FIBRAR MED BRAGGITTER

Vi ser på ein optisk fiber (lysbølgjeleiar) som går i z-retninga og har ein relativ permittivitet $\varepsilon_f(x,y) = \varepsilon_f(\boldsymbol{\rho})$ som varierer over tverrsnittet. $\boldsymbol{\rho} = (x,y)$ er ein posisjon i tverrsnittet. Vi går ut frå at fiberen er tapsfri, slik at $\varepsilon_f(\boldsymbol{\rho})$ er ein reell funksjon. Vanlegvis er fordelinga $\varepsilon_f(\boldsymbol{\rho})$ i ein optisk fiber slik at vi snakkar om ein liten *kjerne* i midten av fiberen, omslutta av ei *kappe* der brytningsindeksen n_{cl} og $\varepsilon_f(\boldsymbol{\rho}) = n_{cl}^2$ begge er konstante I ein optisk fiber er variasjonen i ε_f over tverrsnittet så liten at vi seier at lysbølgjeleiaren er *svaktleiande* (eng. weakly guiding):

$$\left|\varepsilon_f(\boldsymbol{\rho}) - n_{cl}^2\right| << 1. \tag{1}$$

Ein brukar og namnet *skalarfelttilnærming* om formalismen som gjeld for ein svak bølgjeleiar. I ein svaktleiande fiber kan lysbølgjene gå i form av skalare modusfelt, dvs. harmoniske bølgjer som går i z-retninga:

$$E(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\left[\xi_\mu(x,y)\exp\left(i\omega t - i\beta_\mu z\right)\right], \tag{2}$$

der ω er vinkelfrekvensen til lyset, β_μ vinkelrepetensen og $\xi_\mu(x,y)$ modusfeltfordelinga for modus nummer μ. Modusfeltfordelinga $\xi_\mu(x,y)$ oppfyller likninga

$$\left[\partial_x^2 + \partial_y^2 + k_0^2\,\varepsilon_f(\boldsymbol{\rho})\right]\xi_\mu = \beta_\mu^2\xi_\mu, \tag{3}$$

der c er lysfarten og k_0 vinkelrepetensen i vakuum,

$$k_0 = \omega/c = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}. \tag{4}$$

Det er standard i fiberteori å bruke likning (3) i staden for Maxwells likningar for modusfeltfordelinga. I tilnærminga om svaktleiande fiber ligg det at

1. alle fire feltvektorane $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$ og $\mathbf{B}$ peikar vinkelrett på fiberaksen og ligg altså i x-y-planet,

2. om vi ser på ein av dei fire feltvektorane så peikar han i same retning i heile tverrsnittet av fiberen,

3. $\mathbf{E}$ og $\mathbf{D}$ peikar i same retning og står vinkelrett på $\mathbf{H}$ og $\mathbf{B}$, som også peikar i same retning,

4. kvart av dei fire felta $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$ og $\mathbf{B}$ er tilnærma proporsjonale med eit og same skalare felt $E(x,y,z,t)$, slik at $\mathbf{D} \approx n_{cl}^2\varepsilon_0\mathbf{E} \approx n_{cl}^2\varepsilon_0 E\hat{\mathbf{E}}$ og $\mathbf{B} \approx \mu_0\mathbf{H} \approx n_{cl} c E\left(\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{E}}\right).$,

5. fiberen har to lineært uavhengige modi med kvar sin polarisasjon. Desse to modi er degenererte, dvs. har same β_μ,

6. $\left|\beta_\mu - n_{cl}k_0\right| << n_{cl}k_0$ for alle modi.

Ovanfor har vi bruka hatt over vektorsymbol for at det skal representere ein vektor med lengde lik ein.

Det er innlysande frå (3) at både β_μ og $\xi_\mu(\boldsymbol{\rho})$ er avhengige av k_0. Generelt treng vi numeriske metodar for å finne β_μ og $\xi_\mu(\boldsymbol{\rho})$ for ei gjeven fordeling av den relative permittiviteten $\varepsilon_f(\boldsymbol{\rho})$ i fibertverrsnittet, men for nokre få utvalde fordelingar finst det analytiske løysingar. Modusfeltfunksjonane $\xi_\mu(\boldsymbol{\rho})$ har to svært nyttige matematiske eigenskapar:

1. Ein vilkårleg funksjon av x og y kan rekkeutviklast i modusfeltfunksjonar:
$$E(\boldsymbol{\rho}) = \textstyle\sum_\mu E_\mu \xi_\mu(\boldsymbol{\rho}). \tag{5}$$

2. Dei kan veljast ortonormale, slik at
$$(\xi_\mu, \xi_\nu) = \iint dxdy\, \xi_\mu(\boldsymbol{\rho})^* \xi_\nu(\boldsymbol{\rho}) = \delta_{\mu\nu}, \tag{6}$$
der $\delta_{\mu\nu} = 0$ dersom $\mu \neq \nu$ og $\delta_{\mu\nu} = 1$ dersom $\mu = \nu$.

(5) og (6) er det viktigaste vi treng å vita om modusfeltfunksjone for å rekne med dei. Vi skal sjå at vi kan analysere braggitter i optiske fibrar utan å vita noko om korleis modusfelta ser ut som funksjonar av x og y.

Blochbølgjer i optiske fibrar med braggitter

Vi får bølgjelikninga for ein fiber med braggitter med å byte ut $\varepsilon_f(\boldsymbol{\rho})$ med $\varepsilon(\boldsymbol{\rho}, z)$, ein funksjon som er periodisk i z med periode Λ. Sidan fiberen er periodisk i z-retninga må det finnast feltløysingar som er blochbølgjer:

$$E(x, y, z, t) = \mathrm{Re}\left[\exp(i\omega t - i\beta z)\; u(\boldsymbol{\rho}, z)\right], \tag{7}$$

der blochbølgjefunksjonen $u(\boldsymbol{\rho}, z)$ er periodisk i z-retninga med periode Λ. Vi kan då skrive

$$u(\boldsymbol{\rho}, z) = \textstyle\sum_{p=-\infty}^{+\infty} u_p(\boldsymbol{\rho}) \exp(ipGz). \tag{8}$$

der p er eit heiltal og

$$G = 2\pi/\Lambda. \tag{9}$$

Blochbølgjefunksjonen i likning (8) kan rekkeutviklast i modusfeltfunksjonar som i (5):

$$u_p(\boldsymbol{\rho}) = \textstyle\sum_\mu u_{\mu p} \xi_\mu(\boldsymbol{\rho}). \tag{10}$$

Generelt må summen over μ omfatte både bundne modi og strålingsmodi. (Forskjellen på bundne modi og strålingsmodi er at modusfeltet $\xi_\mu(\boldsymbol{\rho})$ i stor avstand $|\boldsymbol{\rho}|$ frå fiberkjernen minkar eksponensielt med avstanden for bundne modi, medan strålingsmodi oppfører seg som oscillerande besselfunksjonar når avstanden aukar.) Ein bør også hugse på at skalartilnærminga (2) for det elektromagnetiske feltet bare gjeld for modi som har $\beta_\mu \approx n_{cl}k_0$, der n_{cl} er brytningsindeksen i fiberkappa. Når μ aukar, minkar β_μ^2, og vil for store μ representere bølgjer som går i ei retning som peikar lenger og lenger vekk frå fiberaksen. For slike bølgjer kan ein ikkje sjå bort frå polarisasjonen, og difor bør ein ikkje ha med for mange ledd i rekkeutviklinga (10) når ein reknar på svaktleiande fiber.

I ein optisk fiber representerer vanlegvis braggitteret ein liten perturbasjon på bølgjeleiaren. Bølgjeleiaren har typisk variasjonar i ε på mindre enn 10^{-2}, medan braggitteret typisk har variasjonar i ε på mindre enn 10^{-3}. Vi skriv då

$$\varepsilon(\boldsymbol{\rho}, z) = \varepsilon_f(\boldsymbol{\rho}) + \Delta\varepsilon(\boldsymbol{\rho}, z), \tag{11}$$

der ε_f representerer bølgjeleiaren, medan $\Delta\varepsilon$ representerer braggitteret og dermed er periodisk i z-retninga med periode Λ:

$$\Delta\varepsilon(\boldsymbol{\rho}, z) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \Delta\varepsilon_p(\boldsymbol{\rho}) \exp(ipGz). \tag{12}$$

Sidan $\Delta\varepsilon$ er reell, må $\Delta\varepsilon_{-p}(\boldsymbol{\rho}) = \Delta\varepsilon_p(\boldsymbol{\rho})^*$. (Sidan vi brukar kompleks representasjon for E i (7), og $\Delta\varepsilon$ skal multipliserast med E, er det viktig å halde tunga rett i munnen her.)

Blochbølgja $E(x, y, z, t)$ oppfyller likninga

$$\left[\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 + k_0^2\, \varepsilon_f(\boldsymbol{\rho}, z)\right] E = 0. \tag{13}$$

I denne likninga set vi inn uttrykka (10) og (8) for E og (12) for $\Delta\varepsilon$. Om vi også brukar (3) får vi

$$\sum_{\mu,p} \left[u_{\mu p}\xi_\mu(\boldsymbol{\rho})\left(\beta_\mu^2 - (\beta - pG)^2\right) + \sum_q k_0^2\, u_{\mu p}\Delta\varepsilon_q(\boldsymbol{\rho})\,\xi_\mu(\boldsymbol{\rho})\exp(iqGz)\right]\exp(i\omega t - i\beta z + ipGz) = 0. \tag{14}$$

Dette er ei fourierrekke der alle ledd av same orden må vera like:

$$\sum_\mu \left[u_{\mu p}\xi_\mu(\boldsymbol{\rho})\left(\beta_\mu^2 - (\beta - pG)^2\right) + \sum_q u_{\mu,p-q} k_0^2\, \Delta\varepsilon_q(\boldsymbol{\rho})\,\xi_\mu(\boldsymbol{\rho})\right] = 0 \quad \text{for alle } p. \tag{15}$$

Desse likningane gangar vi med $\xi_\nu(\boldsymbol{\rho})^*$, integrerer over x og y og brukar ortonormaliseringa (6):

$$\left(\beta_\nu^2 - (\beta - pG)^2\right) u_{\nu p} + \sum_{\mu,q} k_0^2 \Delta\varepsilon_{\nu,\mu,q} u_{\mu,p-q} = 0, \tag{16}$$

der vi har definert

$$\Delta\varepsilon_{\nu,\mu,q} = \iint dxdy\ \xi_\nu(\boldsymbol{\rho})^*\,\xi_\mu(\boldsymbol{\rho})\,\Delta\varepsilon_q(\boldsymbol{\rho}). \tag{17}$$

Vi veit at blochbølgjer ikkje forandrar seg om vi forandrar β med eit heiltal gonger G. Vi ser at om vi forandrar β på denne måten i likning (16) så er det ekvivalent med å velje ein annan p i likninga. I denne forstand er den likninga vi får med eit vilkårleg val $p \neq 0$ i (16) ekvivalent med den likninga vi får med å velje $p = 0$.

Dersom $\Delta\varepsilon = 0$ seier vi at vi har *ukopla modi.* Likning (16) medfører då at vi kan velje $u_{\mu 0} \neq 0$, at $u_{\nu p} = 0$ om $p \neq 0$ eller $\nu \neq \mu$, og at

$$\beta = \beta_\mu. \tag{18}$$

Ukopla modi er ei god tilnærming om $\Delta\varepsilon$ er liten nok. Då blir også $u_{\nu p}$ liten i høve til $u_{\mu 0}$ for $p \neq 0$ og for alle andre ν enn $\nu = \mu$:

$$u_{\nu p} \approx -\frac{k_0^2 \Delta\varepsilon_{\nu,\mu,p} u_{\mu 0}}{\beta_\nu^2 - \left(\beta_\mu - pG\right)^2}, \tag{19}$$

Vi ser at eit vilkår for å ha ukopla modi er at $\Delta\varepsilon$ er så liten at alle kombinasjonar av μ, ν og p gjev

$$\left|k_0^2 \Delta\varepsilon_{\nu,\mu,p}\right| \ll \left|\beta_\nu^2 - \left(\beta_\mu - pG\right)^2\right| \tag{20}$$

Det enklaste tilfellet av *kopla modi* er at *motgåande bølgjer* koplar for ein og same modus. Då treng vi ikkje taka omsyn til andre modi, men det må finnast ein p slik at $\Delta\varepsilon_{\mu,\mu,p} \neq 0$ og då blir

$$\beta_\mu \approx pG/2 \approx n_{cl} k_0. \tag{21}$$

Eit anna enkelt tilfelle er to ulike modi μ og ν som går i *same retning* og er kopla. I så fall er

$$pG \approx \beta_\mu - \beta_\nu \ll n_{cl} k_0. \tag{22}$$

Tillegg til det som står om kopla modi i læreboka av Kashyap.

Kopla modi er ein viktig modell i fysikk, og kan formidlast på ein enklare måte enn som i læreboka av R. Kashyap. Kopla modi kan analyserast med vektorformalisme eller med skalarformalisme for det elektromagnetiske feltet, men skalarformalismen er enklare, og er den som vanlegvis blir brukt i teori for optiske fibrar. Når ein har forstått ideen for skalarfelt er generaliseringa til vektorfelt rettfram. Likevel er vektorformalismen brukt i læreboka. Dessutan er formalismen i boka ikkje matematisk presis.

Nedanfor er ein skisse av ein enklare og meir presis formalisme. Som ovanfor brukar vi den matematiske eigenskapen til samlinga av modusfeltfordelingar $\xi_\mu(\boldsymbol{\rho})$, at dei er eit sett av ortogonale funksjonar som vi kan rekkeutvikle ein vilkårleg funksjon av x og y i. For ein svaktleiande fiber kan vi difor skrive det som i læreboka er likning (4.1.14):

$$E_t(x,y,z,t) = \textstyle\sum_\mu \mathrm{Re}\left[\left[A_\mu(z)\, e^{i\omega t - i\beta_\mu z} + B_\mu(z)\, e^{i\omega t + i\beta_\mu z}\right] \xi_\mu(x,y)\right], \qquad (4.1.14) \tag{23}$$

der summen over μ går over både bundne modi og strålingsmodi.

I læreboka finn vi normaliseringa av modusfeltfunksjonane ξ_μ som likning (4.1.15). Denne likninga ser ikkje heilt ut som likning (6) ovanfor, men forskjellen mellom (6) og (4.1.15) blir borte når vi brukar det at skalartilnærminga tillet oss å setja $\beta \approx n_{cl} k_0$.

Vi kan setja (23) inn i (13), gange med $\xi_\nu(\boldsymbol{\rho})^*$ og integrere over fibertverrsnittet. Vi går ut frå at vi har saktevarierande amplitude, altså at $|\partial_z^2 A_\mu| \ll |n_{cl} k_0 \partial_z A_\mu|$, og får ei form av likning (4.2.9) i læreboka:

$$\sum_\mu \left[-i\beta_\mu A_\mu(z)\, e^{i\omega t - i\beta_\mu z} + i\beta_\mu B_\mu(z)\, e^{i\omega t + i\beta_\mu z}\right] \iint dxdy\ \xi_\mu(\boldsymbol{\rho})\, \xi_\nu(\boldsymbol{\rho})^*$$
$$= \iint dxdy\ \mu_0 \partial_t^2 P_g\ \xi_\nu(\boldsymbol{\rho})^* . \qquad (4.2.9) \qquad (24)$$

der

$$P_g(x,y,z,t) = \varepsilon_0 \sum_{p,\mu} \Delta\varepsilon_p(\boldsymbol{\rho}) \exp(ipGz) \left[A_\mu(z)\, e^{i\omega t - i\beta_\mu z} + B_\mu(z)\, e^{i\omega t + i\beta_\mu z}\right] \xi_\mu(\boldsymbol{\rho})\,, (4.2.18) \qquad (25)$$

Dette kan vi setja inn i (4.2.9), bruke normaliseringa (6) og som i (17) innføre $\Delta\varepsilon_{\nu,\mu,q} = \iint dxdy\ \xi_\nu(\boldsymbol{\rho})^* \xi_\mu(\boldsymbol{\rho}) \Delta\varepsilon_q(\boldsymbol{\rho})$. Då får (4.2.21) forma

$$-i\beta_\nu \partial_z A_\nu(z)\, e^{i\omega t - i\beta_\nu z} + i\beta_\nu \partial_z B_\nu(z)\, e^{i\omega t + i\beta_\nu z}$$
$$= -k_0^2 \sum_{\mu,p} \Delta\varepsilon_{\nu,\mu,p} \left[A_\mu(z)\, e^{i\omega t + ipGz - i\beta_\mu z} + B_\mu(z)\, e^{i\omega t + ipGz + i\beta_\mu z}\right], \quad (4.2.21) \qquad (26)$$

La oss gå ut frå at for $z = 0$ går alt lyset mot høgre og er samla i modus nummer μ, slik at $A_\nu(0) = 0$ for $\nu \neq \mu$ og $B_\nu(0) = 0$ for alle ν. Sidan vi har gått ut frå at $A_\nu(z)$ og $B_\nu(z)$ varierer sakte, kan vi for små nok z finne $A_\nu(z)$ og $B_\nu(z)$ med å sjå bort frå alle ledd som ikkje inneheld $A_\mu(z)$, og setja $A_\mu(z) = A_\mu(0)$ på høgresida av likning (26). $A_\nu(z)$ finn vi med å multiplisere likning (26) med $\exp(-i\omega t + i\beta_\nu z)$ og integrere opp. Bare dersom vi kan finne p, μ og ν slik at $pG + \beta_\nu \approx \beta_\mu$ vil A_ν kunna veksa som funksjon av z. Elles vil vi integrere opp eksponensialfunksjonar som varierer raskt og midlar seg til null, og $A_\mu(z)$ forblir lik $A_\mu(0)$. På same måten kan vi for små z finne $B_\nu(z)$ med å multiplisere likning (26) med $\exp(-i\omega t - i\beta_\nu z)$ og integrere opp, og bare dersom vi kan finne p, μ og ν slik at $pG - \beta_\nu \approx \beta_\mu$ vil B_ν kunna veksa som funksjon av z. Dersom vi ser på integrala over eksponensialfunksjonane som det er snakk om, ser vi at for å få kopling til andre modi treng vi forskjellar mellom dei ulike $pG \pm \beta_\nu$ og β_μ som kan samanliknast med $|k_0 \Delta\varepsilon_{p,\nu,\mu}|$. Som nemnt ovanfor er $|\Delta\varepsilon|$ typisk mindre enn 10^{-3} i optiske fibrar, så det er små relative forskjellar i β_μ det er snakk om.

Vi har altså to grader av tilnærming som vi kan gjera, avhengig av kor stor forskjell det er mellom dei ulike $pG \pm \beta_\nu$ og β_μ:

1. Ukopla modi, den enklaste, som tillet oss å sjå bort frå alle andre ledd enn dei med $p = 0$ og $\nu = \mu$. Lysbølgjene er då lite påverka av braggitteret.

2. Kopla modi, slik at det finst minst ein p og ein ν som gjer at $pG \pm \beta_\nu \approx \beta_\mu$.

Referanse:

[1] Raman Kashyap, "Fiber Bragg Gratings," Academic Press, London 1999, ISBN: 0124005608, kapitel 4, 'Theory of Fiber Bragg Gratings.'

Sist oppdatert 24. oktober 2007