

# 2D fotonisk krystall i rommet

Aasmund S. Sudbø

La oss sjå på ein fotonisk krystall som er periodisk i x- og y-retninga og homogen i z-retninga, og bruke skalartilnærminga for feltet i den fotoniske krystallen. Skalartilnærminga er ein god modell for blochbølgjer som går nesten i z-retninga i ein fotonisk krystallfiber, dersom variasjonen i den relative permittiviteten  $\varepsilon(x, y)$  innanfor einigscella i x-y-planet er mykje mindre enn middelverdien av  $\varepsilon(x, y)$  over einigscella. I skalartilnærminga oppfyller feltet bølgløysninga

$$[\partial_x^2 + \partial_y^2 + \varepsilon(x, y) k_0^2] \varphi = k_z^2 \varphi, \quad (1)$$

der  $k_0 = \omega/c$  er vinkelrepetensen for lysbølgjene i vakuum,  $k_z$  er z-komponenten av blochvektoren for blochbølgjer i krystallen, og  $\varepsilon(x, y)$  er ein periodisk funksjon i x- og y-retning. La oss sjå på ein modell av ein fotonisk krystallfiber som er av eit glas med brytningsindeks  $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}$ , med rektangulære hol,  $d_x$  gonger  $d_y$  i kant, i eit rektangulært mønster med periode  $\Lambda_x$  i x-retning og  $\Lambda_y$  i y-retning:

$$\varepsilon(x, y) = \varepsilon_{\underline{(1,1)}}^{(1,1)} = \varepsilon_1 \text{ for } |x| < d_x/2 \text{ og } |y| < d_y/2 \text{ (i hola)}, \quad (2)$$

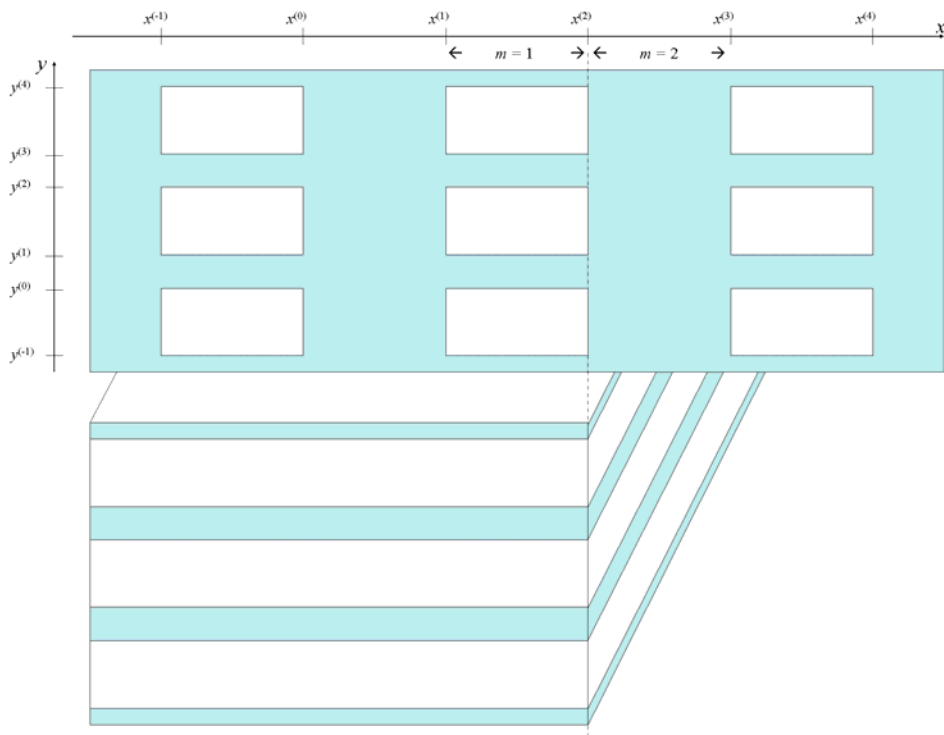
$$\varepsilon(x, y) = \varepsilon_{\underline{(2,2)}}^{(2,2)} = \varepsilon_2 = n_2^2 \text{ utanfor hola.} \quad (3)$$

I referanse [1] blir bølgleiarmodi analysert. Vi kan bruke den same formalismen som i [1] til å finne blochbølgjer i staden for bølgleiarmodi, men då må vi bruke som grensevilkår at  $\varphi(x, y)$  oppfyller blochbølgjevilkåra

$$\varphi(x + \Lambda_x, y) = \exp(ik_x \Lambda_x) \varphi(x, y) \quad (4)$$

$$\varphi(x, y + \Lambda_y) = \exp(ik_y \Lambda_y) \varphi(x, y). \quad (5)$$

For å modellere den fotoniske krystallfiberen kan vi, i analogi med det som er gjort i [1], innføre to filmstrukturar, nummerert med  $m$ , der  $m$  er 1 eller 2. Filmstruktur nummer 1 er periodisk i y-retninga, og lag som er parallelle med x-z-planet, med vekselvis  $\varepsilon_1$  og  $\varepsilon_2$ , medan filmstruktur nummer 2 er homogent glas, som skissert i figuren nedanfor.



Øvste delen av figuren viser tre gonger tre periodar av eit tverrsnitt av krystallen, i x-y-planet. z-aksen går innover i figuren. Nedre del av figuren viser i perspektiv grenseflata i y-z-planet mellom det homogene området for  $x > x^{(2)}$  og den periodiske filmstrukturen vi har for  $x < x^{(2)}$ . Medan filmstruktur nr. 1 ligg mellom  $x = x^{(1)}$  og  $x = x^{(2)}$  i øvre del av figuren, er den same strukturen i nedre del av figuren teikna lik for alle  $x < x^{(2)}$ . Vi treng to ulike filmstrukturar for å bygge opp den fotoniske krystallen, den som ligg mellom  $x = x^{(1)}$  og  $x = x^{(2)}$ , og den som ligg mellom  $x = x^{(2)}$  og  $x = x^{(3)}$ . Dei to strukturane har relativ permittivitet

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(1)}(y) &= \varepsilon^{(1,1)} = \varepsilon_1 \text{ for } |y| < d_y/2 \text{ (i hola)} \\ &= \varepsilon^{(1,2)} = \varepsilon_2 \text{ for } \Lambda_y/2 > |y| > d_y/2 \text{ (mellom hola)} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{og } \varepsilon^{(2)}(y) = \varepsilon^{(2,1)} = \varepsilon^{(2,2)} = \varepsilon_2. \text{ (homogent glas mellom hola)} \quad (7)$$

La feltet i filmstruktur nr.  $m$  vera

$$\varphi^{(m)}(x, y) = \sum_{p=0}^{\infty} u_p^{(m)}(x) \varphi_p^{(m)}(y) \quad (8)$$

der  $\varphi_p^{(m)}(y)$  er modusfeltet til bloch-modus nr.  $p$  i filmstruktur nr.  $m$ . Vi kallar funksjonane  $u_p^{(m)}(x)$  for blochmodus-amplituder, eller BM-amplituder. Blochmodusfelta (BM-felta) har tilhøyrande fyrste- og andrederiverte  $\varphi_p^{(m)}(y)'$  og  $\varphi_p^{(m)}(y)''$ , og oppfyller likningane

$$\varphi_p^{(m)}(y)'' + k_o^2 \varepsilon^{(m)}(y) \varphi_p^{(m)}(y) = k_p^{(m)2} \varphi_p^{(m)}(y). \quad (9)$$

For å finne BM-felta i ein periodisk filmstruktur kan vi bruke framgangsmåten frå øvingsoppgåva om dette (Øving 1). I den øvinga såg vi på bølger som gjekk vinkelrett på grenseflatene i filmstrukturen. Vi er interesserte i blochbølger som går i ei vilkårlig retning i rommet, og som dermed har ein blochvektor med komponent  $k_y$  vinkelrett på grenseflatene og  $k_p^{(m)}$  parallelt med grenseflatene. Vidare har parallellkomponenten  $k_p^{(m)}$  både ein x- og ein z-komponent, slik at

$$k_p^{(m)2} = k_{xp}^{(m)2} + k_z^2. \quad (10)$$

Etter kvart skal vi skøyte saman BM-felt og x-derivert av feltet i y-z-planet ved  $x = x^{(2)}$ , og der vi har rekkeutviklinga (8) med  $m = 1$  for  $x < x^{(2)}$  og  $m = 2$  for  $x > x^{(2)}$ . Vi skal gjera felttilpasninga bare innanfor ein fotonisk krystallperiode, frå  $y = -\Lambda_y/2$  til  $y = \Lambda_y/2$ , men vi vil ha blochbølgjer som oppfyller likning (1) med same blochvektor overalt i rommet. Då må blochbølgjene  $\varphi_p^{(m)}(y)$  oppfylle blochbølgjevilkåret (5) for alle  $m$ , dvs for begge filmstrukturane vi treng for å bygge opp den fotoniske krystallen.

Filmstruktur nummer 2 er den som er lettast å analysere, sidan den er homogen og har planbølgjeløysingar. Det er rettfram å vise at der må BM-feltet ha forma

$$\varphi_p^{(2)}(y) = \exp[i(k_y + 2p\pi/\Lambda_y)y], \quad (11)$$

og den tilhøyrande komponenten av blochvektoren i x-z-planet får lengda

$$k_p^{(2)} = \sqrt{\varepsilon^{(2)}k_0^2 - (k_y + 2p\pi/\Lambda_y)^2}, \quad (12)$$

der  $p$  er eit vilkårlig heiltal.

Det er verdt å merke seg at i ein homogent filmstruktur er  $k_p^{(2)}$  reell for nokre få av dei lågaste ordens blochmodi (liten  $|p|$ ), og reint imaginær for alle høgare ordens modi. Modi som har imaginær  $k_p^{(2)}$  seier vi at er evanescente, dvs. forplantar seg ikkje som bølgjer i noko retning i x-z-planet.

I filmstruktur nummer 1 er det litt vanskelegare, men vi kan bruke framgangmåten frå øvingsoppgåva om den periodiske filmstrukturen (Øving 1). I denne øvinga såg vi på bølgjer som gjekk vinkelrett på grenseflatene. Vi er interesserte i blochbølgjer som går i ei vilkårlig retning i høve til grenseflatene, og som altså har ein blochvektor med komponent  $k_y$  vinkelrett på grenseflatene og  $k_p^{(1)}$  parallelt med grenseflatene.

La oss innføre (jfr. figuren)

$$y^{(1)} = -d_y/2, \quad y^{(2)} = d_y/2, \quad y^{(3)} = \Lambda_y - d_y/2. \quad (13)$$

I kvart lag  $n$  i filmstrukturen kan vi sjå på blochbølgjene som ein superposisjon av to bølgjer som har bølgjevektorkomponentar  $\pm k_{yp}^{(1,n)}$  vinkelrett på grenseflatene og  $k_p^{(1)}$  parallelt med grenseflatene:

$$k_{yp}^{(1,1)} = k_{yp}^{(1,3)} = \sqrt{\varepsilon^{(1,1)}k_0^2 - k_p^{(1)2}} \quad (14)$$

$$\text{og } k_{yp}^{(1,2)} = \sqrt{\varepsilon^{(1,2)}k_0^2 - k_p^{(1)2}}. \quad (15)$$

La oss her minne om at vi er ute etter ei likning som inneheld  $k_p^{(1)}$ , og at  $k_{yp}^{(1,1)}$  og  $k_{yp}^{(1,2)}$  er hjelpestorleikar som er uttrykte ved  $k_p^{(1)}$ .

I lag nummer  $n$ , for  $y^{(n)} \leq y \leq y^{(n+1)}$ , kan vi då skrive BM-feltet  $\varphi_p^{(1)}(y)$  og det deriverte som

$$\begin{aligned} \varphi_p^{(1)}(y) &= \varphi_p^{(1)}(y^{(n)}) \cos \left[ k_{yp}^{(1,n)} (y - y^{(n)}) \right] + (\varphi_p^{(1)}(y^{(n)})' / k_{yp}^{(1,n)}) \sin \left[ k_{yp}^{(1,n)} (y - y^{(n)}) \right] \cdot 6 \\ \text{og } \varphi_p^{(1)}(y)' &= -k_{yp}^{(1)} \varphi_p^{(1)}(y^{(n)}) \sin \left[ k_{yp}^{(1,n)} (y - y^{(n)}) \right] + \varphi_p^{(1)}(y^{(n)})' \cos \left[ k_{yp}^{(1,n)} (y - y^{(n)}) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

La oss som i øving 1 innføre kolonnevektorar

$$\varphi_p^{(1,n)} = \begin{bmatrix} \varphi_p^{(1)}(y^{(n)}) \\ \varphi_p^{(1)}(y^{(n)})' \end{bmatrix}, \quad \text{for } n = 1, 2, \text{ og } 3. \quad (18)$$

og 2x2-matriser

$$\mathbf{M}_p^{(1,n)} = \begin{bmatrix} c_p^{(1,n)} & s_p^{(1,n)}/k_{yp}^{(1,n)} \\ -s_p^{(1,n)}k_{yp}^{(1,n)} & c_p^{(1,n)} \end{bmatrix}, \quad \text{for } n = 1 \text{ og } 2. \quad (19)$$

med

$$c_p^{(1,n)} = \cos \left[ k_{yp}^{(1,n)} \left( y^{(1,n+1)} - y^{(1,n)} \right) \right] \quad \text{og} \quad s_p^{(1,n)} = \sin \left[ k_{yp}^{(1,n)} \left( y^{(1,n+1)} - y^{(1,n)} \right) \right]. \quad (20)$$

Kontinuitet av feltet og y-derivert ved  $y = y^{(2)}$  og  $y = y^{(3)}$  gjev oss matriselikningane

$$\varphi_p^{(1,3)} = \mathbf{M}_p^{(1,2)} \varphi_p^{(1,2)} = \mathbf{M}_p^{(1,2)} \mathbf{M}_p^{(1,1)} \varphi_p^{(1,1)}. \quad (21)$$

Dersom blochbølgjevilkåret (5) skal vera oppfylt må

$$\varphi_p^{(1,3)} = \exp(ik_y \Lambda_y) \varphi_p^{(1,1)}, \quad (22)$$

slik at  $\exp(ik_y \Lambda_y)$  må vera ein eigenverdi for 2x2-matrisen  $\mathbf{M}_p^{(1,2)} \mathbf{M}_p^{(1,1)}$ , noko som vi i øving 1 viste at var ekvivalent med

$$\cos(k_y \Lambda_y) = \cos \left[ k_{yp}^{(1,1)} d_y + k_{yp}^{(1,2)} (\Lambda_y - d_y) \right] - \frac{(k_{yp}^{(1,1)} - k_{yp}^{(1,2)})^2}{2k_{yp}^{(1,1)} k_{yp}^{(1,2)}} \sin \left( k_{yp}^{(1,1)} d_y \right) \sin \left[ k_{yp}^{(1,2)} (\Lambda_y - d_y) \right]. \quad (23)$$

Dette er den likninga for  $k_p^{(1)}$  som vi vil fram til. Om vi spesifiserer  $k_0$  og  $k_y$  kan vi finne  $k_p^{(1)}$  ved hjelp av (23), deretter finne  $\varphi_p^{(1,1)}$  som ein eigenvektor for matrisen  $\mathbf{M}_p^{(1,2)} \mathbf{M}_p^{(1,1)}$ , og til slutt finne  $\varphi_p^{(1)}(y)$  som uttrykt i (16).

Så går vi over til å sjå på x-retninga. La oss innføre

$$x^{(1)} = -d_x/2, \quad x^{(2)} = d_x/2, \quad x^{(3)} = \Lambda_x - d_x/2 \quad (24)$$

og breidda  $d_x^{(m)}$  på kvar filmstruktur,

$$d_x^{(m)} = x^{(m+1)} - x^{(m)}.$$

Tak det som ei øvingsoppgåve å vise at dersom (8) skal oppfylle (1) så kan BM-amplituden  $u_p^{(m)}(x)$  skrivast

$$u_p^{(m)}(x) = u_p^{(m)}(x^{(m)}) \cos \left[ k_{xp}^{(m)} \left( x - x^{(m)} \right) \right] + (u_p^{(m)}(x^{(m)})' / k_{xp}^{(m)}) \sin \left[ k_{xp}^{(m)} \left( x - x^{(m)} \right) \right], \quad (25)$$

der likning (10) gjev

$$k_{xp}^{(m)} = \sqrt{k_p^{(m)2} - k_y^2} \quad (26)$$

Det er verd å påpeike at det som er sagt om evanescente blochmodi i eit homogent stoff også gjeld generelt for blochmodi i tapsfrie filmstrukturar:  $k_p^{(m)}$  er reell for nokre få av dei lågaste ordens blochmodi, og reint imaginær for alle høgare ordens modi. Likning (26) visar då at høgareordens modi har imaginær  $k_{xp}^{(m)}$  og altså er evanescente i x-retninga, dersom dei har ein reell BV-komponent  $k_y$  i y-retninga.

La oss innføre egne symbol for BM-amplitudane  $u_p^{(m)}(x)$  og dei deriverte på kvar side av filmstruktur nummer  $m$

$$u_p^{(m,l,f)} = u_p^{(m)}(x^{(m)}) \quad \text{og} \quad u_p^{(m,l,d)} = u_p^{(m)}(x^{(m)})' d_x^{(m)} \quad \text{på venstresida, og på høgresida} \quad (27)$$

$$u_p^{(m,r,f)} = u_p^{(m)}(x^{(m+1)}) = u_p^{(m,l,f)} \cos \left( k_{xp}^{(m)} d_x^{(m)} \right) + \left( u_p^{(m,l,d)} / \left( k_{xp}^{(m)} d_x^{(m)} \right) \right) \sin \left( k_{xp}^{(m)} d_x^{(m)} \right) \quad (28)$$

$$u_p^{(m,r,d)} = u_p^{(m)}(x^{(m+1)})' d_x^{(m)} = u_p^{(m,l,d)} \cos \left( k_{xp}^{(m)} d_x^{(m)} \right) - u_p^{(m,l,f)} k_{xp}^{(m)} d_x^{(m)} \sin \left( k_{xp}^{(m)} d_x^{(m)} \right) \quad (29)$$

Legg merke til at i likningane ovanfor er dei deriverte BM-amplitudane definerte som normaliserte med filmbreiddene  $d_x^{(m)}$ . Då kan vi innføre kolonnevektorane  $\mathbf{u}^{(m,s,t)}$  med vektorelement  $u_p^{(m,s,t)}$ , der  $s$  står for side av filmstrukturen ( $s = l$  i posisjon  $x^{(m)}$  og  $s = r$  i posisjon  $x^{(m+1)}$ ) og  $t$  står for amplitude eller x-derivert ( $t = f$  eller  $t = d$ ). Vidare innfører vi diagonale matriser  $\mathbf{K}^{(m)}$  med diagonalelement

$$K_{p,p}^{(m)} = k_{xp}^{(m)} d_x^{(m)}, \quad (30)$$

Då kan likningane (28) og (29) skrivast

$$\mathbf{u}^{(m,r,f)} = \cos\left(\mathbf{K}^{(m)}\right) \mathbf{u}^{(m,l,f)} + \left(\sin\left(\mathbf{K}^{(m)}\right) / \mathbf{K}^{(m)}\right) \mathbf{u}^{(m,l,d)} \quad (31)$$

$$\mathbf{u}^{(m,r,d)} = \cos\left(\mathbf{K}^{(m)}\right) \mathbf{u}^{(m,l,d)} - \mathbf{K}^{(m)} \sin\left(\mathbf{K}^{(m)}\right) \mathbf{u}^{(m,l,f)} \quad (32)$$

Vi skal skøyte saman felta på kvar side av y-z-planet ved  $x = x^{(2)}$ , og feltet ved  $x = x^{(3)}$  skal skøytast saman med feltet ved  $x = x^{(1)}$ , med faseskiftet  $k_x \Lambda_x$  som blochbølgjeløysing krev. La oss avslutte (8) etter  $P$  ledd:

$$\varphi^{(m)}\left(x^{(m)}, y\right) = \sum_{p=0}^{P-1} u_p^{(m)}\left(x^{(m)}\right) \varphi_p^{(m)}(y) = \sum_{p=0}^{P-1} u_p^{(m-1)}\left(x^{(m)}\right) \varphi_p^{(m-1)}(y), \quad (33)$$

og tilsvarende likningar for dei deriverte  $\partial\varphi^{(m)}/\partial y$ . Då får vi

$$\sum_{p=0}^{P-1} u_p^{(2)}\left(x^{(2)}\right) \varphi_p^{(2)}(y) = \sum_{p=0}^{P-1} u_p^{(1)}\left(x^{(2)}\right) \varphi_p^{(1)}(y) \quad (34)$$

$$\text{og } \exp(ik_x \Lambda_x) \sum_{p=0}^{P-1} u_p^{(1)}\left(x^{(1)}\right) \varphi_p^{(1)}(y) = \sum_{p=0}^{P-1} u_p^{(2)}\left(x^{(3)}\right) \varphi_p^{(2)}(y) \quad (35)$$

som kan skrivast

$$\mathbf{O} \mathbf{u}^{(2,l,t)} = \mathbf{u}^{(1,r,t)} \quad (36)$$

$$\text{og } \exp(ik_x \Lambda_x) \mathbf{u}^{(1,l,t)} = \mathbf{O} \mathbf{u}^{(2,r,t)} \quad (37)$$

Vi har då multiplisert (34) og (35) med  $\varphi_p^{(1)}(y)$ , integrert over ein periode i y-retning, innført matrisen  $\mathbf{O}$  med matriseelement

$$O_{pq} = \Lambda_y^{-1} \int_0^{\Lambda_y} dy \varphi_p^{(1)}(y)^* \varphi_q^{(2)}(y), \quad (38)$$

og bruka det at dei ulike BM-felta  $\varphi_p^{(m)}(y)$  for ein gjeven filmstruktur  $m$  og ein gjeven  $k_y$  kan veljast ortonormale,

$$\Lambda_y^{-1} \int_0^{\Lambda_y} dy \varphi_p^{(m)}(y)^* \varphi_q^{(m)}(y) = \delta_{pq}, \quad (39)$$

der Kroneckers delta  $\delta_{pq} = 1$  dersom  $p = q$  og  $\delta_{pq} = 0$  dersom  $p \neq q$ .

Det er verd å merke seg at likningane (36) og (37) gjeld både for BM-amplitudane,  $t = f$ , og for dei x-deriverte,  $t = d$ .

Tak det som ei rekneøving å koma fram til noko som liknar eit eigenverdiproblem for  $\exp(ik_x \Lambda_x)$ .

[1] A.S. Sudbø, "Film Mode Matching: A Versatile Numerical Method for Vector Mode Field Calculations in Dielectric Waveguides," *Pure and Applied Optics*, vol. 2, pp. 211-233 (1993).

*Sist oppdatert 3. februar 2009*