Del 5 Måleusikkerhet
5.2 – Type A og type B usikkerhetsbidrag

Utdrag fra VIM:

2.28 Type A evaluation of measurement uncertainty

- Evaluation of a component of measurement uncertainty by a statistical analysis of measured quantity values obtained under defined measurement conditions

2.29 Type B evaluation of measurement uncertainty

- Evaluation of a component of measurement uncertainty determined by means other than a type A evaluation of measurement uncertainty

Eksempel på målefunksjon

Tenk at vi kalibrerer et håndholdt multimeter mot en kalibrator. I EA-4/02 S9 (http://www.european-accreditation.org/publication/ea-4-02-m) er det viset et eksempel på et usikkerhetsbudsjett for denne kalibreringen ved 100 V DC.

Dette tar utgangspunkt i følgende målefunksjon for feilvisningen E_x:

$$E_x = V_{ix} - V_s + \delta V_{ix} - \delta V_s$$

hvor

V_{ix}: Avlest spenning (middel av i observasjoner)

V_s: Spenning generert av kalibratoren

δV_{ix}: Korreksjon for visningen i multimeter som følge av begrenset oppløsning

δV_s: Korreksjon for feil i kalibratorens genererte spenning som følge av:

- drift fra sist kalibrering
- avvik i temperatur
- endring i forsyningsspenning
- belastningseffekt

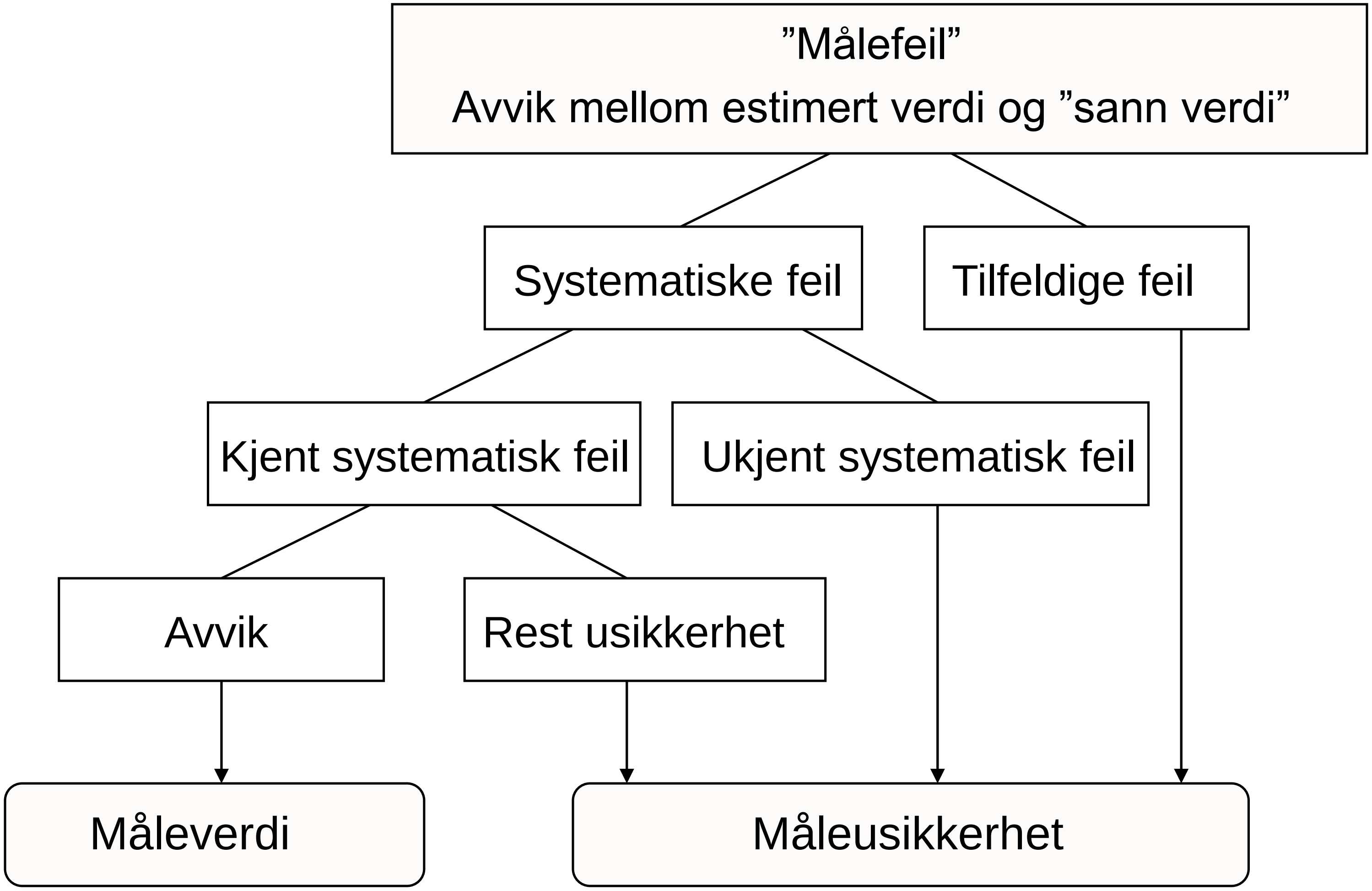
Definisjoner, begreper i NA Dok 52

X:	teoretisk inngangsstørrelse
Y:	teoretisk utgangsstørrelse (teoretisk resultat ved ideelle betingelser)
x:	estimert inngangsstørrelse
y:	estimert utgangsstørrelse (resultat)
q_i:	måleverdi
$\bar{q}$:	middelverdi
$s^2(q)$:	eksperimentell varians (standardavvik = kvadratrot av varians)
$s(q)$:	eksperimentelt (estimert) standardavvik
$s(\bar{q})$:	eksperimentelt (estimert) standardavvik for middelverdi
$u(x_i)$:	standard usikkerhet for inngangsstørrelse x_i
c_i:	Følsomhetsfaktor (y er følsomhet for variasjon i inngangsstørrelse x_i)
$u_i(y)$:	Bidrag til kombinert måleusikkerhet fra inngangsstørrelse x_i
	$u_i(y) = c_i \bullet u(x_i)$
k:	dekningsfaktor
ν_i:	frihetsgrader for inngangsstørrelse x_i
$u_c(y)$:	kombinert standard måleusikkerhet
ν_{eff}:	effektive frihetsgrader for resultatet (utgangsstørrelse y)
U:	utvidet måleusikkerhet

Type A, type B, tilfeldige og systematiske effekter

- “Type A” og “Type B” er ikke det samme som “tilfeldige” og “systematiske”
- “Type A” og “Type B” er to ulike måter å evaluere usikkerhetsbidrag på
- Det er ingen grunn til å lage egne navn eller skille de på noen måte
- “Type B” evaluering kan være like ”god” som en “Type A” evaluering

Feil og variasjon i målingene gir måleusikkerhet

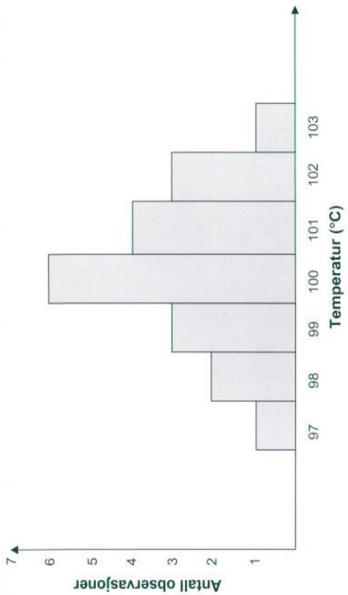


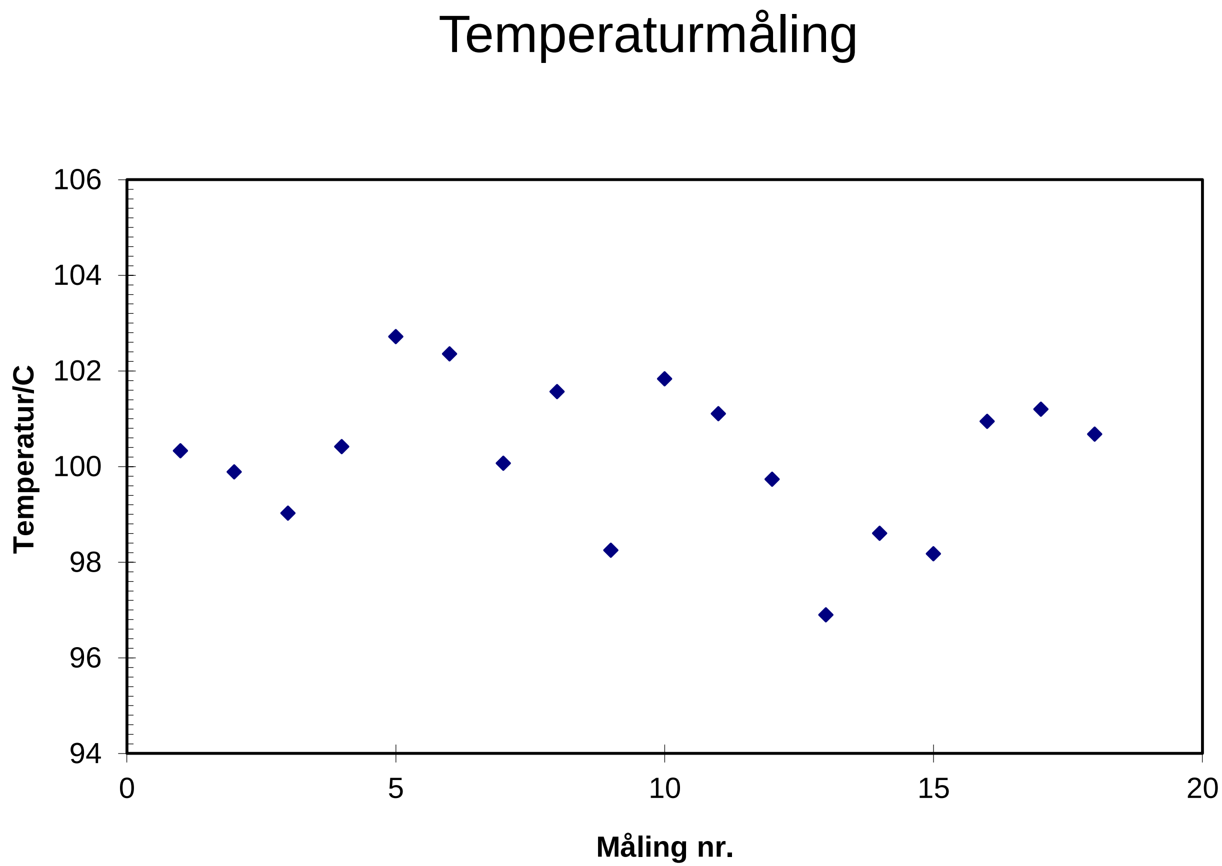
Type A evaluering av usikkerhet

Beskrivelse av type A evaluering:

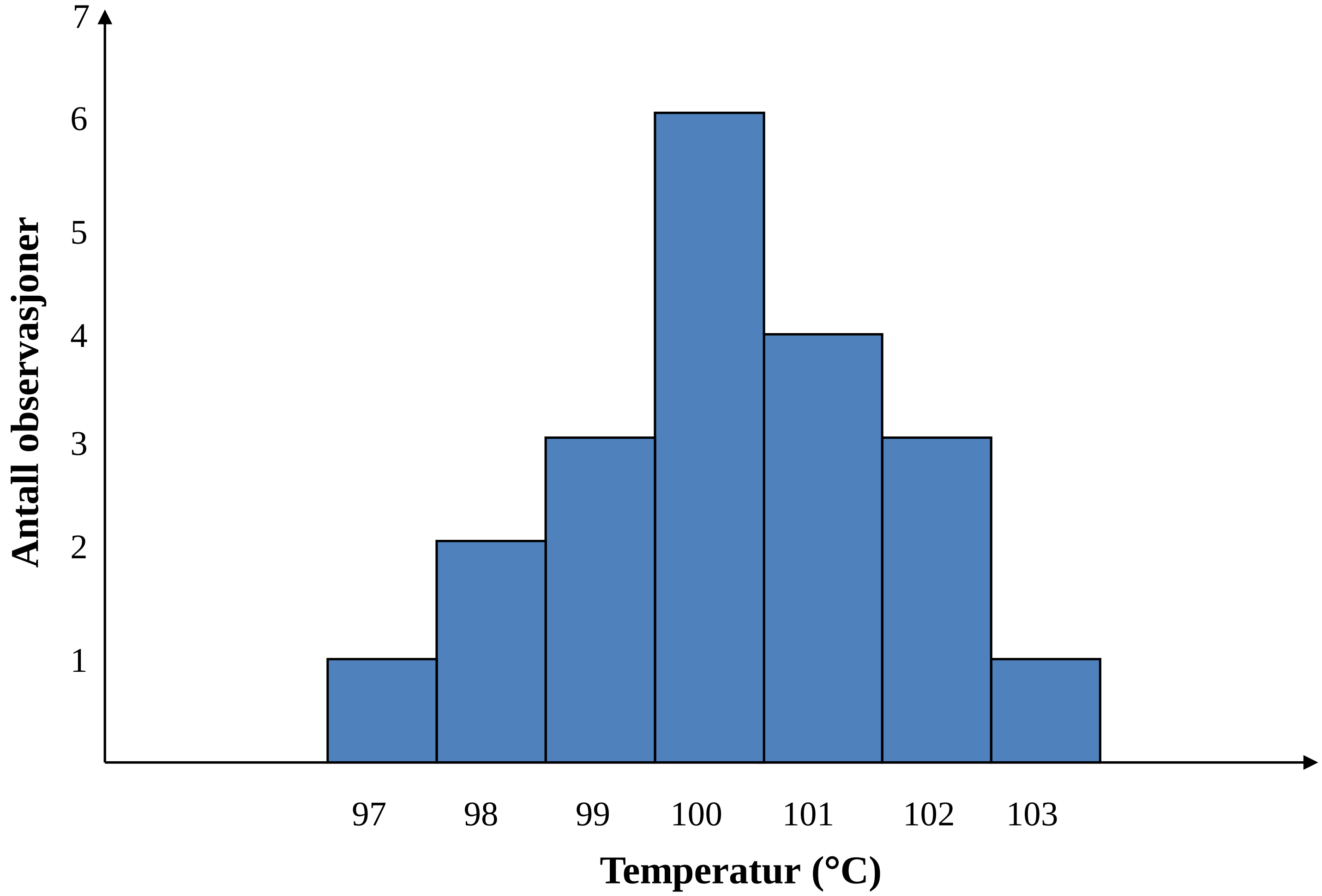
- Den estimerte variansen $u^2(x_i)$ (eller standard usikkerheten $u(x_i)$) til estimatet x_i av en inngangsstørrelse X_i, som er bestemt ved en **statistisk analyse** av en **serie observasjoner** gjort under **identiske forhold**

Statistisk analyse

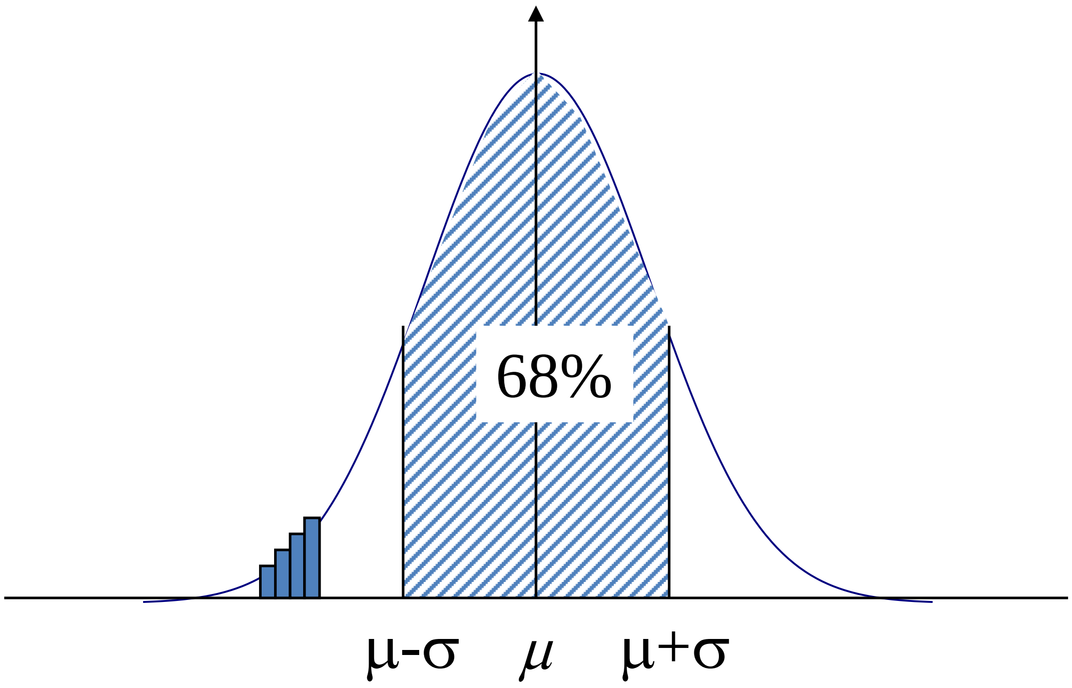




Histogram (stolpediagram)

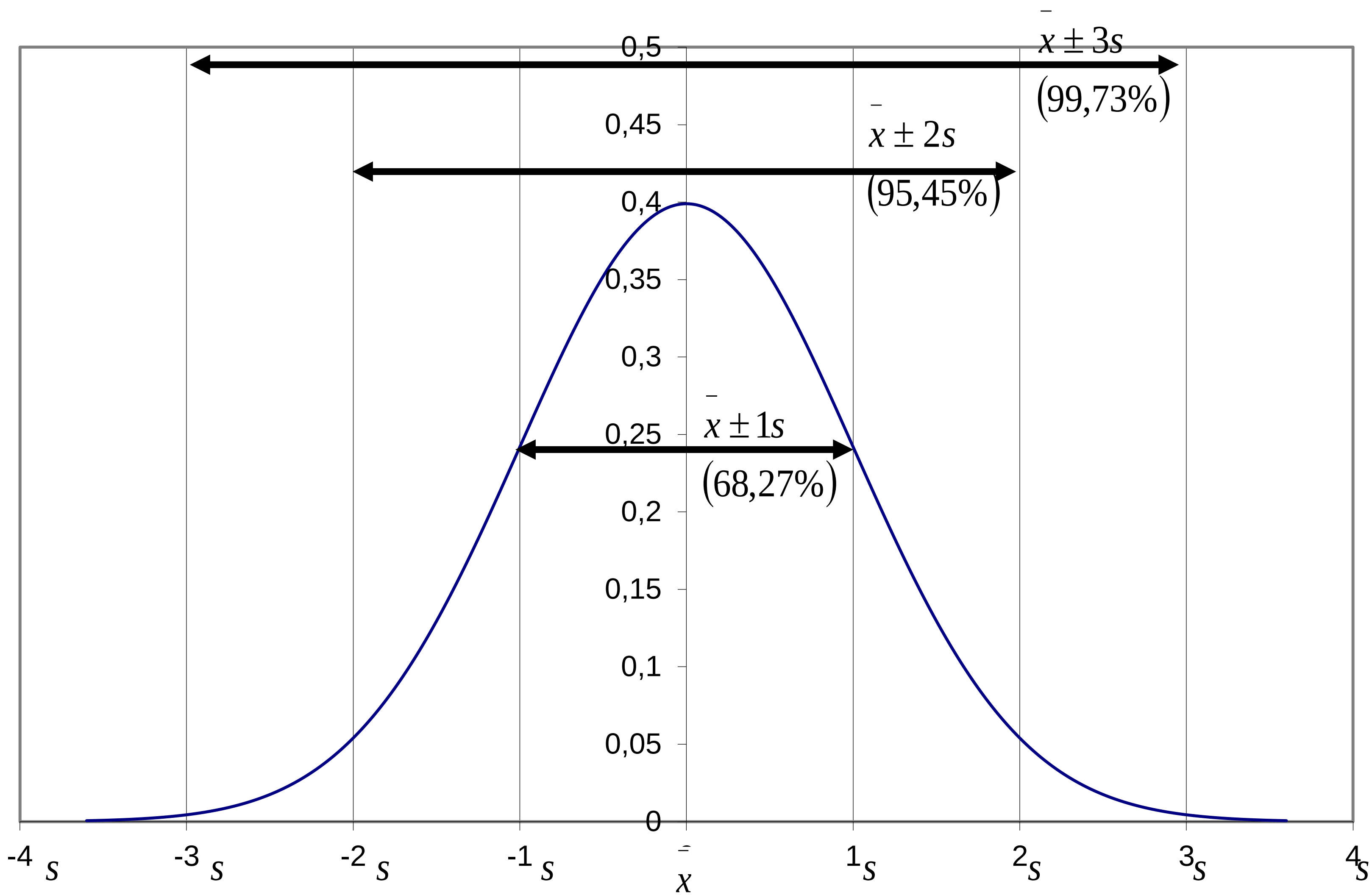


Normalfordeling (Gaussfordeling)

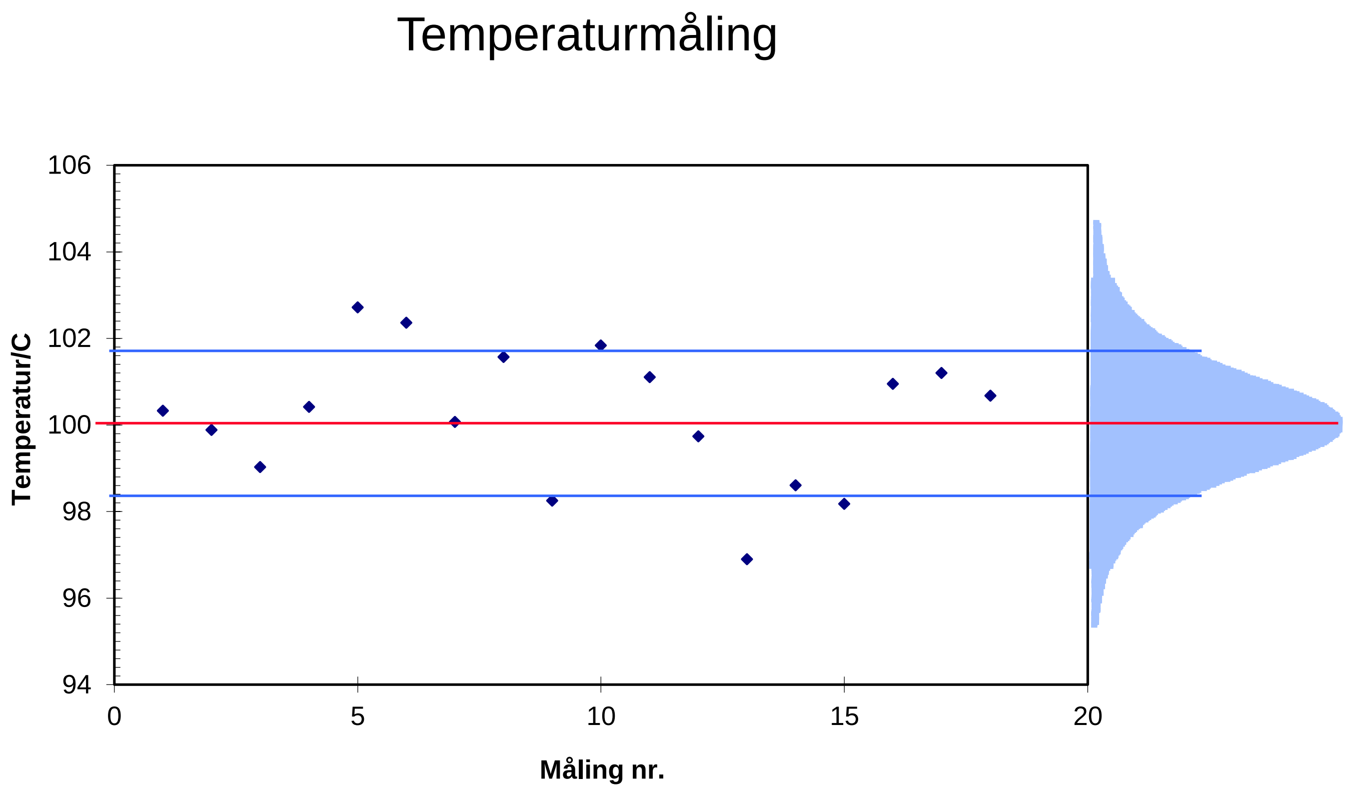


μ = Middelverdi
σ = Standardavvik

Normalfordelingens egenskaper



Statistisk analyse



Beregne (estimere) middelverdien

- Middelverdien er estimert ved hjelp av:

$$\bar{q} = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q_i = \frac{1}{n}\left(q_1 + q_2 + \dots + q_n\right)$$

Beregne (estimere) varians og standardavvik

Variansen i en serie (k=1 til n) observasjoner q_k skrives $s^2(q)$, standardavviket er kvadratroten av variansen og skrives s(q):

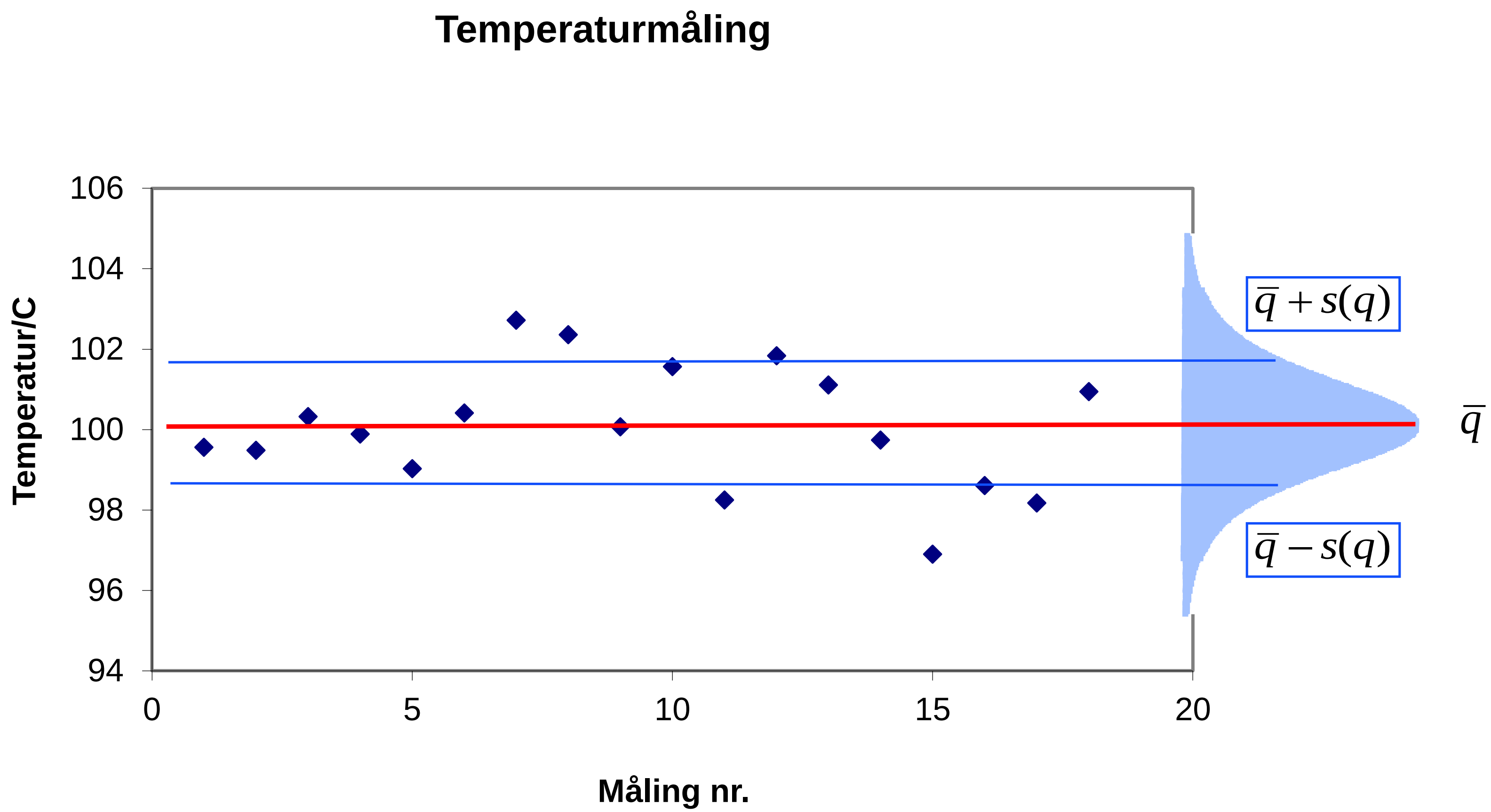
$$s^2(q) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(q_k - \bar{q})^2$$

s(q) = eksperimentelt standard avvik til enkeltverdi

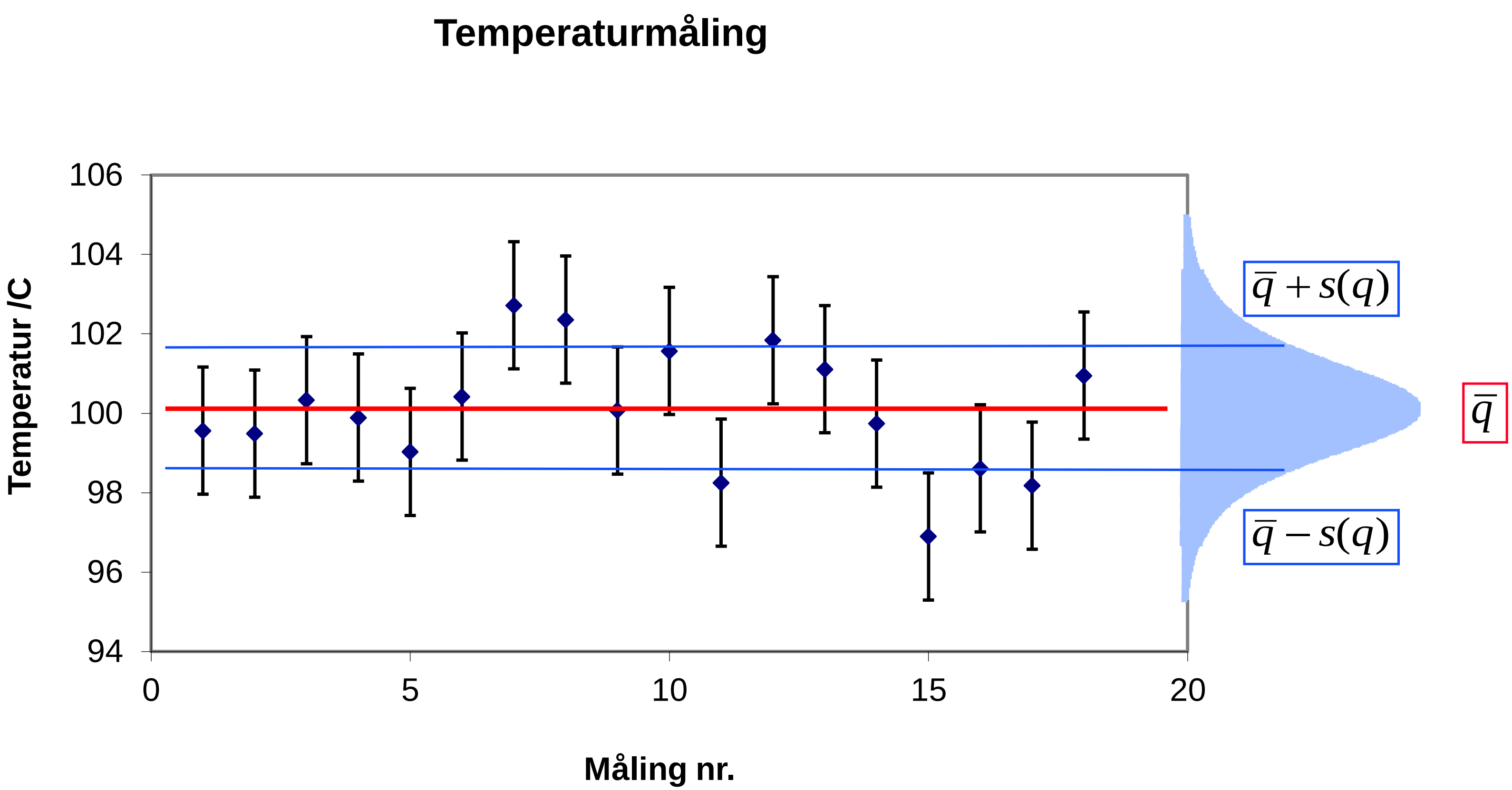
Eksempel på regnearkfunksjoner (Excel 2007, norsk)

- Variansen til tallene i cellene A1 til A20: VARIANS(A1:A20)
- Standardavviket til tallene i cellene A1 til A20: STDAV(A1:A20)

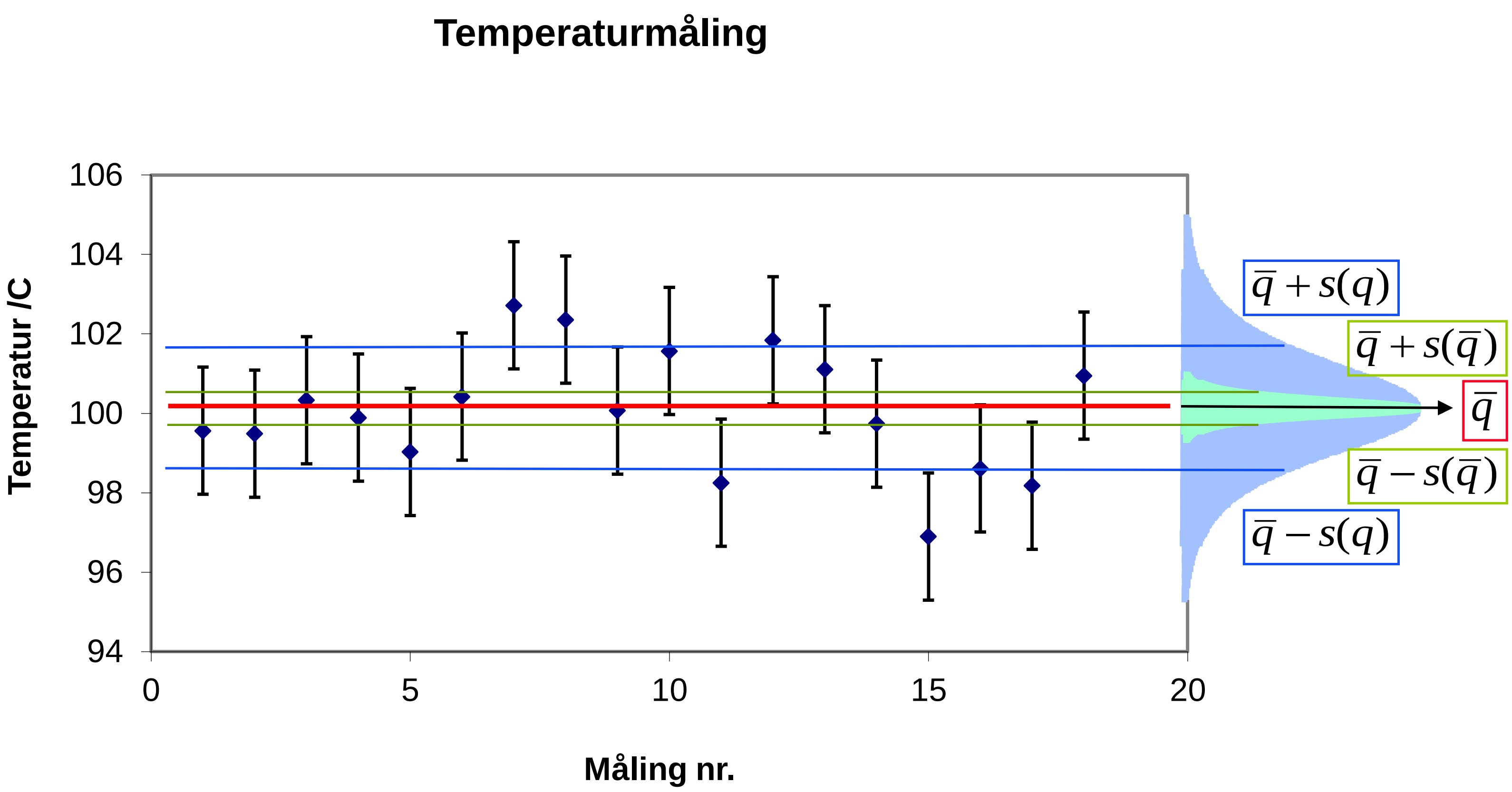
Statistisk analyse av repeterte målinger



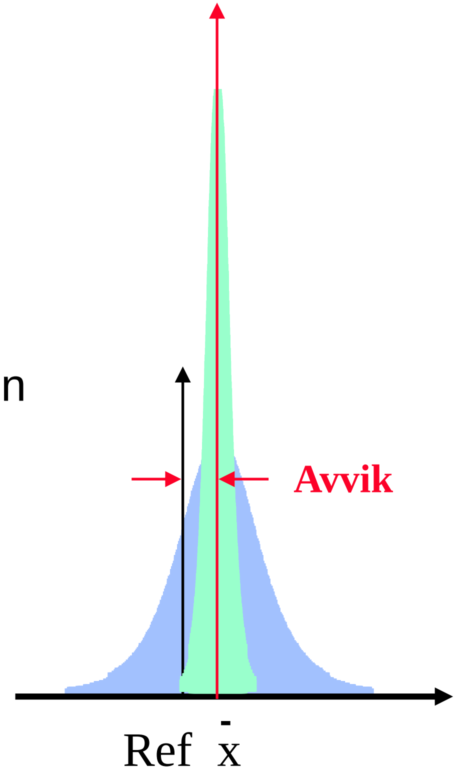
Statistisk analyse av repeterte målinger *(forts.)*



Statistisk analyse av repeterte målinger *(forts.)*



Repeterbarhet



Når vi gjør **repeterte** målinger for å finne et gjennomsnitt, ønsker vi **minst mulig variasjon**.

Mange observasjoner gir et bedre mål for beliggenheten til gjennomsnittet – dvs senteret til fordelingen.

Når n øker, konvergerer s mot en bestemt verdi – dvs bredden til fordelingen blir bedre kjent.

Bidrag til måleusikkerheten

Vi benytter gjennomsnittet av mange målinger som beste estimat for måleresultatet, derfor er usikkerheten i målingen gitt av standardavviket til gjennomsnittet.

$$u_{repeterbarhet} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

s: observert standardavvik til fordelingen

n: antall observasjoner

Estimat for variansen til middelverdien

$s^2(q)$ = eksperimentelt standardavvik til enkeltverdi

$s^2(\overline{q})$ = eksperimentelt standardavvik til middelverdien

Denne er gitt som:

$$s^2(\overline{q}) = \frac{s^2(q)}{n}$$

Justervesenet

UiO

Standard usikkerhet

Estimatet av inngangsstørrelsen, x_i, er gitt på grunnlag av observasjonene q_i.

$$x_i = \overline{q}$$

Estimatet av standard usikkerhet er gitt ved standardavviket til middelverdien

$$u(x_i) = s(\overline{q})$$

Frihetsgrader

Antall frihetsgrader er et mål på kunnskapen om en statistisk fordeling.

Dersom *n* uavhengige observasjoner skal brukes til å bestemme *m* målestørrelser, så er ***frihetsgraden*** v_i til én enkelt målestørrelse:

$$v_i = n - m$$

Dersom *n* uavhengige observasjoner skal brukes til å bestemme en middelverdi til en målestørrelse, så er ***frihetsgraden*** v

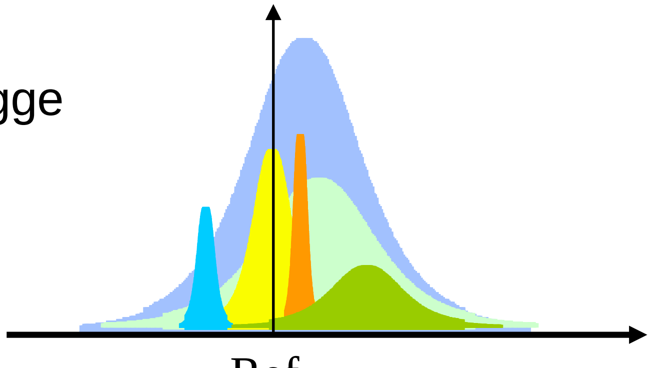
$$v_i = n - 1$$

Dersom fordelingen er kjent/definert, er det et uendelig antall frihetsgrader.

Reproduserbarhet

Når vi gjør reproduserte målinger ønsker vi å kartlegge **hele variasjonsbredden.**

Reproduserbarheten gir kunnskap om den samlede betydningen av at mange effekter bidrar til variasjon.



Bidrag til måleusikkerheten

Reproduserbarheten fanger opp mange (alle?) tilfeldige og systematiske effekter. Nye målinger vil dermed gi nye bidrag til den totale spredningen.

Dersom vi ikke korrigerer for de systematiske effektene, vil hele variasjonsbredden bidra til måleusikkerhet.

Dersom vi gjør korreksjoner for systematiske effekter blir reproduserbarheten mindre, men de bidrar likevel til måleusikkerhet, fordi det gjenstår en usikkerhet i korreksjonene.

$$u_{reprodusebarhet} = s$$ s: observert standardavvik

Type B evaluering av usikkerhet

Definisjon, type B-evaluering:

- Den estimerte variansen $u^2(x_i)$(eller standard usikkerheten $u\,(x_i)$) til estimatet x_i av en inngangsstørrelse X_i, som ikke er bestemt ved gjentatte målinger, kan bestemmes ved "vitenskapelig" vurdering basert på all mulig tilgjengelig informasjon om variasjonen av X_i.

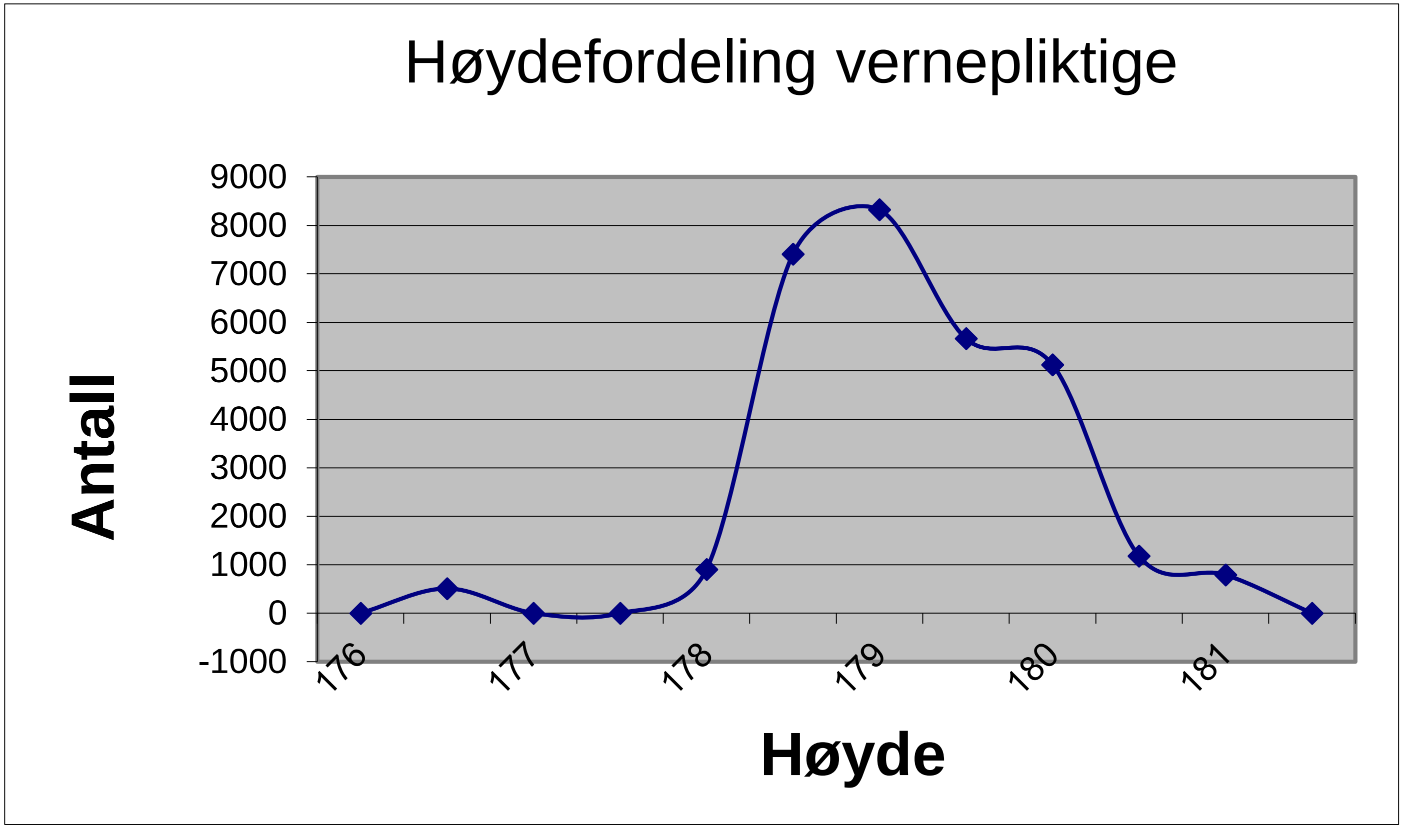
Type B usikkerhet

$u(x_i)$ fremkommer ved “vitenskapelig” vurdering basert på “all mulig” tilgjengelig informasjon om hvordan målestørrelsen kan variere.

- **Fordelingsfunksjonen antas som kjent. Vi definerer dermed en fordelingsfunksjon med en kontinuerlig sannsynlighetsfordeling med kjent middelverdi og standardavvik. Den teoretiske tilpasningen må være argumentert og konservativ.**
- Ofte er det mange usikkerhetskomponenter av type B
- Ofte er det korreksjoner med forventningsverdi lik null, men med varians forskjellig fra null

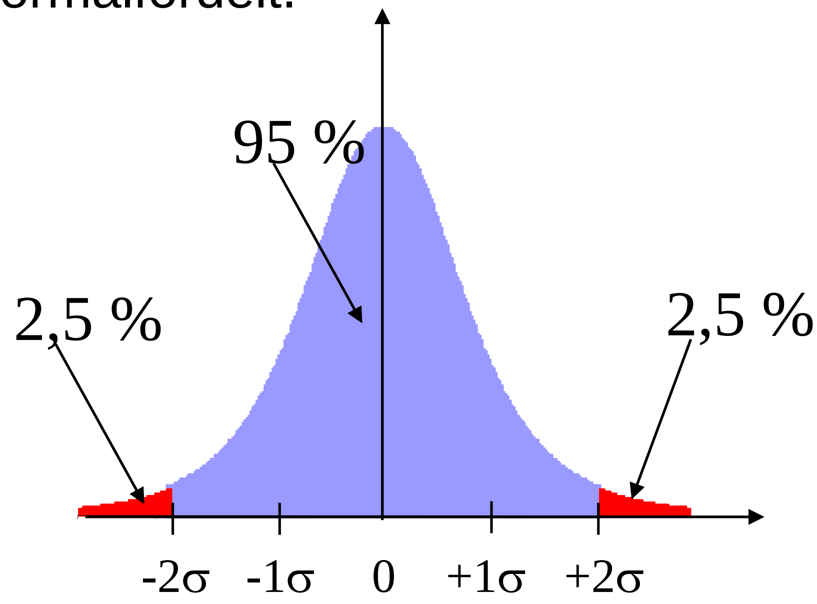
Eksempel på en (eller flere) fordeling

Histogram over høyde til vernepliktige.
Hvordan vil populasjonen være fordelt?



Normalfordelingen
(Gauss-fordeling, klokkefordeling)

Normalfordelingen påtreffes ofte i naturen og når vi ser på tilfeldige variasjoner. Når vi summerer 3 eller flere variable (som kan ha vilkårlige fordelinger) sier Sentralgrenseteoremet at summen er tilnærmet normalfordelt.



Dekningsnivå/ Konfidensnivå (%)	Dekningsfaktor/ Konfidensintervall (k)
68,3	1
90	1,65
95	1,96
95,45	2
99	2,58
99,7	3

Normalfordelingen *(forts.)*

I kalibreringsbevis er ofte resultatet rapportert å være normalfordelt, og usikkerheten er angitt med en dekningssannsynlighet på ca. 95 %. Det er da benyttet en dekningsfaktor k=2 for å gå fra et dekningsintervall på 1 standardavvik til 2 standardavvik.

$$Y = y \pm U$$

For å finne standard usikkerhet for dette normalfordelte type B usikkerhetsbidraget, må U divideres på 2 (k=2).

$$u(x_i) = \frac{U}{2}$$

Usikkerhet fra kalibreringsbevis

Fra kalibreringsbeviset finner vi usikkerheten til det estimerte avviket for et instrumentet.

Måleresultater med usikkerhet:

Nominell verdi merking	Konvensjonell verdi	Usikkerhet (k=2)
50 kg	50 kg + 0,44 g	± 0,50 g

CIPM MRA BIPM

Justervesenet

Justervesenet
Nasjonalt laboratorium / *National laboratory*
Fetveien 99, 2007 KJELLER, NORWAY

KALIBRERINGSBEVIS
Certificate of calibration
09/643-1

Kunde: *Customer* Oslo justerkammer, Fetveien 99, 2007 KJELLER

Instrument: *Instrument* Lodd
Produsent *(Manufacturer)*: Häfner
Klasse *(Class)*: M1

Identifikasjon: *Identification* Internnummer *(Internal number)*: OSL-M1-14

Vår referanse: *Our reference* 09/643-1/AGA/511

Tid og sted for kalibreringen: *Date and place of calibration*
22.09.2009, Kjeller

Bevisets utstedelsesdato: *Date of issue*
22.09.2009

Kalibreringen utført av: *Calibration performed by*
Arne Georg Andersen
avdelingsingeniør

Ansvarlig: *Responsible*
Henning Kolbjørnsen
gruppeleder

Dette kalibreringsbeviset er i overensstemmelse med Justervesenets aksepterte måleevne som er spesifisert i en internasjonal avtale under Meterkonvensjonen. Alle nasjonale laboratorier som er aksepterte i avtalen anerkjenner hverandres kalibreringsbevis for de størrelser, måleområder og måleusikkerheter som er ført i appendiks C under avtalen -jf. http://www.bipm.org).

This certificate is consistent with the Calibration and Measurement Capabilities (CMCs) that are included in Appendix C of the MRA drawn up by the CIPM. Under the MRA, all participating institutes recognize the validity of each other's calibration and measurement certificates for the quantities, ranges and measurement uncertainties specified in Appendix C.

Kalibreringsbeviset skal ikke kopieres i ufullstendig form, uten skriftlig tillatelse fra laboratoriet.
The calibration certificate shall not be reproduced except in full, without written approval by the laboratory.
Side 1 av 2
Page of

KALIBRERINGSBEVIS
Certificate of calibration
09/643-1

Justervesenet

Målemetode:
Substitusjonsveiing

Kalibreringen er utført i henhold til følgende prosedyrer:
JV-NL-005 Håndtering av kalibreringsoppdrag
JV-NL-MAS-004 Loddkalibrering
JV-NL-MAS-005 Bruk av balanser og software

Måleresultater med usikkerhet:

Nominell verdi merking	Konvensjonell verdi	Usikkerhet (k=2)
50 kg	50 kg + 0,44 g	± 0,50 g

Sporbarhet:
Loddet er sammenlignet med lodd som er sporbare til de nasjonale normaler for masse.

Forhold under kalibreringen:
Luftparametre ble målt under kalibreringen. For lodd klassifisert i E2 loddklasse ble disse brukt for å beregne lufttettheten etter den internasjonalt aksepterte "CIPM-81/91" formelen.

Kommentar:
Den konvensjonelle massen er basert på følgende referanseverdier som er definert i OIML R111 (utgave 2004):
1,2 kg/m³ for lufttettheten, 20 °C for lufttemperaturen og 8000 kg/m³ for loddets tetthet ved 20 °C.
Resultatet bekrefter loddets tilstand på det tidspunktet og under de forhold kalibreringen ble utført.

Måleusikkerhet:
Måleusikkerheten er beregnet i henhold til metoden beskrevet i "Guide To The Expression Of Uncertainty In Measurements : 1993". Måleusikkerheten angir et intervall som for en normalfordeling gir ca. 95 % dekningssansynlighet (k=2).

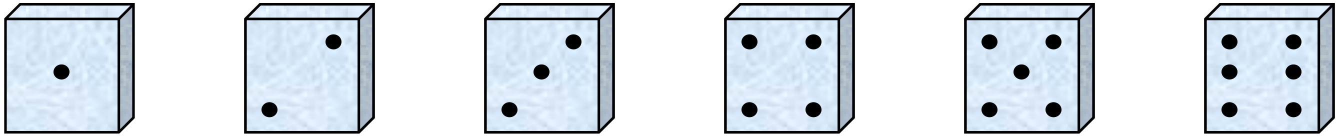
Benyttede instrumenter og normaler:
Lodd — Häfner E2, S.nr. , Id.: LM-E2-07
Balanse — Sartorius CC60000, S.nr. 30903465, Id.: 60KG-OSL-05
Temp-/fukt-logger — Jules Richard Instruments SeleneTH, S.nr. 722179, Id.: T/HYG-OSL-02

Kalibreringsbeviset skal ikke kopieres i ufullstendig form, uten skriftlig tillatelse fra laboratoriet.
The calibration certificate shall not be reproduced except in full, without written approval by the laboratory.
Side 2 av 2
Page of

Måleusikkerhet:
Måleusikkerheten er beregnet i henhold til metoden beskrevet i "Guide To The Expression Of Uncertainty In Measurements : 1993". Måleusikkerheten angir et intervall som for en normalfordeling gir ca. 95 % dekningssansynlighet (k=2).

Firkantfordeling

Vi ser på fordelingsfunksjonen til et terningkast. Terningen kan vise 6 forskjellige tall, og det er like stor sannsynlighet for alle verdier fra 1 til 6.

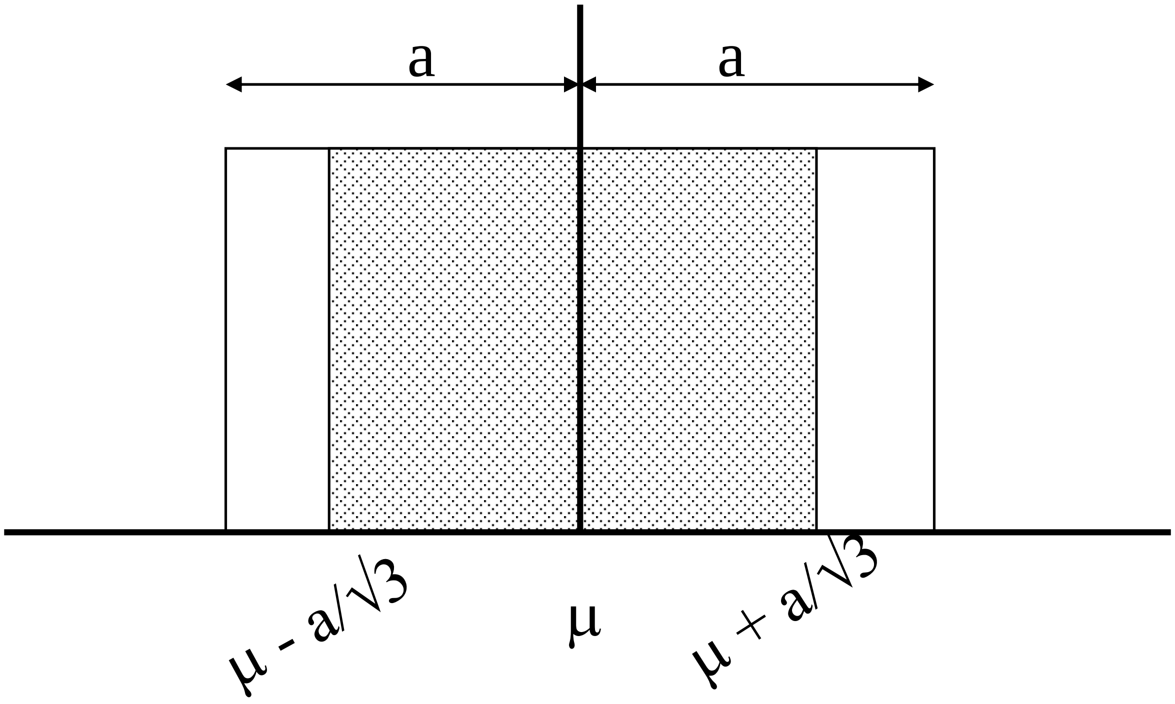


1/6 1/6 1/6 1/6 1/6 1/6

Justervesenet

UiO

Firkantfordeling *(forts.)*



$$u^2(x_i) = \frac{a^2}{3} \qquad u(x_i) = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Standard usikkerhet til en firkantfordeling

Variansen for en vilkårlig fordelingsfunksjon er gitt som:

$$\sigma^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2\, p(x)\,dx$$

Firkantfordeling har 100 % sjanse (1) for at verdien ligger innenfor grenseverdiene - a og +a, 0 utenfor. Variansen finner vi da ved å sette inn for p(x) = 0 utenfor - a og +a, og p(x) =1/2 * a innenfor.

$$\sigma^2(x) = \int_{\mu-a}^{\mu+a} (x-\mu)^2 \frac{1}{2a}\,dx \overbrace{=}^{r = x-\mu} \int_{-a}^{a} r^2 \frac{1}{2a}\,dr$$

Standard usikkerhet til en firkantfordeling *(forts.)*

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_{-a}^{a}$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{3}(a^3 - (-a)^3)\right)$$

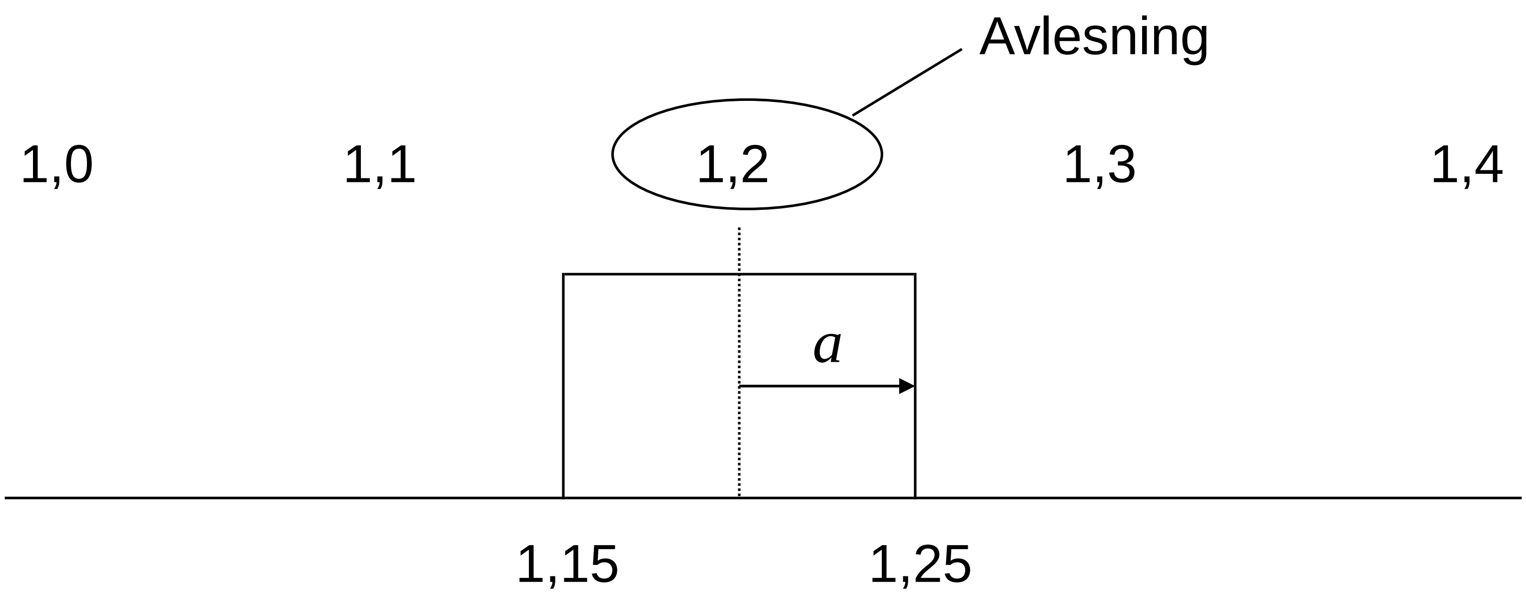
$$= \frac{1}{6a}\left(a^3 + a^3\right)$$

$$= \frac{1}{3}a^2$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma(x) = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Kilde til usikkerhet: Begrenset oppløsning



Oppløsningen er 0,1 mm

Yttergrenser for firkantfordelingen er $a = \pm 0{,}05 mm$

Estimatet av standard usikkerhet er $$u = \frac{a}{\sqrt{3}} = \pm 0{,}029\ \mathrm{mm}$$

Eksempel på firkantfordelt type B usikkerhet

I et laboratorium varierer temperaturen ± 2 °C.

I laboratoriet benyttes et voltmeter. I spesifikasjonen fra leverandøren oppgis det at temperaturmålingen varierer med temperaturen med 2 ppm/K.

Vi får dermed følgende effekt av temperaturvariasjon i spenningsmålingen:

± 2 ppm/K * 2K = ± 4 ppm

$$u(x_{temperaturvariasjon}) = \frac{4\,ppm}{\sqrt{3}} = 2{,}3\,ppm$$

Eksempel på firkantfordelt type B usikkerhet

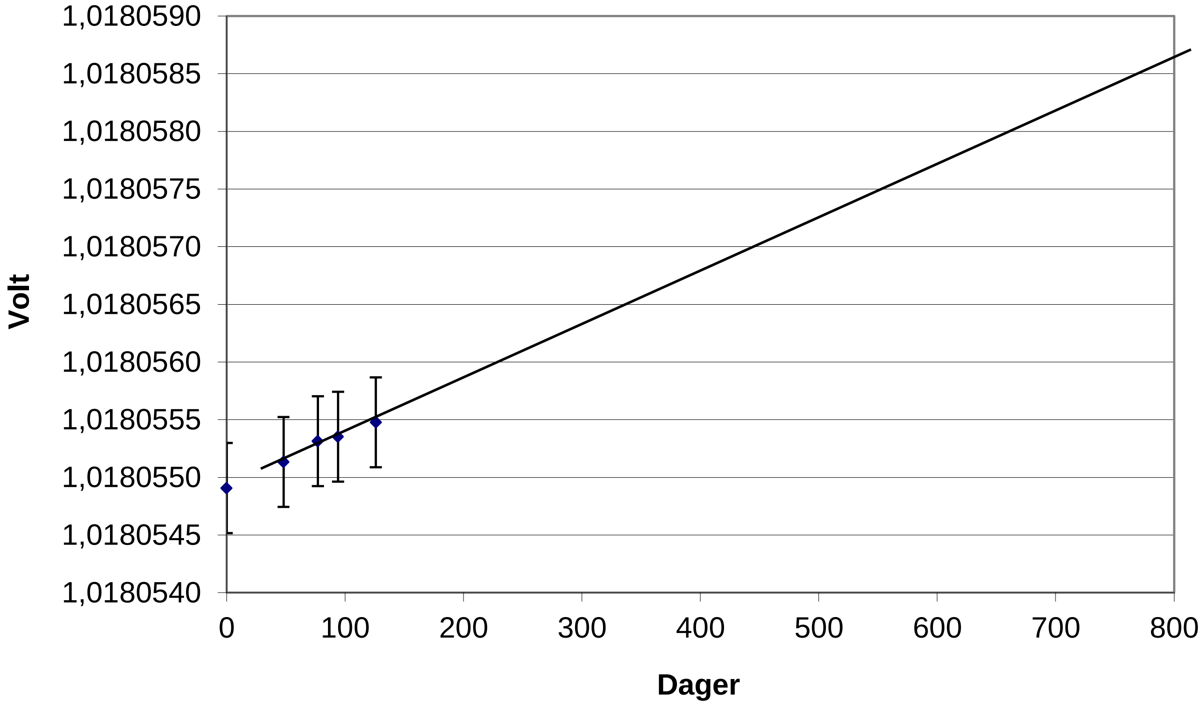
En måleverdi leses av et instrument med et digitalt display.
Avrundingsfeilen i det digitale displayet er på opptil et halvt siffer.

007 m/s

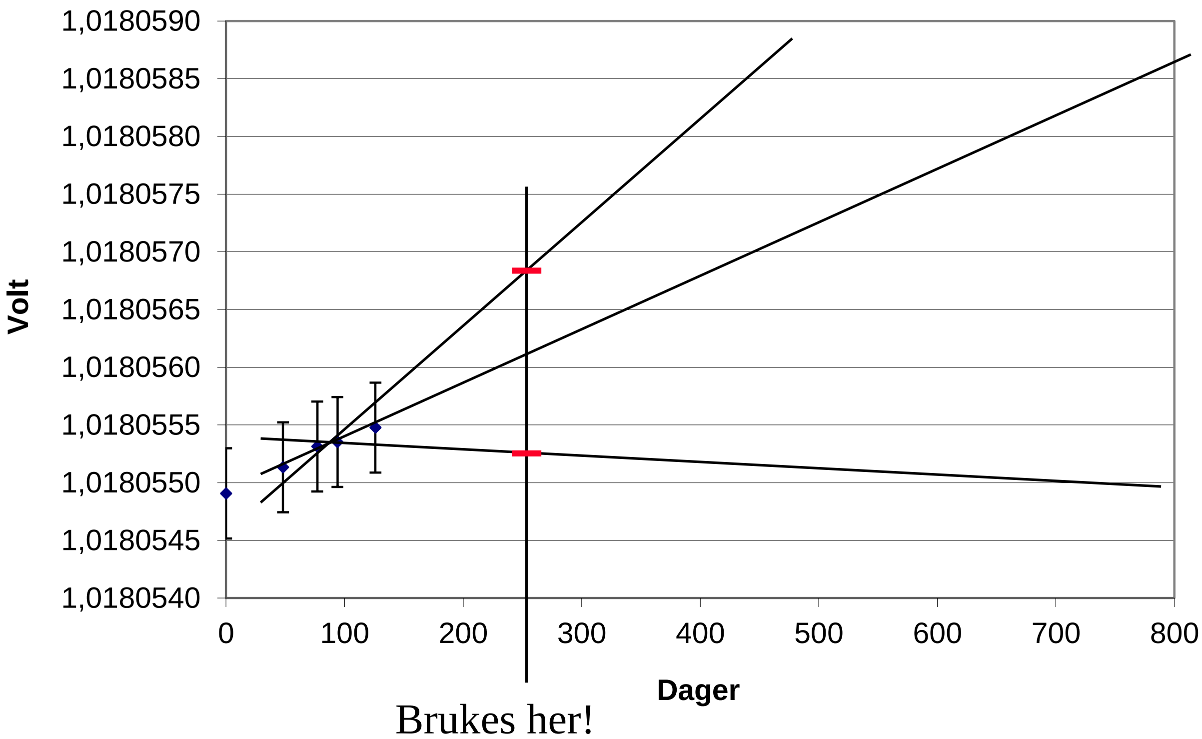
Sett at vi leser av en vindmåler som med 3 siffer viser vind i m/s. Det minst signifikante siffer har en oppløsning på 1 m/s. Verdien instrumentet prøver å vise kan dermed ligge et sted mellom 6,5 m/s og 7,5 m/s. Alle verdier i dette intervallet er like sannsynlige. Verdien er dermed firkantfordelt.

$$u(x_{visning}) = \frac{0{,}5\, m/s}{\sqrt{3}} = 0{,}29\, m/s$$

Drift til en spenningsnormal

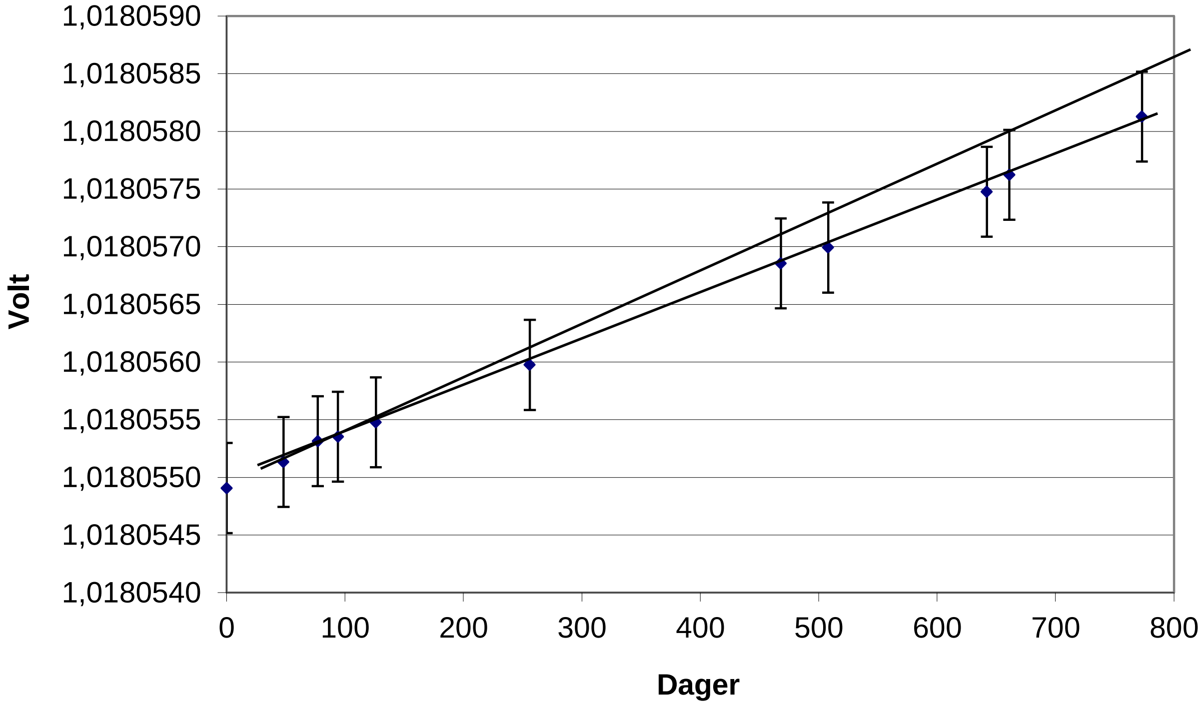


Drift til en spenningsnormal *(forts.)*



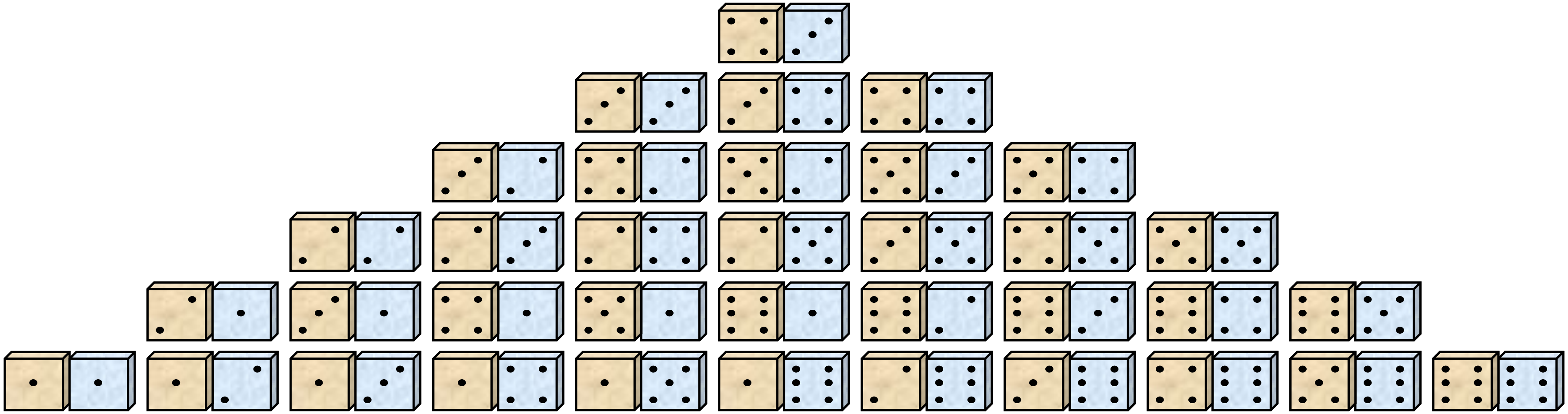
Man kan anta noen grenseverdier for drift fra siste kalibrering. Usikkerhetskomponenten knyttet til drift kan for eksempel antas firkantfordelt (konservativ vurdering).

Drift til en spenningsnormal *(forts.)*



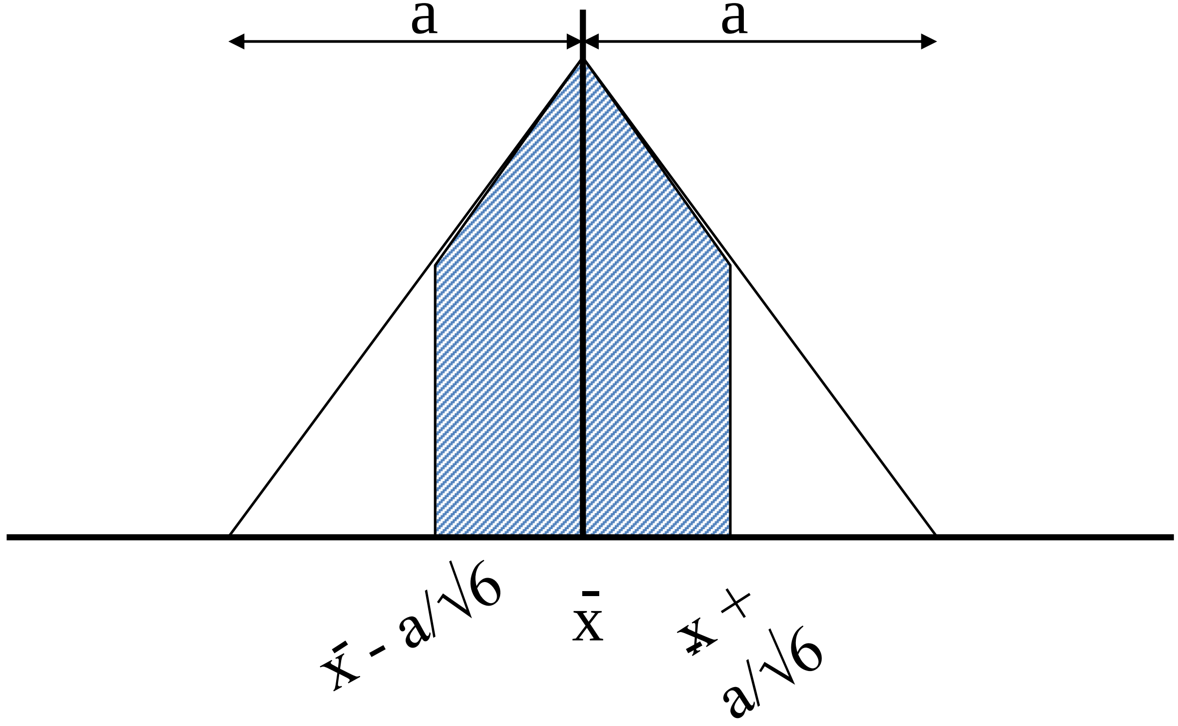
Trekantfordeling

Vi ser på summen av to terninger. Den kan ha diskrete verdier fra 2 til 12. Hvis vi ser på antall forskjellige måter vi kan få de ulike verdiene, vil det gi en trekantfordeling:



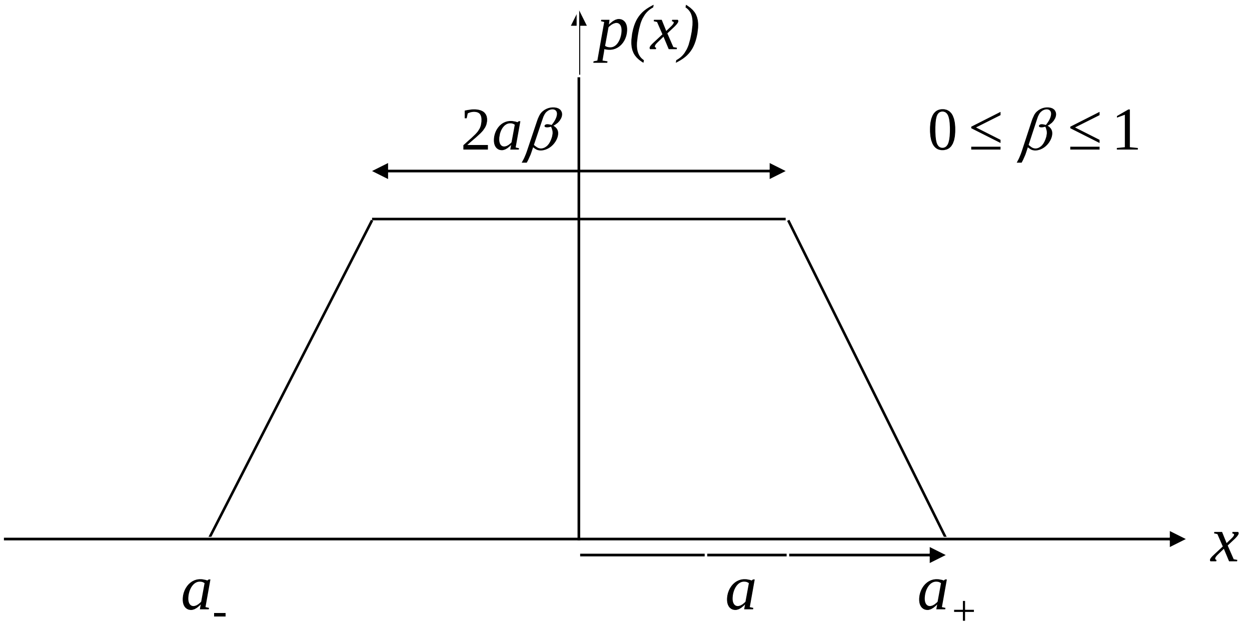
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Trekantfordeling *(forts.)*



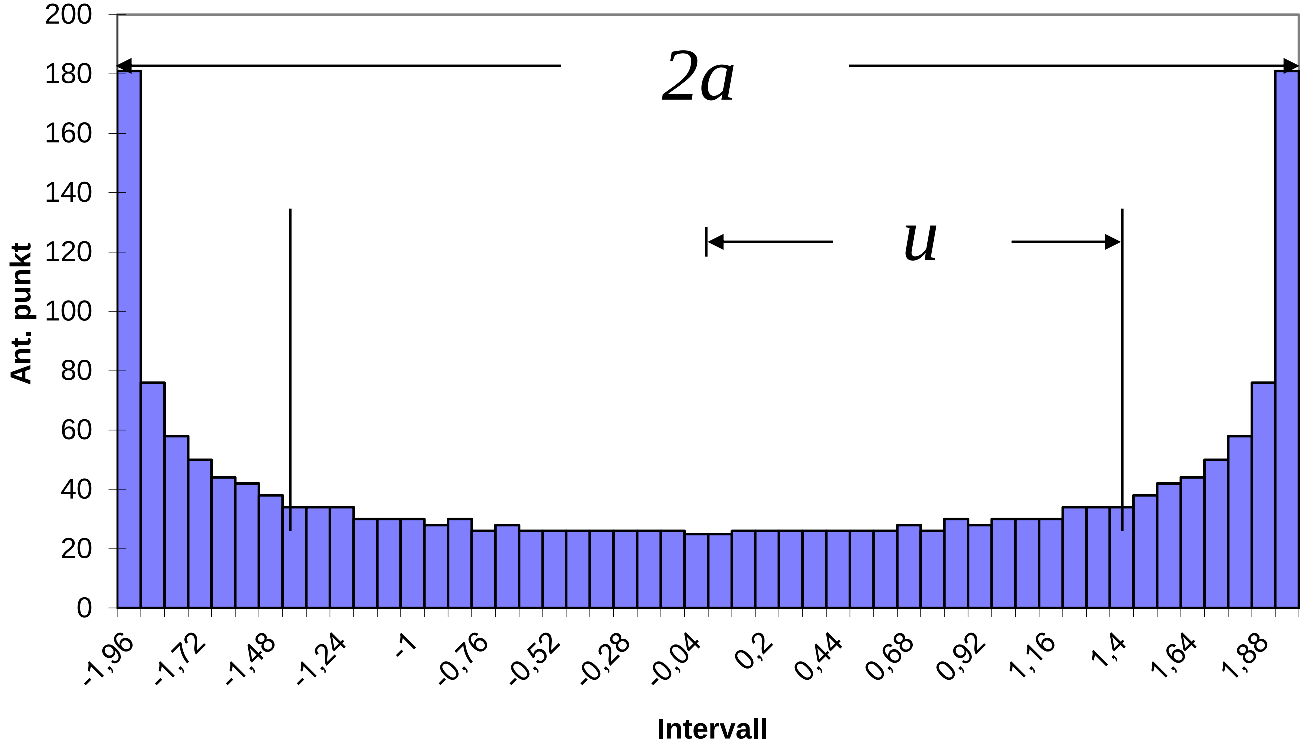
$$u(x_i) = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

Trapesfordeling



$$u^2(x_i) = \frac{a^2(1+\beta^2)}{6}$$

U-fordeling



$$u(x_i) = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Eksempel på u-fordelt type B usikkerhet

Svært mange variasjoner i naturen er sykliske. De følger en pendelbevegelse, dvs oscillerer fram og tilbake. Slike variasjoner kan beskrives matematisk vha en sinus eller en cosinusfunksjon.

Sett at en posisjon på en borerigg leses av med en GPS-mottaker. Sett at riggen svinger fram og tilbake i ankerkjettingene med et gitt maksimalt utslag på 15 meter. Når posisjonen leses av på GPS-mottakeren er det ikke mulig å si noe om hvor i svingningen riggen er. Dermed blir det en u-fordelt avlesningsusikkerhet med følgende verdi:

$$u(x_{avlesning}) = \frac{15\,m}{\sqrt{2}} = 10{,}6\,m$$

Eksempel på type B-evaluering

- multipler av standardavvik
- konfidensnivå 90%, 95%, 99% gitt en fordeling
- innenfor et intervall, firkantfordeling
- innenfor et intervall, trekantfordeling
- innenfor et intervall, trapesfordeling
- innenfor et intervall, u-fordeling

Hvordan finne et standardavvik ?

Dersom:

1. U= ±0.2 ml, k=2 (k=3) ***=> divider med 2 (3)***

2. U= ±0.2 ml, 95% (99%) ***=> divider med 1.96 (2.58)***

3. U= ±0.2 ml, ikke noe mer. Antar rektangulær fordeling innenfor dette intervallet: ***=> divider med*** $\sqrt{3}$

Informasjon som gir grunnlag for vurdering av type B usikkerhet

Følgende kilder til type B usikkerhet er ofte aktuelle

- resultatet i et kalibreringsbevis
- miljøpåvirkning eller annen påvirkning som kan gi en begrenset effekt på måleresultatet
- Historiske data som viser hvordan instrumentet kan forventes å endre seg over tid.
- instrumentets spesifikasjoner
- instrumentets oppløsning
- erfaring eller annen kunnskap om målemetoden og måleprosedyren

Vanlige måter å angi type B usikkerhet

- usikkerhet oppgis som multipler (k) av standard avvik samt med informasjon om fordeling. Ofte benyttes k=2 og normalfordeling
- usikkerhet oppgis som grenseverdier for et intervall. Alle verdier innenfor intervallet er like sannsynlige mens verdier utenfor intervallet er usannsynlige.
- usikkerhet oppgis som et standardavvik uten informasjon om fordelingens fasong
- usikkerhet oppgis som en varians uten informasjon om fordelingens fasong

Hvordan finne en standard usikkerhet?

Under følger det 3 ulike usikkerhetsbidrag ved volummåling. Hva blir standard måleusikkerhet, u(x), for de ulike usikkerhetsbidragene?

Fra et kalibreringsbevis følger det at U = ± 0.2 ml, k = 2 og normalfordeling.

$u(x) = ?$

Oppløsning på 0.4 ml gir mulige verdier i intervallet ± 0.2 ml.

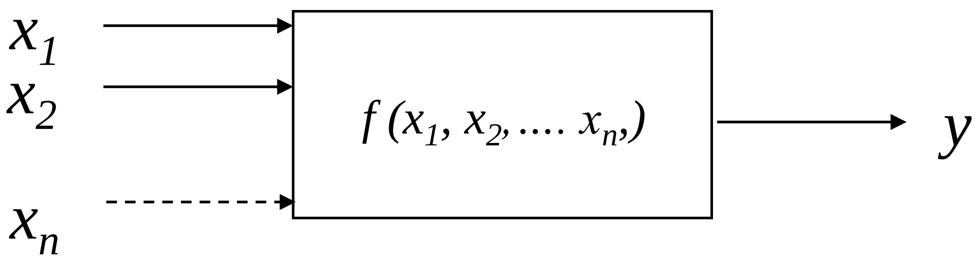
$u(x) = ?$

Temperaturvariasjon på maks ± 5 °C gir volumvariasjon på ± 0.2 ml.

$u(x) = ?$

Oppsummering på 1, 2, 3:
1) Målefunksjonen

Skriv opp en matematisk modell for sammenhengen mellom inngangsstørrelser og utgangsstørrelse.



Til estimatet av samtlige inngangsstørrelser knytter det seg en usikkerhet.

$$y = f\,(x_1, x_2, \ldots., x_n)$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$u_c(y) \qquad u(x_1)\ \ u(x_2) \qquad u(x_n)$$

$u(x_i)$ = standard usikkerhet i x_i

$u_c(y)$ = kombinert standard usikkerhet

2) Beregning av standard usikkerhet

Beregn usikkerhet til komponentene med metode A eller B.

A	**Repeterte observasjoner** $s^2(q) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(q_k - \bar{q})^2$ $\quad u = s(\bar{q}) = \frac{s(q)}{\sqrt{n}}$	
B	Normalfordeling (95 % konfidensintervall) $u = \frac{U}{2}$	
	Firkantfordeling $u = \frac{a}{\sqrt{3}}$	Trekantfordeling $u = \frac{a}{\sqrt{6}}$
	U-fordeling $u = \frac{a}{\sqrt{2}}$	Trapesfordeling $u = \sqrt{\frac{a^2(1+\beta^2)}{6}}$

Type A usikkerhet (diskret sannsynlighetsfordeling)

Type B usikkerhet (velargumentert fordelingsfunksjon)

3) Kombinering av usikkerheter

Alle inngangsstørrelsenes usikkerhetskomponenter kombineres for å gi måleusikkerheten i resultatet, $u_c(y)$.