Løsningsforslag til utvalgte oppgaver i Kalkulus

Øyvind Ryan

16. oktober 2017

Innhold

Kapittel 1

Seksjon 1.1

Oppgave 1.1.13

La alderen på de tre barna være x, y, og z, i avtagende rekkefølge. Den første opplysningen sier at $xyz = 36$. Dette gir følgende muligheter for (x, y, z):

$$(36, 1, 1), (18, 2, 1), (12, 3, 1), (9, 4, 1), (9, 2, 2), (6, 6, 1), (6, 3, 2), \text{ og } (4, 3, 3).$$

Den andre opplysningen vi bruker er at $x+y+z$ =husnummeret. For talltriplene vi listet opp over er $x + y + z$ henholdsvis

$$38, 21, 16, 14, 13, 13, 11, \text{ og } 10.$$

Siden venninnen fremdeles ikke vet hvor gamle barna er er enste mulighet at summen er 13, siden dette er eneste mulighet som har to mulige verdier for (x, y, z), nemlig $(9, 2, 2)$ og $(6, 6, 1)$. Siden det bare er den eldtse som ikek har lagt seg enda så er den siste muligheten utelukket, slik at barna er $9, 2$, og 2 år gamle.

Seksjon 1.2

Oppgave 1.2.5

Vi skal bevise påstanden

$$P_n : n^5 - n \text{ er delelig med 5.}$$

P_1 er opplagt sann ($1^5 - 1 = 0$). Anta vi har vist P_k for $k = 1, \ldots, n$, og la oss bruke dette til å vise P_{n+1}, det vil si at $(n + 1)^5 - (n + 1)$ også er delelig med 5. Vi har at

$$\begin{aligned}(n+1)^5 - (n+1) &= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n - 1 \\ &= n^5 - n + 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n).\end{aligned}$$

Siden $n^5 - n$ er delelig med 5, og siden $5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n)$ opplagt er delelig med 5, så følger det da at $(n + 1)^5 - (n + 1)$ også er delelig med 5, slik at P_{n+1} også er sann.

Oppgave 1.2.6

$n(n^2+5)$ er opplagt delelig med 6 for $n=1$ (vi får da 6). Anta vi har vist at $k(k^2+5)$ er delelig med 6 for $k=1,\dots,n$, og la oss bruke dette til å vise at $(n+1)((n+1)^2+5)$ også er delelig med 6. Vi har at

$$\begin{aligned}(n+1)((n+1)^2+5) &= (n+1)(n^2+2n+6) = n(n^2+2n+6)+n^2+2n+6\\ &= n(n^2+5)+n(2n+1)+n^2+2n+6\\ &= n(n^2+5)+3n^2+3n+6 = n(n^2+5)+3n(n+1)+6.\end{aligned}$$

Det siste uttrykket er en sum av tre tall som alle er delelig med 6. $3n(n+1)$ er delelig med 6, siden en av n og $n+1$ er delelig med 2. Dermed er også $(n+1)((n+1)^2+5)$ delelig med 6.

Oppgave 1.2.7

Vi lar P_n være påstanden at $2^{n+2}+3^{2n+1}$ er delelig med 7. For $n=1$ er dette tallet $2^{1+2}+3^{2\cdot 1+1}=8+27=35$, som opplagt er delelig med 7. Anta at vi har vist at P_n er sann. Vi skal vise at P_{n+1} er sann, det vil si at $2^{(n+1)+2}+3^{2(n+1)+1}$ er delelig med 7. Vi har at

$$\begin{aligned}2^{(n+1)+2}+3^{2(n+1)+1} &= 2^{n+3}+3^{2n+3}\\ &= 2\cdot 2^{n+2}+9\cdot 3^{2n+1}\\ &= 2\cdot 2^{n+2}+2\cdot 3^{2n+1}-2\cdot 3^{2n+1}+9\cdot 3^{2n+1}\\ &= 2(2^{n+2}+3^{2n+1})+7\cdot 3^{2n+1}.\end{aligned}$$

Siden vi antar at P_n er sann så vil $2(2^{n+2}+3^{2n+1})$ være delelig med 7. Videre er også det andre leddet, $7\cdot 3^{2n+1}$, delelig med 7. Men da vil også $2^{(n+1)+2}+3^{2(n+1)+1}$ være delelig med 7, og vi har vist at P_{n+1} er sann.

Tricket vi gjorde over var å legge til og trekke fra $2\cdot 3^{2n+1}$. Det er dette som gjør at vi kan bruke indkusjonsantagelsen og trekke ut to ledd, der begge er delelig med 7.

Oppgave 1.2.8

Vi skal vise at, for alle naturlige tall n,

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1}-1).$$

For $n=1$ sier dette ar $1 > 2(\sqrt{2}-1)\approx 0.82$, slik at hypotesen holder for $n=1$. Anta så at vi har vist hypotesen for $k=1,\dots,n$. Vi skal vise at den også holder for $n+1$, det vil si at

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}} > 2(\sqrt{(n+1)+1}-1) = 2\sqrt{n+2}-2.$$

Vi har at

$$\begin{aligned}
&1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\\
&=\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\\
&>2(\sqrt{n+1}-1)+\frac{1}{\sqrt{n+1}}=2\sqrt{n+1}-2+\frac{1}{\sqrt{n+1}}.
\end{aligned}$$

Induksjonshypotesen er sann også for $n+1$ hvis vi klarer å vise at

$$2\sqrt{n+1}-2+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>2\sqrt{n+2}-2.$$

Dette er det samme som at $2\sqrt{n+1}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>2\sqrt{n+2}$. Kvadrerer vi begge sider får vi at $4(n+1)+4+\frac{1}{n+1}>4(n+2)$, som er det samme som at $\frac{1}{n+1}>0$, som jo er riktig.

Oppgave 1.2.9

a)

Siden det står n tall i telleren og n tall i nevneren kan vi skrive

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}=\frac{1}{1}\frac{3}{2}\frac{5}{3}\cdots\frac{2n-1}{n}\leq 2\cdot 2\cdot 2\cdots 2=2^n.$$

b)

For $0<t<1$ er begge sidene i ulikheten $\sqrt{1-t}\leq 1-\frac{t}{2}$ positive. Det er derfor nok å vise at ulikheten holder når vi kvadrerer begge sider:

$$1-t\leq 1-t+\frac{t^2}{4}$$

men dette er det samme som at $\frac{t^2}{4}\leq 0$, som opplagt holder.

c)

Vi har at

$$\begin{aligned}
\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}&=\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2n}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1/2}{2}\right)\left(1-\frac{1/3}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{1/n}{2}\right)\\
&\geq\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{3}}\cdots\sqrt{1-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{3}}\cdots\sqrt{\frac{n-1}{n}}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2\sqrt{n}},
\end{aligned}$$

der vi har brukt ulikheten fra b) på alle n ledd bortsett fra det første, og der vi har forkortet alle ledd bortsett fra $\sqrt{n}$ i den siste overgangen.

Oppgave 1.2.10

a)

Vi får at

$$\begin{aligned} 1+3 &= 4 \\ 1+3+5 &= 9 \\ 1+3+5+7 &= 16 \\ 1+3+5+7+9 &= 25. \end{aligned}$$

Vi ser fra dette at vi kan danne hypotesen P_n at summen av de n første oddetallene er n^2.

b)

At P_1 er riktig ser vi fra a). Det n'te oddetallet er $2n-1$. Anta at P_n er sann, det vil si at $1+3+\ldots+(2n-1)=n^2$. Vi har da at summen an de $n+1$ første oddetallene er

$$\begin{aligned} 1+3+\ldots+(2n+1) &= (1+3+\ldots+(2n-1))+(2n+1) \\ &= n^2+2n+1=(n+1)^2. \end{aligned}$$

Dette viser at P_{n+1} også er sann.

Oppgave 1.2.11

Med $f(x)=e^{x^2}$ har vi at $f'(x)=2xe^{x^2}=p_1(x)e^{x^2}$, der $p_1(x)=2x$. Induksjonshypotesen er derfor opplagt sann for $n=1$, siden p_1 er et polynom av grad 1. Anta nå $f^{(n)}(x)=p_n(x)e^{x^2}$, der p_n er et polynom av grad n. Vi har at

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (p_n)'(x)e^{x^2}+p_n(x)2xe^{x^2} \\ &= (2xp_n(x)+(p_n)'(x))e^{x^2}=p_{n+1}(x)e^{x^2}, \end{aligned}$$

der vi har definert $p_{n+1}(x)=2xp_n(x)+(p_n)'(x)$. Det er opplagt at p_{n+1} er et polynom av grad $n+1$, og vi har dermed fullført induksjonsbeviset.

Oppgave 1.2.15

Vi skal bevise påstanden P_n, når P_n er definert ved at $\sum_{k=1}^{n-1} k^3 \leq \frac{n^4}{4} \leq \sum_{k=1}^{n} k^3$. For $n=2$ svarer dette til at $1 \leq \frac{2^4}{4} \leq 1^3+2^3$, som er det samme som at $1 \leq 4 \leq 9$. P_2 er derfor sann, slik at første trinnet i induksjonsbeviset er greit.

Anta så at vi har vist at P_n er sann, og at vi skal vise P_{n+1}, det vil si at $\sum_{k=1}^{n} k^3 \leq \frac{(n+1)^4}{4} \leq \sum_{k=1}^{n+1} k^3$. La oss skrive opp disse tre størrelsene under hverandre, med de lengst til høyre øverst:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 &&= \sum_{k=1}^{n} k^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\
\frac{(n+1)^4}{4} &= \frac{n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1}{4} &&= \frac{n^4}{4} + n^3 + \frac{3}{2}n^2 + n + \frac{1}{4} \\
\sum_{k=1}^{n} k^3 & &&= \sum_{k=1}^{n-1} k^3 + n^3.
\end{aligned}$$

I tillegg til å gange ut $(n+1)^3$ og $(n+1)^4$, så har vi også her splittet opp summene ved å sette det siste leddet utenfor summen. Vi ser nå at de første leddene på høyre siden er leddene som inngår i P_n, og for disse har vi jo at $\sum_{k=1}^{n-1} k^3 \leq \frac{n^4}{4} \leq \sum_{k=1}^{n} k^3$. Videre er det klart at $n^3 \leq n^3 + \frac{3}{2}n^2 + n + \frac{1}{4} \leq n^3 + 3n^2 + 3n + 1$. Fra disse to observasjonene følger det nå at $\sum_{k=1}^{n} k^3 \leq \frac{(n+1)^4}{4} \leq \sum_{k=1}^{n+1} k^3$, siden en sum er mindre enn en annen sum hvis hver av leddene er det.

Seksjon 1.4

Oppgave 1.4.8

a)

Setter vi inn $a = b = 1$ i binomialformelen får vi at

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

b)

2^n er antall mulige måter å plukke ut elementer fra en samling av n objekter. Dette kan sees slik: For hvert av de n objektene er det to muligheter: Det kan bli plukket ut, eller ikke bli plukket ut. Det totale antall måter å plukke ut på blir da produktet av antall muligheter for hvert objekt, det vil si $2 \times 2 \times \cdots 2 = 2^n$.

Antall måter å plukke ut elementer fra n objekter kan også skrives som summen over antall mulige måter å plukke ut k elementer fra de n, der k (summeindeksen) løper fra 0 til n. Siden antall mulige måter å plukke ut k elementer fra n objekter er $\binom{n}{k}$, så får vi også $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ for det totale antall muligheter. Dette blir dermed et kombinatorisk bevis for at $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Seksjon 1.5

Oppgave 1.5.8

Hvis $P(x)$ er delelig med $x - a$, så kan vi skrive $P(x) = (x - a)P_1(x)$. Hvis $P(x)$ også er delelig med $x - b$ så må jo $P(b) = 0$. Men da er det klart at også $P_1(b) = 0$, siden $b - a \neq 0$. Men da følger det fra Setning 1.5.5 at P_1 er delelig med $x - b$ også, slik at vi kan skrive $P_1(x) = (x - b)P_2(x)$, og vi har derfor

$$P(x) = (x - a)P_1(x) = (x - a)(x - b)P_2(x),$$

slik at P også er delelig med $(x-a)(x-b)$.

Kapittel 2

Seksjon 2.1

Oppgave 2.1.9

Vi har at

$$|x-y| = |(x-z)+(z-y)| \leq |x-z| + |z-y|,$$

der vi i den siste overgangen brukte trekantulikheten.

Oppgave 2.1.10

Vi skal vise ved induksjon at

$$|a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n|.$$

For $n = 1$ er dette opplagt, siden det da står det samme på venstre og høyre side. For $n = 2$ er det også opplagt, dette er jo ikke noen annet enn trekantulikheten. Anta nå at vi har vist hypotesen for $k = 1, \ldots, n$, og la oss vise at hypotesen også holder for $n+1$, det vil si at

$$|a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1}| \leq |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{n+1}|.$$

Vi skriver

$$\begin{aligned}
|a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1}| &= |(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + a_{n+1}| \\
&\leq |a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n| + |a_{n+1}| \\
&\leq (|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n|) + |a_{n+1}| \\
&= |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{n+1}|,
\end{aligned}$$

der vi første brukte hypotesen for $n = 2$, deretter for n. Dette fullfører induksjonshypotesen.

Seksjon 2.2

Oppgave 2.2.5

a)

Dette utsagnet er galt: Summen av to irrasjonale tall kan godt bli rasjonalt. Hvis a er irrasjonalt så ser vi fra b) at $-a$ også er irrasjonalt. Men vi har at $a + (-a) = 0$, som jo er rasjonalt.

b)

Dette utsagnet er riktig: Hvis a er irrasjonal, så er $-a$ det også. Dette kan bevises slik: Anta for motsigelse at $-a$ er rasjonal. Da er $a+(-a)=0$ rasjonalt, men vi vet at summen av et rasjonalt og et irrasjonalt tall alltid er irrasjonalt (Korollar 2.2.2). Dette er en motsigelse, slik at $-a$ må være irrasjonalt.

c)

Dette utsagnet er galt: a kan godt være irrasjonal, selv om a^2 er rasjonal. Sett $a=\sqrt{2}$. a er irrasjonal, mens $a^2=2$ er rasjonal.

d)

Dette utsagnet er riktig: Hvis a^2 er irrasjonal så er a det også. Hvis nemlig a var rasjonal så gir Korollar 2.2.2 oss at a^2 også er rasjonal, som er en motsigelse.

e)

Dette utsagnet er riktig: Hvis a er irrasjonal, så er også $\frac{1}{a}$ irrasjonal. Hvis $\frac{1}{a}$ var irrasjonal, så ville $\frac{1}{a}=\frac{b}{c}$ der $b,c\in\mathbb{Z}$. Men da ville $a=\frac{c}{b}$, slik at a også er rasjonal, som er en selvmotsigelse.

Oppgave 2.2.8

Vi antar for motsigelse at $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$, og at $a=p_1p_2\ldots p_n$, $b=q_1q_2\ldots q_m$, der p_i,q_j alle er primtall.

a)

$\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ kan skrives $\sqrt{2}b=a$, som igjen kan skrives $\sqrt{2}q_1q_2\ldots q_m=p_1p_2\ldots p_n$. Kvadrerer vi begge sider får vi at

$$2q_1q_1q_2q_2\ldots q_mq_m=p_1p_1p_2p_2\ldots p_np_n.$$

b)

La r være antall tall blant $p_1,\ldots,p_n$ som er 2, og la s være antall tall blant $q_1,\ldots,q_m$ som er 2. I produktet på venstre side av likhetstegnet i a) vil det da være $2r+1$ 2-tall, mens det i produktet på høyre side vil være $2s$ 2-tall. Siden det ikke finnes tall som er både partall og oddetall, så finnes det forskjellig antall 2-tall i produktene på høyre og venstre side.

c)

Aritmetikkens fundamentalteorem sier at ethvert tall har en unik faktorisering i primtall. Spesielt vil primtallet 2 foregå like mange ganger i en enhver faktorisering i primtall. Men vi har over vist at det er forskjellig antall forekomster av 2-tall på hver side, som er en motsigelse. Derfor må $\sqrt{2}$ være irrasjonal.

Oppgave 2.2.9

Vi antar for motsigelse at $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$, og setter $a = p_1 p_2 \dots p_r$, $b = q_1 q_2 \dots q_m$ som i Oppgave 2.2.8, der p_i, q_j alle er primtall. Kvadrerer vi uttrykket $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$ og flytter over får vi

$$nq_1 q_1 q_2 q_2 \dots q_m q_m = p_1 p_1 p_2 p_2 \dots p_r p_r.$$

la $n = s_1 s_2 \dots s_t$ være primtallsfaktoriseringen av n. Siden n ikke er et kvadrattall så finnes et primtall p som forekommer et odde antall ganger, $2u + 1$, i primtallsfaktoriseringen $n = s_1 s_2 \dots s_t$ (hvis et slikt primtall ikke finnes så må n være et kvadrattall). Vi ser nå at p forekommer et odde antall ganger på venstre side (i $nq_1 q_1 q_2 q_2 \dots q_m q_m$), og et like antall ganger på høyre side $p_1 p_1 p_2 p_2 \dots p_r p_r$). Dette er en motsigelse ifølge aritmetikkens fundamentalteorem (en primtallsfaktorisering er unik). Vi konkluderer med at $\sqrt{n}$ er irrasjonal.

Seksjon 2.3

Oppgave 2.3.5

a)

Vi har to muligheter:

1. $\sup(A) \geq \sup(B)$. I så fall er $\sup(A \cup B) = \sup(A) = \max(\sup(A), \sup(B))$
2. $\sup(A) < \sup(B)$. I så fall er $\sup(A \cup B) = \sup(B) = \max(\sup(A), \sup(B))$

Uansett har vi at $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$, slik at utsagnet er sant.

b)

Vi kan ha at $A \cap B = \emptyset$. I så fall er utsagnet opplagt galt.

c)

Vi har to muligheter:

1. $\inf(A) \geq \inf(B)$. I så fall er $\inf(A \cup B) = \inf(B) = \min(\inf(A), \inf(B))$
2. $\inf(A) < \inf(B)$. I så fall er $\inf(A \cup B) = \inf(A) = \min(\inf(A), \inf(B))$

Uansett har vi at $\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$, slik at utsagnet er sant.

d)

Vi kan ha at $A \cap B = \emptyset$ sim i b), og da blir utsagnet galt også her.

Seksjon 2.4

Oppgave 2.4.4

Vi skriver

$$\begin{aligned} a + a &\stackrel{A4}{=} a \cdot 1 + a \cdot 1 \\ &\stackrel{A3}{=} a \cdot (1+1) = a \cdot 2 \\ &\stackrel{A1}{=} 2a, \end{aligned}$$

der vi har indikert hvilket aksiom vi bruker i hver overgang.

Kapittel 3

Seksjon 3.1

Oppgave 3.1.10

Anta at $z = z_1 + iz_2$ og $w = w_1 + iw_2$ er slik at både $z + w$ og zw er reelle. At

$$z + w = z_1 + iz_2 + w_1 + iw_2 = z_1 + w_1 + i(z_2 + w_2)$$

er reell betyr at imaginærdelen er 0, det vil si at $z_2 + w_2 = 0$, som betyr at $w_2 = -z_2$.

At zw er reell betyr at

$$zw = (z_1 + iz_2)(w_1 + iw_2) = z_1 w_1 - z_2 w_2 + i(w_1 z_2 + w_2 z_1)$$

er reell, som på samme måte bare kan skje hvis $w_1 z_2 + w_2 z_1 = 0$.

Vi har nå brutt ned problemet vårt til å finne alle reelle løsninger av

$$\begin{aligned} w_2 &= -z_2 \\ w_1 z_2 &= -w_2 z_1. \end{aligned}$$

En løsning av disse er opplagt, nemlig at $z_2 = w_2 = 0$, som svarer til at både z og w er reelle. Hvis $z_2 \neq 0$ blir den unike løsningen av likningene

$$\begin{aligned} w_2 &= -z_2 \\ w_1 &= -\frac{w_2 z_1}{z_2} = -\frac{w_2 z_1}{-w_2} = z_1, \end{aligned}$$

som uttrykker at z og w må være konjugerte av hverandre.

Seksjon 3.2

Oppgave 3.2.13

a)

Vi regner ut

$$\begin{aligned} zw &= (1 + i\sqrt{3})(1 + i) = 1 - \sqrt{3} + i(\sqrt{3} + 1) = 1 - \sqrt{3} + i(\sqrt{3} + 1) \\ \frac{z}{w} &= \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i} = \frac{(1 + i\sqrt{3})(1 - i)}{1 + 1} \\ &= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1)) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} + i\frac{\sqrt{3} - 1}{2}. \end{aligned}$$

b)

For z har vi $r = \sqrt{1+3} = 2$, og $\cos\theta = \frac{1}{2}, \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, som gir $\theta = \frac{\pi}{3}$.
For w har vi $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, og $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, som gir $\theta = \frac{\pi}{4}$.

c)

Fra b) ser vi at $\frac{z}{w}$ har polarform $r = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, og $\theta = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$. Vi har dermed

$$\frac{z}{w} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Sammenligner vi realdelene og imaginærdelene ser vi at

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{3}+1}{2}\\ \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{3}-1}{2},\end{aligned}$$

som gir

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Oppgave 3.2.14

Vi har at

$$\begin{aligned}|z+w|^2 &= (z+w)\overline{z+w} = (z+w)(\bar{z}+\bar{w})\\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w}\\ &= |z|^2 + |w|^2 + \bar{z}w + \overline{\bar{z}w}\\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2\Re(\bar{z}w)\\ &= |z|^2 + |w|^2.\end{aligned}$$

Geometrisk betyr $\Re(\bar{z}w) = 0$ at vinklene z og w står vinkelrett på hverandre: Hvis argumentet til z er θ og argumentet til w er ϕ, så blir jo argumentet til $\bar{z}w$ lik $\phi - \theta$ (siden argumentet til $\bar{z}$ er $-\theta$), og $\bar{z}w$ har null i realdel hvis argumentet er $\pm\frac{\pi}{2}$, som skjer bare hvis θ og ϕ skiller seg med $\frac{\pi}{2}$, det vil si at z og w står vinkelrett på hverandre. Men da danner $z, w, z+w$ sidene i en rettvinklet trekant, og det vi har vist er da ikke noe annet enn Pythagoras læresetning.

Oppgave 3.2.16

a)

Vi har at

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{(z-1)(\overline{z+1})}{(z+1)\overline{z+1}} = \frac{(z-1)(\overline{z}+1)}{|z+1|^2} = \frac{z\overline{z}+z-\overline{z}-1}{|z+1|^2} = \frac{z-\overline{z}}{|z+1|^2}$$

der vi har brukt at $z\overline{z} = |z|^2 = 1$. Dette tallet er rent imaginært, siden $z - \overline{z}$ er det (realdelene kansellerer hverandre.

b)

0, $z-1$, og $z+1$ ligger alle på en sirkel med sentrum i z med radius 1 (0 ligger på denne sirkelen siden $|z|=1$). $z-1$ og $z+1$ ligger også på samme diameter i sirkelen, og det at $\frac{z-1}{z+1}$ er rent imaginær betyr at vektorene $z-1$ og $z+1$ i planet står vinkelrett på hverandre, siden hvis a har vinkel θ og b har vinkel ϕ, så har $\frac{a}{b}$ vinkel $\theta-\phi$, og $\frac{a}{b}$ er rent imaginær hvis og bare hvis $\theta-\phi$ er 90 grader. Med andre ord, i en trekant innskrevet i en sirkel der to av hjørnene ligger på diameteren, så vil vinkelen i det tredje hjørnet være 90 grader.

Oppgave 3.2.18

a)

$1+ti$ og $1-ti$ har samme modulus ($\sqrt{1+t^2}$), og hvis argumentet til $1+ti$ er ϕ, så blir argumentet til $1-ti$ lik $-\phi$. Men da har $\frac{1+ti}{1-ti}$ modulus lik 1 og argument lik $\theta=2\phi$. For alle t ligger dermed punktene på sirkelen om origo med radius 1, som var det vi skulle vise.

b)

Fra a) vet vi at argumentet til $\frac{1+ti}{1-ti}$ er $\theta=2\phi$, der ϕ er argumentet til $1+ti$. Sistnevnte er løsningen på $\tan\phi=t$, slik at $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)=t$.

Oppgave 3.2.21

Fra trekantulikheten kan vi skrive

$$\begin{aligned} |z| &= |z-w+w| \leq |z-w|+|w| \\ |w| &= |w-z+z| \leq |w-z|+|z| = |z-w|+|z|, \end{aligned}$$

som også kan skrives

$$\begin{aligned} |z|-|w| &\leq |z-w| \\ |w|-|z| &\leq |w-z| = |z-w|. \end{aligned}$$

Siden en av de to venstresidene her er lik $||z|-|w||$, så kan vi konkludere med at $||z|-|w|| \leq |z-w|$.

Seksjon 3.3

Oppgave 3.3.8

Vi skal regne ut $(1+i)^{804}$ og $(3-i)^{173}$ ved hjelp av de Moivres formel. Da $1+i$ har modulus $\sqrt{2}$ og argument $\frac{\pi}{4}$ får vi

$$\begin{aligned}
(1+i)^{804} &= \left(\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^{804} \\
&= \sqrt{2}^{804}\left(\cos\left(\frac{804\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{804\pi}{4}\right)\right) \\
&= \sqrt{2}^{2\times 402}\left(\cos\left(201\pi\right)+i\sin\left(201\pi\right)\right) \\
&= 2^{402}\left(\cos\left(200\pi+\pi\right)+i\sin\left(200\pi+\pi\right)\right) \\
&= 2^{402}\left(\cos\left(\pi\right)+i\sin\left(\pi\right)\right) \\
&= -2^{402}.
\end{aligned}$$

$\sqrt{3}-i$ har modulus 2 og argument $-\frac{\pi}{6}$, og vi får dermed også

$$\begin{aligned}
(\sqrt{3}-i)^{173} &= \left(2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)^{173} \\
&= 2^{173}\left(\cos\left(-\frac{173\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{173\pi}{6}\right)\right) \\
&= 2^{173}\left(\cos\left(28\pi+\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(28\pi+\frac{5\pi}{6}\right)\right) \\
&= 2^{173}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) \\
&= 2^{173}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) \\
&= -2^{172}(\sqrt{3}+i).
\end{aligned}$$

Oppgave 3.3.9

Bruker vi De Moivres formel får vi

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\right)^n &= \left(\frac{1+i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}\right)^n \\
&= \left(\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta-i\sin\theta}\right)^n \\
&= \frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^n}{(\cos\theta-i\sin\theta)^n} = \frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^n}{(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))^n} \\
&= \frac{\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)}{\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)} = \frac{\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)}{\cos(n\theta)-i\sin(n\theta)} \\
&= \frac{1+i\frac{\sin(n\theta)}{\cos(n\theta)}}{1-i\frac{\sin(n\theta)}{\cos(n\theta)}} = \frac{1+i\tan(n\theta)}{1-i\tan(n\theta)}.
\end{aligned}$$

Oppgave 3.3.10

Vi har først bruk for at formlene

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta - i\sin\theta, \end{aligned}$$

som jo gjelder for reelle θ, også gjelder for komplekse z, det vil si

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \cos z + i\sin z \\ e^{-iz} &= \cos z - i\sin z. \end{aligned}$$

Disse vises ved at vi først regner ut $\cos z + i\sin z$ ved hjelp av definisjonene

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \end{aligned}$$

fra Seksjon 3.3 (e^{-iz}-leddene vil da kansellere), deretter regner vi ut $\cos z - i\sin z$ på samme måte (e^{iz}-leddene vil da kansellere). Vi får nå

$$\begin{aligned} \sin(z+w) &= \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2i} = \frac{e^{iz}e^{iw} - e^{-iz}e^{-iw}}{2i} \\ &= \frac{(\cos z + i\sin z)(\cos w + i\sin w) - (\cos z - i\sin z)(\cos w - i\sin w)}{2i} \\ &= \frac{2i(\cos z\sin w + \sin z\cos w)}{2i} = \sin z\cos w + \cos z\sin w, \end{aligned}$$

der halvparten av leddene i telleren kansellerte. På samme måte får vi at

$$\begin{aligned} \cos(z+w) &= \frac{e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}}{2} = \frac{e^{iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{-iw}}{2} \\ &= \frac{(\cos z + i\sin z)(\cos w + i\sin w) + (\cos z - i\sin z)(\cos w - i\sin w)}{2} \\ &= \frac{2(\cos z\cos w - \sin z\sin w)}{2} = \cos z\cos w - \sin z\sin w. \end{aligned}$$

Oppgave 3.3.12

a)

Formelen $\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$ kan bevises ved induksjon på nøyaktig samme måte som for reelle tall. Formelen er opplagt sann for $n = 0$. Hvis vi har vist den for $0, 1, \ldots, n$, så får vi for $n+1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} z^k &= \sum_{k=0}^{n} z^k + z^{n+1} = \frac{z^{n+1}-1}{z-1} + z^{n+1} \\ &= \frac{z^{n+1}-1}{z-1} + \frac{z^{n+2}-z^{n+1}}{z-1} \\ &= \frac{z^{n+1}-1+z^{n+2}-z^{n+1}}{z-1} = \frac{z^{n+2}-1}{z-1}, \end{aligned}$$

som viser at formelen holder også for $n+1$. Dermed holder formelen for alle n.

b)

Setter vi inn $z = e^{ik\theta}$ i formelen fra a) får vi først at $z^k = e^{ik\theta}$, og deretter

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1},$$

som var det vi skulle vise.

c)

Høyresiden fra svaret i b) kan omskrives slik:

$$\begin{aligned}
\frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} &= \frac{e^{i(n+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2}} \frac{e^{i(n+1)\theta/2} - e^{-i(n+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}} \\
&= e^{in\theta/2} \frac{\frac{e^{i(n+1)\theta/2} - e^{-i(n+1)\theta/2}}{2i}}{\frac{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}}{2i}} \\
&= e^{in\theta/2} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)},
\end{aligned}$$

som er det uttrykket vi skulle frem til. Vi har her brukt formlene for cosinus og sinus uttrykt ved hjelp av eksponentialfunksjoner.

d)

Setter vi opp realdel og imaginærdel i uttrykket i c) får vi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} &= \sum_{k=0}^{n} (\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)) = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) + i \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) \\
&= \left(\cos\left(\frac{n}{2}\theta\right) + i\sin\left(\frac{n}{2}\theta\right)\right) \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= \frac{\cos\left(\frac{n}{2}\theta\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} + i\frac{\sin\left(\frac{n}{2}\theta\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Sammenligner vi realdelene og imaginærdelene i disse uttrykkene får vi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) &= \frac{\cos\left(\frac{n}{2}\theta\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) &= \frac{\sin\left(\frac{n}{2}\theta\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)},
\end{aligned}$$

som var det vi skulle vise.

Seksjon 3.4

Oppgave 3.4.14

Bruker vi formelen for løsningen av andregradslikningen får vi

$$\begin{aligned}
z &= \frac{-2(1-i) \pm \sqrt{4(1-i)^2 - 28i}}{2} = \frac{-2(1-i) \pm \sqrt{4-8i-4-28i}}{2} \\
&= \frac{-2(1-i) \pm \sqrt{-36i}}{2} = -1+i \pm 3\sqrt{i} \\
&= -1+i \pm \frac{3}{2}\sqrt{2}(1+i).
\end{aligned}$$

Velget vi positivt fortegn her får vi roten $-1+\frac{3}{2}\sqrt{2}+i(1+\frac{3}{2}\sqrt{2})$. Velger vi negativt fortegn får vi roten $-1-\frac{3}{2}\sqrt{2}+i(1-\frac{3}{2}\sqrt{2})$. Modulus for begge røttene blir

$$\sqrt{(1-\frac{3}{2}\sqrt{2})^2 + (1+\frac{3}{2}\sqrt{2})^2} = \sqrt{1+\frac{9}{2}+1+\frac{9}{2}} = \sqrt{11}.$$

Argumentet θ til den første roten ligger i første kvadrant og er gitt ved at $\cos\theta = \frac{-1+\frac{3}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}}{22}(3\sqrt{2}-2)$, som vi må slå inn på kalkulator.

Oppgave 3.4.19

a)

$(1+z)^5 = (1-z)^5$ kan skrives $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^5 = 1$, og femterøttene til 1 er på formen $e^{2k\pi i/5}$, $1 \leq k \leq 5$. Disse kan også skrives på formen w^k, der $w = e^{2\pi i/5}$. Vi har altså at $\frac{1+z}{1-z} = w^k$, som kan skrives $1+z = (1-z)w^k$, eller $z(1+w^k) = w^k - 1$, eller $z = \frac{w^k-1}{w^k+1}$.

b)

Erstatter vi 5 med n i utregningen over, og w med $w_n = e^{2\pi i/n}$, så vil utregningen gå på samme måte, og vi får $z = \frac{w_n^k-1}{w_n^k+1}$, $1 \leq k \leq n$.

c)

Vi kan skrive

$$\begin{aligned}
z &= \frac{e^{2k\pi i/n}-1}{e^{2k\pi i/n}+1} = \frac{\left(e^{2k\pi i/n}-1\right)\left(e^{-2k\pi i/n}+1\right)}{\left|e^{2k\pi i/n}+1\right|^2} \\
&= \frac{1-1+e^{2k\pi i/n}-e^{-2k\pi i/n}}{\left|e^{2k\pi i/n}+1\right|^2} \\
&= \frac{e^{2k\pi i/n}-e^{-2k\pi i/n}}{\left|e^{2k\pi i/n}+1\right|^2}.
\end{aligned}$$

Dette er et rent imaginært tall, siden $e^{2k\pi i/n} - e^{-2k\pi i/n} = 2i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ er rent imaginært, og sidene nevneren er reell. Dermed ligger alle løsningene på den imaginære aksen, som jo utgjør en rett linje i det komplekse planet.

Seksjon 3.5

Oppgave 3.5.13

a)

$-1 + i\sqrt{3}$ kan skrives på polarform som $2e^{2\pi i/3}$, slik at kvadratrøttene blir $\pm\sqrt{2}e^{\pi i/3} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{3}i)$.

b)

Bruker vi formelen for løsningen av andregradslikningen får vi

$$z^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

To av røttene er dermed kvadratrøttene til $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)$, som på grunn av a) må bli $\pm\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)$. Siden de konjugerte også er røtter, så vil de siste røttene være $\pm\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)$. Mer kompakt kan dermed alle røttene skrives $\pm\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$, der alle fire fortegnsvalg er tillatt. Vi ser at alle røttene har modulus 1, og har argumenter $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$. Ganger vi sammen bidragene for de konjugerte røttene finner vi

$$\begin{aligned}
(z - e^{i\frac{\pi}{3}})(z - e^{i\frac{5\pi}{3}}) &= z^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)z + 1 = z^2 - z + 1 \\
(z - e^{i\frac{2\pi}{3}})(z - e^{i\frac{4\pi}{3}}) &= z^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)z + 1 = z^2 + z + 1.
\end{aligned}$$

Vi kan derfor skrive $z^4 + z^2 + 1 = (z^2 - z + 1)(z^2 + z + 1)$.

Oppgave 3.5.15

Formelen for summen av en geometrisk rekke sier at $z^4 + z^2 + 1 = \frac{z^6-1}{z^2-1}$ når $z^2 \neq 1$. Når $z^6 = 1$ så er det da klart at dette blir 0.

Kapittel 4

Seksjon 4.1

Oppgave 4.1.3

b)

Differenslikningen $x_{n+2}+2x_{n+1}+4x_n = 0$ har karakteristisk likning $r^2+2r+4 = 0$, som har røtter

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3}$$

Velger vi $r = -1 + i\sqrt{3}$ finner vi at r har modulus $\sqrt{1+3} = 2$, og argument gitt ved $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$, som gir at $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Setning 4.1.16 gir derfor at den generelle løsningen på kompleks form er

$$x_n = Cr^n + \overline{C}\overline{r}^n = C(-1+i\sqrt{3})^n + \overline{C}(-1-i\sqrt{3})^n,$$

mens den generelle løsningen på reell form er

$$x_n = E2^n\cos(2\pi n/3) + F2^n\sin(2\pi n/3).$$

Oppgave 4.1.4

a)

Differenslikningen $x_{n+2}-3x_{n+1}+3x_n = 0$ har karakteristisk likning $r^2-3r+3 = 0$, som har røtter $r = \frac{3\pm\sqrt{9-12}}{2} = \frac{3\pm i\sqrt{3}}{2}$. Velger vi roten $\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$ så kan vi skrive den generelle løsningen på kompleks form som

$$x_n = C\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \overline{C}\left(\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right)^n.$$

$\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$ har modulus $\sqrt{9+3}/4 = \sqrt{3}/2$, og argument $\theta = \arctan(\sqrt{3}/3) = \pi/6$. Den generelle løsningn på reell form kan dermed skrives

$$E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\cos(n\pi/6) + F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\sin(n\pi/6).$$

Oppgave 4.1.5

a)

Differenslikningen $x_{n+2}+x_{n+1}-6x_n=0$ har karakteristisk likning $r^2+r-6=0$, som har løsning $r=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}$, som gir røttene $r_1=2$ og $r_2=-3$. Den generelle løsningen blir dermed $x_n=C2^n+D(-3)^2$. Setter vi inn for initialverdiene får vi likningene

$$\begin{aligned} C+D &= 9 \\ 2C-3D &= -2. \end{aligned}$$

Løser vi disse får vi at $C=5$ og $D=4$, slik at løsningen blir $x_n=5\cdot 2^n+4\cdot(-3)^n$.

b)

Differenslikningen $x_{n+2}-x_{n+1}+x_n=0$ har karakteristisk likning $r^2-r+1=0$, som har løsning $r=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Velger vi $r=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ så ser vi at r har modulus 1, og argument gitt ved $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}/2}{1/2}=\sqrt{3}$, som gir $\theta=\frac{\pi}{3}$. Den generelle løsningen på reell form blir dermed

$$x_n=E1^n\cos(n\pi/3)+F1^n\sin(n\pi/3)=E\cos(n\pi/3)+F\sin(n\pi/3).$$

$x_0=2$ og $x_1=1$ gir likningene

$$\begin{aligned} E &= 2 \\ E\frac{1}{2}+F\frac{\sqrt{3}}{2} &= 1. \end{aligned}$$

Setter vi inn i den andre likningen får vi at $F=0$, slik at løsningen blir $2\cos(n\pi/3)$.

d)

Differenslikningen $x_{n+2}+2x_{n+1}+2x_n=0$ har karakteristisk likning $r^2+2r+2=0$, som har løsning $r=-1\pm i$. Velger vi $r=-1+i$ så ser vi at r har modulus $\sqrt{2}$, og argument gitt ved $\theta=\frac{3\pi}{4}$. Den generelle løsningen på reell form blir dermed

$$x_n=E(\sqrt{2})^n\cos(n3\pi/4)+F(\sqrt{2})^n\sin(n3\pi/4).$$

$x_0=1$ og $x_1=-2$ gir likningene

$$\begin{aligned} E &= 1 \\ -E\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+F\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} &= -2. \end{aligned}$$

Setter vi inn i den andre likningen får vi at $F=E-2=-1$, slik at løsningen blir

$$x_n=(\sqrt{2})^n\cos(n3\pi/4)-(\sqrt{2})^n\sin(n3\pi/4).$$

Oppgave 4.1.9

Siden første siffer skal være 1 er det klart at vi må ha at $a_1 = 1$. Siden neste siffer ikke kan være 1 hvis forrige var 1, så er det klart at andre siffer må være 0. Dermed må vi også ha $a_2 = 1$, siden det bare er en mulighet for de to første sifrene. Dette forklarer initialbetingelsene.

La oss så forklare hvorfor vi har at $a_n = a_{n-1}+a_{n-2}$ for $n > 2$. Alle sekvenser av lengde n kan splittes i to kategorier: de som slutter med 0, og de som slutter med 1. Siden to enere ikke kan følge etter hverandre så må sistnevnte slutte med 01. Observer nå følgende:

1. For sekvenser av lengde n som slutter med 0 så kan de første $n-1$ sifrene velges vilkårlig, slik at vi her har a_{n-1} muligheter.
2. For sekvenser av lengde n som slutter med 01 så kan de første $n-2$ sifrene velges vilkårlig, slik at vi her har a_{n-2} muligheter.

Legger vi sammen disse to mulighetene får vi at $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ for $n > 2$.

Differenslikningen kan også skrives $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$, som har karakteristisk likning $r^2 - r - 1 = 0$ med røtter $r = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Den generelle løsningen på differenslikningen er derfor $a_n = C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Setter vi $a_1 = a_2 = 1$ får vi likningene

$$
\begin{aligned}
C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) &= 1 \\
C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 &= 1,
\end{aligned}
$$

som kan skrives

$$
\begin{aligned}
C(1+\sqrt{5}) + D(1-\sqrt{5}) &= 2 \\
C(3+\sqrt{5}) + D(3-\sqrt{5}) &= 2.
\end{aligned}
$$

Hvis vi trekker disse fra hverandre får vi at $2C + 2D = 0$, slik at $D = -C$. Setter vi dette inn i den første likningen får vi at $2C\sqrt{5} = 2$, slik at $C = \frac{\sqrt{5}}{5}$, og dermed $D = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. Dermed blir løsningen

$$
a_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).
$$

Oppgave 4.1.13

a)

Likningen vi skal frem til kan skrives som $x_n = \frac{1}{4}x_{n-1} + \frac{5}{4}x_{n-2}$. Det første leddet svarer til de som var syke for en uke siden, og som fremdles er syke (25% av de som var syke). Det andre leddet svarer til de som er blitt smittet av de som hadde sykdommen for to uker siden.

b)

Den karakteristiske likningen er $r^2 - \frac{1}{4}r - \frac{5}{4} = 0$, som har løsninger -1 og $5/4$. Den generelle løsningen er dermed $x_n = C(-1)^n + D(5/4)^n$. Initialverdiene er $x_0 = 190$, $x_1 = 260$, som gir likningene $C + D = 190$, $-C + (5/4)D = 260$, som gir $C = -10$, $D = 200$. Dette gir løsningen $x_n = -10(-1)^n + 200(5/4)^n$. Vi ser at $x_n \to \infty$ når $n \to \infty$.

c)

Den nye differenslikningen blir $x_n - \frac{1}{4}x_{n-1} - \frac{3}{4}x_{n-2}$ som har røtter 1 og $-3/4$. Den generelle løsningen blir dermed $x_n = C + D(-3/4)^n$. Initialverdiene gir $C + D = 190$, $C - (3/4)D = 260$, som gir $C = 230$, $D = -40$. Dette gir løsningen $x_n = 230 - 40(-3/4)^n$. Vi ser nå at $\lim_{n\to\infty} x_n = 230$. Anta til slutt at sykdommen er enda mindre smittsom, slik at antall syke tilfredsstiller differenslikningen $x_n - \frac{1}{4}x_{n-1} - cx_{n-2} = 0$, med $c < 3/4$. Den karakteristiske likningen har da røtter $\frac{1/4 \pm \sqrt{1/16+4c}}{2}$. Når $c < 3/4$ har vi at $1/16 + 4c < 1/16 + 3 = 49/16$, slik at $\sqrt{1/16 + 4c} < 7/4$. Vi har da at

$$|r_i| = |\frac{1/4 \pm \sqrt{1/16 + 4c}}{2}| \leq 1/8 + \frac{\sqrt{1/16 + 4c}}{2} < 1/8 + 7/8 = 1.$$

Dermed blir begge røttene i den karakteristiske likningen mindre enn 1 i absoluttverdi, og dermed blir $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Oppgave 4.1.14

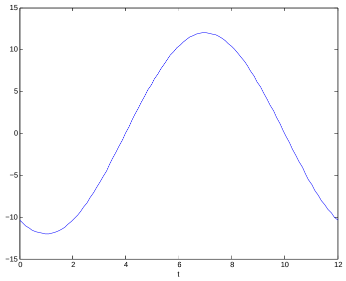
Den karakteristiske likningen er $r^2 - \sqrt{3}r + 1 = 0$, som har røtter $r = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3-4}}{2} = \sqrt{3}/2 \pm i/2$. Setter vi $r = \sqrt{3}/2 + i/2$ ser vi at $\rho = 1$ og $\theta = \pi/6$, slik at den generelle løsningen er $x_n = E\cos(n\pi/6) + F\sin(n\pi/6)$. Initialverdiene $x_1 = -12$, $x_3 = -6$ gir likningene

$$\begin{aligned} E\sqrt{3}/2 + F/2 &= -12 \\ F &= -6, \end{aligned}$$

som gir at $E = \frac{2}{\sqrt{3}}(-12+3) = -6\sqrt{3}$. Løsningen blir dermed $x_n = -6\sqrt{3}\cos(n\pi/6) - 6\sin(n\pi/6)$. For å finne hvilken måned det er kaldest varmest, så kan vi sette den deriverte til funksjonen $f(t) = -6\sqrt{3}\cos(t\pi/6) - 6\sin(t\pi/6)$ lik 0. Vi får da $f'(t) = \frac{\pi}{6}\left(6\sqrt{3}\sin(t\pi/6) - 6\cos(t\pi/6)\right) = 0$. Derfor må vi ha at $\tan(t\pi/6) = \sqrt{3}/3$, slik at $t\pi/6 = \pi/6$ eller $t\pi/6 = 7\pi/6$, slik at $t = 1$ eller $t = 7$. Fra Figur 1 ser vi at minumum inntreffer ved $n = t = 1$ (1. februar), og maksimum inntreffer ved $n = t = 7$ (1. august).

Oppgave 4.1.15

Siden en hunn har både en mor og en far så er det klart at $x_1 = 2$. Siden moren har både mor og far, og faren bare har en mor, så er det klart at $x_2 = 3$, og at vi har to hunnbier og en hannbie to generasjoner tilbake. Siden hver hunnbie har to foreldre, og hannbien bare har en mor, så er det klart at $x_3 = 2 \times 2 + 1 = 5$. Mer generelt, legg merke til at siden enhver bie i generasjon $n - 1$ har nøykatig



Figur 1: Temperatur i klimamodellen i Oppgave 4.1.4

en bie som mor fra generasjon n, så er antall hunnbier i generasjon n lik x_{n-1}. Videre er antall hannbier etter n generasjoner lik antall hunnbier i generasjon $n-1$ (siden det bare er hunnbiene som har en far fra forrige generasjon), og antall hunnbier i generasjon $n-1$ svarer igjen til x_{n-2}. Legger vi sammen antall hunnbier og hannbier får vi at $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$.

Vi ser her at vi har samme differenslikning som i Oppgave 4.1.9, slik at vi har den generell løsningen $x_n = C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Setter vi inn $x_1 = 2$ og $x_2 = 3$ får vi likningene

$$
\begin{aligned}
C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) &= 2 \\
C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 &= 3,
\end{aligned}
$$

som kan skrives

$$
\begin{aligned}
C(1+\sqrt{5}) + D(1-\sqrt{5}) &= 4 \\
C(3+\sqrt{5}) + D(3-\sqrt{5}) &= 6.
\end{aligned}
$$

Hvis vi trekker disse fra hverandre får vi at $2C + 2D = 2$, slik at $D = 1 - C$. Setter vi dette inn i den første likningen får vi at $C + 1 - C + \sqrt{5}(C - 1 + C) = 4$, som gir at $\sqrt{5}(2C - 1) = 3$, og dermed

$$
C = \frac{3}{10}\sqrt{5} + \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{5}+5}{10} = \frac{\sqrt{5}}{10}(3+\sqrt{5}) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2,
$$

hvor vi gjenkjente $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$ fra utregninger ovenfor. Til slutt får vi

$$D = 1 - C = 1 - (\frac{3}{10}\sqrt{5} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{3}{10}\sqrt{5} = -\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2.$$

Dermed får vi at

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right). \end{aligned}$$

som er uttrykket for hvor mange forfedre en hunn har n generasjoner tilbake. La til slutt y_n være antall forfedre en hann har n generasjoner tilbake. Siden en hann bare har en mor så er det klart at generasjonstreet til en hann ser likt ut som for en hunn, med unntak av et ekstra generasjonsledd helt i begynnelsen. Derfor er

$$y_n = x_{n-1} = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Vi legger merke til at løsningen vi fikk både for x_n og y_n er det samme som den vi fant i Oppgave 4.1.9, med den ene forskjellen at sekvsensen er forsinket med en eller to elementer. Og hvis du ser nærmere på løsningen fra 4.3.9 så er $a_3 = 2$, $a_4 = 3$, som jo er initialbetingelsene i denne oppgaven. Derfor kunne vi spart oss utregningene i denne oppgaven hvis vi allerede hadde sett at vi må få samme følge som i Oppgave 4.1.9.

Seksjon 4.2

Oppgave 4.2.1

a)

Den homogene likningen blir her $x_{n+1} - 2x_n = 0$, som har generell løsning $x_n = A2^n$. For å finne en partikulær løsning prøver vi $x_n^p = Bn + C$ og får

$$\begin{aligned} B(n+1) + C - 2(Bn + C) &= n \\ -Bn + B - C &= n, \end{aligned}$$

som gir likningene

$$\begin{aligned} -B &= 1 \\ B - C &= 0, \end{aligned}$$

som gir $B = C = -1$, slik at $x_n^p = -n - 1$. Den generelle løsningen kan dermed skrives $x_n = A2^n - n - 1$.

Oppgave 4.2.5

a)

Den homogene likningen $x_{n+1} - 2x_n = 0$ har generell løsning $x_n^h = A2^n$. For å finne en partikulær løsning prøver vi $x_n^p = B$, og får da $-B = 2$, slik at $B = -2$. Den generelle løsningen blir dermed $x_n = -2 + A2^n$. Siden $x_0 = 4$ får vi at $4 = -2 + A$, slik at $A = 6$. Løsningen blir derfor $x_n = -2 + 6 \times 2^n$.

b)

Den homogene likningen $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 0$ har karakteristisk likning $r^2 - 6r + 8 = 0$, som har røtter 2 og 4. Den generelle løsningen på den homogene likningen blir dermed $x_n^h = A2^n + B4^n$. For å finne en partikulær løsning prøver vi $x_n^p = Cn + D$, og får da

$$\begin{aligned} C(n+2) + D - 6(C(n+1) + D) + 8(Cn + D) &= 9n \\ 3Cn - 4C + 3D &= 9n, \end{aligned}$$

som gir at

$$\begin{aligned} 3C &= 9 \\ -4C + 3D &= 0, \end{aligned}$$

som gir at $C = 3$ og $D = 4$. Den generelle løsningen blir dermed $x_n = A2^n + B4^n + 3n + 4$. Setter vi inn initialbetingelsene får vi likningene

$$\begin{aligned} A + B + 4 &= 3 \\ 2A + 4B + 7 &= 3, \end{aligned}$$

som gir $A = 0$, $B = -1$. Den generelle løsningen blir dermed $x_n = -4^n + 3n + 4$.

Oppgave 4.2.18

a)

Ut fra teksten i oppgaven tar vi ut $(1.02)^n a$ kroner det n'te året. Med renter på pengene fra året før får vi $1.06x_n$ kroner året etter, siden rentesatsen er 6%. Derfor får vi at

$$x_{n+1} = 1.06x_n - (1.02)^n a.$$

Initialbetingelsen blir $x_0 = 10$, siden vi starter med 10 millioner kroner på konto.

b)

Den generelle løsningen av den homogene likningen er $x_n^h = A(1.06)^n$. For å finne en partikulær løsning prøver vi $x_n^p = c(1.02)^n$. Innsetting gir $c(1.02)^{n+1} = 1.06c(1.02)^n - (1.02)^n a$, som kan forenkles til $1.02c = 1.06c - a$, som gir $c = 25a$. Dene generelle løsningen blir dermed $x_n = x_n^h + x_n^p = 25a(1.02)^n + A(1.06)^n$. Setter vi inn $x_0 = 10$ får vi $25a + A = 10$, som gir $A = 10 - 25a$. Løsningen blir derfor

$$x_n = 25a(1.02)^n + (10 - 25a)(1.06)^n.$$

Når n går mot ∞ er det her leddet $(10-25a)(1.06)^n$ som vil dominere. Hvis vi vil alltid ha penger må vi derfor ha at $10-25a \geq 0$, som gir at $a < 0.4$. 400000 kroner er derfor det største beløpet vi kan ta ut det første året hvis vi aldri skal slippe opp for penger på kontoen.

c)

$x_{80} = 0$ gir

$$\begin{aligned} 25a(1.02)^{80} + (10-25a)(1.06)^{80} &= 0 \\ 25a(1.06^{80} - 1.02^{80}) &= 10 \times 1.06^{80} \\ a &= \frac{2}{5(1-(1.02/1.06)^{80})}, \end{aligned}$$

som gir $a = 0.4193$, eller 419300kr. Vi kan altså ta ut litt mer penger per år hvis vi skal gå tom for penger etter 80 år. Dette høres jo rimelig ut.

Oppgave 4.2.21

a)

Andelen av vann fra springen i bassenget etter påfyll er S/V. Andelen gammelt vann i bassenget etter påfyll er $1-S/V$. Siden førstnevnte har saltkonsentrasjon K, mens sistnevnte har saltkonsentrasjon c_{n-1}, så følger det at $c_n = (1-S/V)c_{n-1} + (S/V)K$.

b)

Med de oppgitte tallene får vi likningen $c_n = \left(1-\frac{10}{100}\right)c_{n-1} + \frac{10}{100}0.1 = 0.9c_{n-1} + 0.01$, som kan skrives som $c_n - 0.9c_{n-1} = 0.01$. Den homogene likningen har generell løsning $c_n^h = C(0.9)^n$. For å finne en partikulær løsning c_n^p prøver vi med $c_n^p = A$ og får da at $A - 0.9A = 0.01$, slik at $A = 0.1$. Den generelle løsningen blir dermed $c_n = c_n^h + c_n^p = 0.1 + C(0.9^n)$. Initialbetingelsen $c_0 = 1$ gir at $1 = 0.1 + C$, slik at $C = 0.9$, og dermed blir $c_n = 0.1 + 0.9(0.9)^n = 0.1 + (0.9)^{n+1}$. For at saltkonsentrasjon skal bli halvert må vi ha at $c_n = 0.5$, slik at $0.1 + (0.9)^{n+1} = 0.5$. Dermed blir $(0.9)^{n+1} = 0.4$, slik at $(n+1)\ln(0.9) = \ln(0.4)$, slik at

$$n = \frac{\ln(0.4)}{\ln(0.9)} - 1 \approx 7.68.$$

Vi må derfor velge $n \geq 8$.

Seksjon 4.3

Oppgave 4.3.9

a)

Ganger vi ut får vi at

$$\begin{aligned}
&(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})\\
= \;& x^n - x^{n-1}y\\
&+x^{n-1}y - x^{n-2}y^2\\
&+x^{n-2}y^2 - x^{n-3}y^3\\
&\ldots\\
&+x^2y^{n-2} - xy^{n-1}\\
&+xy^{n-1} - y^n.
\end{aligned}$$

Vi ser her at alle ledd i summen på høyre side kansellerer bortsett fra det første og det siste, slik at vi står igjen med $x^n - y^n$, som var det vi skulle frem til.

b)

Setter vi først $n = 3$ i formelen fra a), og deretter $x = \sqrt[3]{n+1}$ og $y = \sqrt[3]{n}$ (legg merke til at her brukes nå n ikke som potensen som forekommer i a), dette kan være et forvirringsmoment i oppgaven!), så får vi først

$$\begin{aligned}
&(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})((\sqrt[3]{n+1})^2+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+(\sqrt[3]{n})^2)\\
= \;& (\sqrt[3]{n+1})^3-(\sqrt[3]{n})^3 = n+1-n = 1.
\end{aligned}$$

Etter divisjon får vi da

$$\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n} = \frac{1}{(\sqrt[3]{n+1})^2+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+(\sqrt[3]{n})^2}.$$

c)

Bruker vi resultatet fra b) finner vi først at

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{3}}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}) &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{2}{3}}}{(\sqrt[3]{n+1})^2+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+(\sqrt[3]{n})^2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{\frac{n+1}{n}}\right)^2+\sqrt[3]{\frac{n+1}{n}}\sqrt[3]{1}+(\sqrt[3]{1})^2}\\
&= \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

d)

Setter vi først $n = 4$ og deretter $x = \sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}$, $y = 1$ i formelen fra a) får vi at

$$\begin{aligned} &\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}-1\right)\left(\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}\right)^3+\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}\right)^2+\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}+1\right) \\ &= \left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}\right)^4 - 1^4 = 1+\frac{1}{n}-1 = \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

som gir at

$$n\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}-1\right) = \frac{1}{\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}\right)^3+\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}\right)^2+\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}+1}.$$

Lar vi n gå mot uendelig her ser vi at høyresiden går mot $\frac{1}{1+1+1+1} = \frac{1}{4}$.

Oppgave 4.3.11

La $\epsilon > 0$ være gitt. Siden a_n og b_n begge konvergerer mot A så finnes det en N_1 og en N_2 slik at $|a_n - A| \leq \frac{\epsilon}{3}$ for $n \geq N_1$, og $|b_n - A| \leq \frac{\epsilon}{3}$ for $n \geq N_2$. La $N = \max(N_1, N_2)$. For $n \geq N$ har vi da at

$$\begin{aligned} |c_n - A| &= |c_n - a_n + a_n - A| \leq |c_n - a_n| + |a_n - A| \leq |b_n - a_n| + |a_n - A| \\ &= |b_n - A + A - a_n| + |a_n - A| \\ &\leq |b_n - A| + |A - a_n| + |a_n - A| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \end{aligned}$$

som var det vi trengte vise.

Oppgave 4.3.17

Hvis følgen definert ved $a_0 = 0$ og $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1$ er konvergent, så kan vi finne grenseverdien a ved å la n gå mot uendelig på hver side i $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1$, og vi får da $a = \frac{a}{2} + 1$, som gir at $a = 2$ er eneste mulige grenseverdi. Videre, hvis $a_n < 2$ så er det klart at $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1 < 1 + 1 = 2$, og det følger ved induksjon at følgen er oppad begrenset av 2. Videre er

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n}{2} + 1 - a_n = 1 - \frac{a_n}{2} > 1 - 1 = 0,$$

slik at følgen er voksende. Siden følgen er voksende og oppad begrenset vet vi at den er konvergent, og 2 må være grenseverdien siden det er den eneste mulige grenseverdien.

Oppgave 4.3.18

a)

Hvis $x_n < 2$ så er det klart at $x_{n+1} < \sqrt{2 \times 2} = 2$, og det følger ved induksjon at alle $x_n < 2$. Det at $x_{n+1} > x_n$ er det samme som at $x_{n+1}^2 = 2x_n > x_n^2$, som er det samme som at $2 > x_n$, som vi allerede har vist. Derfor er følgen voksende.

b)

I a) viste vi at følgen er både voksende og oppad begrenset, og den er derfor konvergent. Grenseverdien må oppfylle $x = \sqrt{2x}$, som betyr at $x^2 = 2x$, som betyr at $x = 2$.

c)

Hvis følgen definert ved at $y_{n+1} = \sqrt{2y_n + y_n^2}$ har en grense y, så må $y = \sqrt{2y + y^2}$, som gir at $y = 0$. Følgen er opplagt voksende siden $y_{n+1} = \sqrt{2y_n + y_n^2} > \sqrt{y_n^2} = y_n$. Følgen kan da umulig konvergere mot 0 siden startverdien er 1, og eneste mulighet er at følgen går mot uendelig.

Kapittel 5

Seksjon 5.1

Oppgave 5.1.5

Når vi viser at f er kontinuerlig i a ved et $\epsilon - \delta$-bevis, er det lurt å starte med uttrykket $|f(x) - f(a)|$, og finne en størrelse som er større enn denne, der $|x - a|$ inngår, og der vi har begrensinger på de andre leddene som inngår. Valget vårt for δ vil avhenge av det opprinnelige valget av ϵ, skalert med begrensningene på de andre leddene. De følgende oppgavene illustrerer dette.

e)

Vi har at $f(1) = 1$. Vi skal altså vise at vi, for enhver ϵ, kan finne en δ slik at $\left|\frac{1}{x} - 1\right| < \epsilon$ for alle x slik at $|x - 1| < \delta$. Vi ser først at

$$\left|\frac{1}{x} - 1\right| = \frac{|x-1|}{|x|}.$$

Her har vi allerede $|x - 1|$ på høyresiden, men vi må også finne en begrensning på $\frac{1}{|x|}$. Velger vi $\delta < \frac{1}{2}$ (det vil si $|x - 1| < \frac{1}{2}$), så vil $|x| > \frac{1}{2}$, og $\frac{1}{|x|} < 2$. Vi får da

$$\left|\frac{1}{x} - 1\right| = \frac{|x-1|}{|x|} < 2\delta.$$

For at dette skal være mindre enn ϵ må vi velge $\delta < \frac{\epsilon}{2}$. Vi kan derfor velge $\delta = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{2}\right)$, der vi også har tatt med den første begrensningen vi hadde på δ.

f)

Vi har at $f(0) = \frac{1}{3}$. Vi skal altså vise at vi, for enhver ϵ, kan finne en δ slik at $\left|\frac{x+1}{x+3} - \frac{1}{3}\right| < \epsilon$ for alle x slik at $|x| < \delta$. Vi har at

$$\left|\frac{x+1}{x+3} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3x+3-x-3}{3(x+3)}\right| = \left|\frac{2x}{3(x+3)}\right|.$$

Her har vi allerede $|x|$ på høyresiden, men vi må også finne en begrensning på $\frac{1}{|x+3|}$. Velger vi $\delta < 1$ (det vil si $|x| < 1$), så vil $|x + 3| > 2$, og $\frac{1}{|x+3|} < \frac{1}{2}$. Vi får da

$$\left|\frac{x+1}{x+3} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{2x}{3(x+3)}\right| < \left|\frac{2 \times \delta}{3 \times 2}\right| = \frac{\delta}{3}.$$

For at dette skal være mindre enn ϵ må vi velge $\delta < 3\epsilon$. Vi kan derfor velge $\delta = \min(1, 3\epsilon)$, der vi også har tatt med den første begrensningen vi hadde på δ.

g)

Vi har at $f(4) = 2$. Vi skal altså vise at vi, for enhver ϵ, kan finne en δ slik at $|\sqrt{x} - 2| < \epsilon$ for alle x slik at $|x - 4| < \delta$. Vi har at

$$|\sqrt{x} - 2| = \frac{|x-4|}{|\sqrt{x}+2|}.$$

Her har vi allerede $|x - 4|$ på høyresiden, men vi må også finne en begrensning på $\frac{1}{|\sqrt{x}+2|}$. Velger vi $\delta < 1$ (det vil si $|x-4| < 1$) ser vi at $|\sqrt{x}+2| > |\sqrt{3}+2| > 3$, og $\frac{1}{|\sqrt{x}+2|} < \frac{1}{3}$. Vi får da

$$|\sqrt{x} - 2| = \frac{|x-4|}{|\sqrt{x}+2|} \leq \frac{\delta}{3}.$$

For at dette skal være mindre enn ϵ må vi velge $\delta < 3\epsilon$. Vi kan derfor velge $\delta = \min(1, 3\epsilon)$, der vi også har tatt med den første begrensningen vi hadde på δ.

Seksjon 5.2

Oppgave 5.2.6

I et polynom P er det den potensen av høyest grad som vil dominere når x går mot uendelig. I et polynom av odde grad så vil leddet av høyest grad gå mot $-\infty$ når $x \to -\infty$, og mot ∞ når $x \to \infty$. Spesielt kan vi finne en N_1 slik at $P(x) < 0$ når $x < N_1$, og en N_2 slik at $P(x) > 0$ når $x > N_2$. For intervallet $[N_1, N_2]$ har vi derfor at $P(N_1) < 0$, $P(N_2) < 0$, og derfor følger det fra skjæringssetningen at P har minst et nullpunkt på $[N_1, N_2]$.

Oppgave 5.2.7

a)

La oss definere funksjonene $f(t)$ og $g(t)$ ved at de gir oss høyden ved tiden t på den første og den andre dagen, respektive. Kall videre starthøyden for A, og høyden på toppen for B. Da har vi at $f(7) = A, f(15) = B, g(7) = B, g(15) = A$. Definer også $h(t) = f(t) - g(t)$. Vi har nå at $h(7) = f(7) - g(7) = A - B < 0$, og $h(15) = f(15) - g(15) = B - A > 0$. Fra skjæringssetningen følger det nå at det finnes et nullpunkt c for h mellom 7 og 15. Her har vi at $f(c) = g(c)$, slik at c svarer til et tidspunkt mellom kl. 7 og kl. 15 der klatreren befinner seg i samme høyde.

b)

Vi har nå i stedet at $f(7) = A, f(15) = B, g(10) = B, g(16) = A$. Dette gir at $h(10) = f(10) - g(10) = C - B < 0$, og $h(15) = f(15) - g(15) = B - D > 0$, der

$C < B$ er høyden klatreren har kl. 10 første dag, og $D < B$ er høyden klatreren har kl. 15 andre dag. resten av resonnementet er nå som i a), slik at vi finner et tilsvarende tidspunkt mellom kl. 10 og 15 her. Altså har vi også her at det finnes et tidspunkt der høyden er de samme begge dagene.

Oppgave 5.2.12

a)

I summen

$$\left(f(0) - f\left(\frac{1}{N}\right)\right) + \left(f\left(\frac{1}{N}\right) - f\left(\frac{2}{N}\right)\right) + \cdots + \left(f\left(\frac{N-1}{N}\right) - f(1)\right)$$

vil det andre og det tredje leddet kansellere hverandre, det fjerde og det femte. De siste leddene som kansellerer hverandre er det tredje siste og det nest siste. De eneste leddene som ikke kansellerer hverandre er det første og det siste, slik at vi står igjen med $f(0) - f(1)$. Med dette er 0 siden $f(0) = f(1)$ ved antagelse, som var det vi skulle vise. Hvis alle leddene ikke er null, og alle forskjellig fra null har samme fortegn, så må den totale summen bli forskjellig fra null også, som er en motsigelse. Altså finnes det garantert to ledd $\left(f\left(\frac{i}{N}\right) - f\left(\frac{i+1}{N}\right)\right)$ og $\left(f\left(\frac{j}{N}\right) - f\left(\frac{j+1}{N}\right)\right)$ som har motsatt fortegn.

b)

Vi har at $g\left(\frac{i}{N}\right)$ svarer til det i´te leddet i summen fra a), og vi har vist at to av disse leddene, $g\left(\frac{i}{N}\right), g\left(\frac{j}{N}\right)$ har motsatt fortegn. Men da følger det fra skjæringssetningen at det finnes en c (mellom $\frac{i}{N}$ og $\frac{j}{N}$) der $g(c) = 0$.

c)

La c være slik at $g(c) = 0$. Da blir $f(c) - f\left(c + \frac{1}{N}\right) = 0$, slik at $f(c) = f\left(c + \frac{1}{N}\right)$. Vi kan altså sette $d = c + \frac{1}{N}$, for da er jo også $d - c = \frac{1}{N}$.

d)

Vi regner ut

$$\begin{aligned}
h(0) &= 0 - 0 = 0 \\
h(1) &= \sin^2\left(\frac{\pi}{a}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{a}\right),
\end{aligned}$$

slik at $h(0) = h(1) = 0$. La nå c, d være slik at $d - c = a$. Vi skal vise at, så lenge a ikke er på formen $\frac{1}{N}$ for en eller annen N, så kan ikke $h(c) = h(d)$. Hvis $h(c) = h(d)$ ville

$$h(c) = \sin^2\left(\frac{\pi c}{a}\right) - c\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi d}{a}\right) - d\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\right) = h(d).$$

Samler vi leddene her får vi

$$\sin^2\left(\frac{\pi d}{a}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi c}{a}\right) = (d - c)\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\right) = a\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\right).$$

Setter vi inn $d = a + c$ kan venstresiden skrives

$$\begin{aligned}\sin^2\left(\frac{\pi(c+a)}{a}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi c}{a}\right) &= \sin^2\left(\frac{\pi c}{a} + \pi\right) - \sin^2\left(\frac{\pi c}{a}\right) \\ &= \sin^2\left(\frac{\pi c}{a}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi c}{a}\right) = 0,\end{aligned}$$

og da må jo også høyresiden være null, slik at $a\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\right) = 0$. Men dette kan skje bare hvis $\frac{\pi}{a}$ er på formen $N\pi$, slik at $a = \frac{1}{N}$, som strider mot antagelsen.

Seksjon 5.3

Oppgave 5.3.3

a)

Anta $\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = B$. For enhver ϵ finnes det da konstanter N_1, N_2 slik at $|f(x) - A| < \epsilon$ for $x < N_1$, og $|f(x) - B| < \epsilon$ for $x > N_2$. Men da er f begrenset for $x < N_1$, og for $x > N_2$. f er også begrenset på $[N_1, N_2]$ siden dette er et lukket og begrenset intervall, og dermed er f begrenset på hele tallinjen.

b)

Anta at $f(x_1) < 0$, og at $f(x_2) > 0$. Siden $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ så kan vi velge N_1, N_2 slik at $|f(x)| < \min(-x_1, x_2)$ for $x < N_1$ og for $x > N_2$. Men da vet vi at vi ikke kan finnes noen ekstremalverdier til f utenfor $[N_1, N_2]$. Videre vet vi at f har både maksimum og minimum på $[N_1, N_2]$, som dermed må være globale ekstremalverdier.

Oppgave 5.3.5

Vi vet at f har både maksimum og minimum på $[a, b]$, slik at $V_f \subset [a, b]$. Vi påstår at verdimengden er hele $[a, b]$. Dette vil vise at V_f er et lukket og begrenset intervall. Anta nemlig at $d \in [a, b]$. På grunn av skjæringssetningen vil det jo da finnes en c mellom maksimums- og minimumspunktet, der $f(c) = d$. Dette viser at $d \in V_f$, slik at $V_f = [a, b]$.

Oppgave 5.3.6

I et n´te gradspolynom er det leddet av grad n som vil dominere når x går mot $-\infty$ og ∞. Dette går mot ∞ i begge tilfeller, slik at $\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to\infty} P(x) = \infty$. På grunn av dette finnes det for enhver R en N slik at $P(x) > R$ for alle x med $|x| > N$. Siden P er kontinuerlig og $[-N, N]$ er en lukket og begrenset intervall, så har P et minimumspunkt S på dette intervallet. Men da er det klart at vi kan sette $K = \min(R, S)$, der $P(x) > K$ for alle x.

Seksjon 5.4

Oppgave 5.4.2

c)

For å vise at $\lim_{x\to 1}(2x^2+1) = 3$ trenger vi vise at, til enhver $\epsilon > 0$, så kan vi finne en $\delta > 0$ slik at $|2x^2+1-3| < \epsilon$ for alle δ slik at $|x-1| < \delta$. Vi har at

$$|2x^2+1-3| = |2x^2-2| = 2|x+1||x-1|.$$

Vi har at hvis $\delta < 1$, det vil si $|x-1| < 1$, så vil $|x+1| < 2$, og dermed vil størrelsen over være mindre enn $4|x-1| = 4\delta$, og hvis $\delta < \frac{\epsilon}{4}$ så vil dette igjen være minre enn ϵ. Vi kan altså velge $\epsilon = \min\left(1, \frac{\epsilon}{4}\right)$.

Oppgave 5.4.4

c)

Vi ser at $f(6) = \lim_{x\to 6^-} = \frac{1}{6}$, siden $f(x) = \frac{1}{x}$ er kontinuerlig for $x = 6$. Videre er

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 6^+} f(x) &= \lim_{x\to 6^-} \frac{\sqrt{x+3}-3}{x-6} = \lim_{x\to 6^-} \frac{x+3-9}{(x-6)(\sqrt{x+3}+3)} \\
&= \lim_{x\to 6^-} \frac{1}{\sqrt{x+3}+3} = \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Dermed er f kontinuerlig for $x = 6$.

Oppgave 5.4.7

For å vise at $\lim_{x\to a} f[g(x)] = c$ trenger vi, for enhver ϵ, finne en δ slik at $|f[g(x)] - c| < \epsilon$ for alle x slik at $|x-a| < \delta$.

- Siden $\lim_{x\to b} f(x) = c$ vet vi at det finnes en δ_1 slik at $|f(x) - c| < \epsilon$ for alle x slik at $|x-b| < \delta_1$.
- Siden $\lim_{x\to a} g(x) = b$ vet vi også at det finnes en δ_2 slik at $|g(x) - b| < \delta_1$ for alle x slik at $|x-a| < \delta_2$.

Hvis $|x-a| < \delta_2$ vil dermed $|f[g(x)] - c| < \epsilon$, slik at vi kan sette $\delta = \delta_2$.

Kapittel 6

Seksjon 6.1

Oppgave 6.1.9

Vi har at

$$\begin{aligned} D[x^2] &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2hx+h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x. \end{aligned}$$

Oppgave 6.1.10

Vi har at

$$\begin{aligned} D[\sqrt{x}] &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Oppgave 6.1.11

a)

Vi har at

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{|1+h-1|-|1-1|}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}.$$

Det er klart at $\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h} = 1$, og $\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h} = -1$, slik at grenseverdien ikke eksisterer.

b)

Vi har at

$$g'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h-1)|1+h-1|-(1-1)|1-1|}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h|h|}{h} = \lim_{h\to 0}|h| = 0,$$

slik at den deriverte i 1 eksisterer, og er lik 0.

Oppgave 6.1.13

Vi har at

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{1-\cos h}{h}}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{1-\cos h}{h^2}\\
&= \lim_{h\to 0^+}\frac{(1-\cos h)(1+\cos h)}{h^2(1+\cos h)} = \lim_{h\to 0^+}\frac{1-\cos^2 h}{h^2(1+\cos h)}\\
&= \lim_{h\to 0^+}\frac{\sin^2 h}{h^2(1+\cos h)} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\sin^2 h}{h^2}\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{1+\cos h}\\
&= 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

mens

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} h = 0.$$

Siden de ensidige grenseverdiene er forskjellige, så følger det at f ikke er deriverbar i 0.

Oppgave 6.1.14

Vi regner ut

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k h^{n-k}-x^n}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^n+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^k h^{n-k}-x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^k h^{n-k}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^k h^{n-k-1}\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\binom{n}{n-1}x^{n-1}+\binom{n}{n-2}x^{n-2}h+\binom{n}{n-3}x^{n-3}h^2+\cdots\right)\\
&= nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

Vi har her brukt binomialformelen, at $\binom{n}{n-1} = n$, og at det bare er det første leddet som ikke inneholder en potens av h.

Oppgave 6.1.15

Vi har at

$$\begin{aligned}
\sin'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\cos x\frac{\sin h}{h} + \lim_{h\to 0}\sin x\frac{\cos h-1}{h}\\
&= \cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} + \sin x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} = \cos x,
\end{aligned}$$

der vi har brukt at $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$, og at

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos^2 h-1}{h(\cos h+1)}=\lim_{h\to 0}\frac{-\sin^2 h}{h(\cos h+1)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\lim_{h\to 0}\frac{-\sin h}{\cos h+1}=1\times 0=0.
\end{aligned}$$

Seksjon 6.2

Oppgave 6.2.4

$x=\tan x$ svarer til at $f(x)=x-\tan x=0$. Vi har at $f'(x)=1-\frac{1}{\cos^2 x}$.

Det er klart at intervallene på formen $[((n-1)/2)\pi,((n+1)/2)\pi]$ svarer til intervaller med sentrum i $k\pi$ med lengde π. På slike intervaller antar $\tan x$ alle verdier mellom $-\infty$ og ∞, slik at f går mot $-\infty$ og ∞ i hver ende av intervallet. Det følger fra skjæringssetningen at f har minst ett nullpunkt, slik at det finnes minst et punkt der $x=\tan x$.

Videre har vi at $\cos^2(x)\geq 1$, slik at $f'(x)\leq 0$, og $f'(x)=0$ hvis og bare hvis $x=k\pi$.

- I det første intervallet (n=0), så er $x=0$ et nullpunkt for f. Det er klart at det ikke kan finnes andre nullpunkter mellom $-\pi/2$ og $\pi/2$, siden f er strengt avtagende på $[-\pi/2,0)$, og på $(0,\pi/2]$.

- For andre n er $f(n\pi)=n\pi\neq 0$, og $\lim_{x\to((n-1)/2)\pi}=-\infty$, $\lim_{x\to((n+1)/2)\pi}=\infty$.

- Hvis $n>0$ så er det klart at f ikke har noen nullpunkter på $[n\pi,((n+1)/2)\pi)$, og har nøyaktig et nullpunkt på $[((n-1)/2)\pi,n\pi)$ (siden f er avtagende på hvert av intervallene).

- Hvis $n<0$ så er det klart at f har nøyaktig et nullpunkt på $[n\pi,((n+1)/2)\pi)$, og ikke har noen nullpunkter på $[((n-1)/2)\pi,n\pi)$.

I alle tilfellene $n=0$, $n>0$, $n<0$, ser vi at f har nøkatig ett nullpunkt.

Oppgave 6.2.8

Sett $f(x)=\ln(1+x)$, $a=0$, $b=x$. Vi får først at $f(0)=0$, $f'(x)=\frac{1}{1+x}$. Bruker vi middelverdisetningen får vi at det finnes en c mellom 0 og x slik at

$$f'(c)=\frac{1}{1+c}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\ln(1+x)-0}{x-0}=\frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Vi har altså at $\frac{1}{1+c}=\frac{\ln(1+x)}{x}$, og resultatet følger ved å gange med x på begge sider.

Oppgave 6.2.10

Likningen $(1+x)^a\leq 1+ax$ kan først skrives om til $(1+x)^a-1\leq ax$. Deler vi nå med x på begge sider vil det stå igjen $\frac{(1+x)^a-1}{x}=\frac{(1+x)^a-1}{x}$ på venstresiden. Bruker vi middelverdisetningen på funksjonen $f(x)=(1+x)^a$ på intervallet fra

0 til x får vi at $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{(1+x)^a-1}{x} = f'(c) = a(1+c)^{a-1}$ for en c i intervallet fra 0 til x.

Vi splitter nå det vi skal vise i to muligheter: For $x > 0$ slipper vi å snu ulikheten når vi deler med x, slik at vi her skal vise at $\frac{(1+x)^a-1}{x} = a(1+c)^{a-1} \le a$, som er det samme som at $(1+c)^{a-1} \le 1$, som er opplagt siden $1+c \ge 1$ og $a-1 \le 0$.

For $-1 < x < 0$ må vi snu ulikheten når vi deler med x, slik at vi her skal vise at $\frac{(1+x)^a-1}{x} = a(1+c)^{a-1} \ge a$, som er det samme som at $(1+c)^{a-1} \ge 1$, som er opplagt siden $0 < 1+c \le 1$ og $a-1 \le 0$.

For $x = 0$ ser vi at vi faktisk har likhet i den gitte ulikheten, slik at den $(1+x)^a \le 1+ax$ faktisk holder i alle tilfeller

Oppgave 6.2.12

Sett $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Deriverer vi finner vi at $f'(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$, og vi ser at $f'(x) \le 1$ for alle x. Bruker vi middevlerdisetningen for x og y ser vi at

$$\left| \frac{\frac{x}{1+x^2} - \frac{y}{1+y^2}}{x-y} \right| = |f'(c)| \le 1.$$

Ganger vi opp med $|x-y|$ på begge sider, så får vi det vi skal vise.

Oppgave 6.2.13

Bruker vi middelverdisetningen på intervallet (a,d) ser vi at det finnes en $c_1 \in (a,d)$ slik at $f'(c_1) = \frac{f(d)-f(a)}{d-a} = 0$. Bruker vi middelverdisetningen på samme måte på intervallet (d,b) ser vi at det finnes en $c_2 \in (d,b)$ slik at $f'(c_2) = 0$. Bruker vi nå middelverdisetningen på (c_1, c_2) og funksjone $f'(x)$ får vi at det finnes en $c \in (c_1, c_2)$ slik at $f''(c) = \frac{f'(c_2)-f'(c_1)}{c_2-c_1} = 0$, som var det vi skulle vise.

Oppgave 6.2.21

a)

Sett $f(x) = \ln(\ln x)$, og bruk middelverdisetningen på $a = n$ og $b = n+1$. Vi får først at $f'(x) = \frac{1}{x \ln x}$, og så at det finnes en c mellom n og $n+1$ slik at

$$\frac{\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n)}{1} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n) = \frac{1}{c \ln c}$$

Vi har også at $f''(x) = \frac{-1-\ln x}{(x \ln x)^2}$, slik at $f''(x) < 0$ for $x > \frac{1}{e}$. Siden $n > 1$ så er altså $f'(x)$ avtagende på området vi ser på, slik at

$$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} < \frac{1}{c \ln c} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n) < \frac{1}{n \ln n},$$

som var det vi skulle vise.

b)

Bruker vi den venstre ulikheten fra a) får vi

$$\begin{aligned}
s_n &= \frac{1}{2\ln 2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \\
&> (\ln(\ln 3) - \ln(\ln 2)) + (\ln(\ln 4) - \ln(\ln 3)) + \cdots \\
&\quad +(\ln(\ln(n+2)) - \ln(\ln(n+1))) \\
&= \ln(\ln(n+2)) - \ln(\ln 2) \to \infty,
\end{aligned}$$

som viser at s_n ikke konvergerer.

c)

Fortsetter vi med ulikheten fra b) får vi

$$\begin{aligned}
t_n &= s_n - \ln[\ln(n+1)] \\
&> \ln(\ln(n+2)) - \ln(\ln 2) - \ln[\ln(n+1)] \\
&> -\ln(\ln 2),
\end{aligned}$$

som er den ene ulikheten i det vi skal vise. Får å få den andre ulikheten bearbeider vi den høyre ulikheten fra a) på samme måte som i b):

$$\begin{aligned}
s_n &= \frac{1}{2\ln 2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \\
&< \frac{1}{2\ln 2} + (\ln(\ln 3) - \ln(\ln 2)) + (\ln(\ln 4) - \ln(\ln 3)) + \cdots \\
&\quad + \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n) \\
&= \frac{1}{2\ln 2} + \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2).
\end{aligned}$$

Fortsetter vi med ulikheten fra b) får vi

$$\begin{aligned}
t_n &= s_n - \ln[\ln(n+1)] \\
&< \frac{1}{2\ln 2} + \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) - \ln[\ln(n+1)] \\
&= \frac{1}{2\ln 2} - \ln(\ln 2).
\end{aligned}$$

Vi har nå vist at, for alle n,

$$-\ln(\ln 2) < t_n < -\ln(\ln 2) + \frac{1}{2\ln 2}.$$

Videre har vi at

$$\begin{aligned}
t_{n+1} - t_n &= \frac{1}{(n+2)\ln(n+2)} - \ln(\ln(n+2)) + \ln(\ln(n+1)) \\
&< \frac{1}{(n+2)\ln(n+2)} - \frac{1}{(n+2)\ln(n+2)} = 0,
\end{aligned}$$

der vi har brukt venstre ulikhet i a). Dermed er følgen avtagende. Siden følgen også er nedad begrenset, så er den konvergent. Videre må da grenseverdien t oppfylle

$$-\ln(\ln 2) \leq t \leq -\ln(\ln 2) + \frac{1}{2\ln 2}.$$

Seksjon 6.3

Oppgave 6.3.3

e)

Vi har at

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)} \\
&= e^{\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)} \\
&= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}} \\
&= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\frac{\cos\frac{1}{x}}{1+\sin\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}} \\
&= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}}{1+\sin\frac{1}{x}}} \\
&= e^{\frac{\cos 0}{1+\sin 0}} = e^1 = e.
\end{aligned}$$

Oppgave 6.3.6

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x(e^{1/x}-1) &= \lim_{x\to\infty}\frac{e^{1/x}-1}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x^2}\frac{e^{1/x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} e^{1/x} = 1
\end{aligned}$$

Oppgave 6.3.18

Det er klart at nevneren i uttrykket går mot 0, mens telleren går mot $1+q$. Eneste mulighet for at grenseverdien skal eksistere er da at $1+q=0$, eller $q=-1$. Da blir grenseverdien gitt ved

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\cos x}+px-1}{x\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-(\sin x)e^{\cos x}+p}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}.$$

Det er klart at nevneren også i dette uttrykket går mot 0, og telleren går mot p. Skal grenseverdien eksistere må derfor $p=0$, og grenseverdien blir da gitt ved

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}\frac{-(\sin x)e^{\cos x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{(\sin^2 x-\cos x)e^{\cos x}}{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}} \\
&= \frac{(0-1)e^1}{1+1} = -\frac{1}{2}e.
\end{aligned}$$

Oppgave 6.3.22

Vi har at $f(0)=\frac{1}{2}$, og at

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Siden $x^2 + \frac{1}{2}$ er kontinuerlig for negative x, så følger det at f er kontinuerlig i 0. Videre har vi at

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1-\cos h}{h^2} - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2-2\cos h - h^2}{2h^3} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{2\sin h - 2h}{6h^2} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2\cos h - 2}{12h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{-2\sin h}{12} = 0 \\
\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0^+} h = 0,
\end{aligned}$$

og det følger at f er deriverbar i 0 med $f'(0) = 0$.

Seksjon 6.4

Oppgave 6.4.15

a)

g er definert der nevneren er $\neq 0$, det vil si der $\tan x \neq 0$, og der $\tan x$ er definert. Førstnevnte utelukker bare $x = k\pi$, mens sistnevnte utelukker $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$. Disse to til sammen svarer til alle punkter på formen $k\frac{\pi}{2}$, slik at $D_g = \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$.

b)

$g'(x) = \frac{\tan x - \frac{x}{\cos^2 x}}{\tan^2 x} = \frac{\sin x \cos x - x}{\sin^2 x}$.

c)

Vi vet at $\sin x < x$ når $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Deler vi med $\cos x$ (som er positiv på det gitte intervallet) på begge sider får vi at

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} < \frac{x}{\cos x} < \frac{x}{\cos^2 x},$$

der vi i den siste overgangen har brukt at $0 < \cos x < 1$ på det gitte intervallet. Fra b) har vi videre at $g'(x)$ har samme fortegn som $\tan x - \frac{x}{\cos^2 x}$, som da blir negativ, slik at g er avtagende på $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

En annen måte å vise dette på er ved først å observere at

$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\tan x - \tan 0}{x - 0} = g'(c) = \frac{1}{\cos^2 c}$$

for en c mellom 0 og x, der vi har brukt middelverdisetningen på funksjonen $f(x) = \tan x$. Siden $\cos x$ er avtagende på $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ følger det at $\frac{1}{\cos^2 c} < \frac{1}{\cos^2 x}$. Dermed er $\frac{\tan x}{x} < \frac{1}{\cos^2 x}$, og ulikheten vi skal vise følger nå ved at vi ganger opp med x på begge sider.

e)

Det er klart at f er kontinuerlig utenom "skjøtepunktene" $x = 0, x = \pm\frac{\pi}{2}$. For $x = 0$ regner vi ut grenseverdien

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 1 = f(0),$$

som viser at f er kontinuerlig i 0. Når x går mot $\pm\frac{\pi}{2}$ så er det klart at $\tan x$ går mot ∞, slik at $\lim_{x\to\pm\pi/2} f(x) = 0 = f(0)$, slik at f er kontinuerlig i $\pm\frac{\pi}{2}$ også, og dermed er f kontinuerlig i hele $(-\pi, \pi)$.

f)

Den deriverte i 0 er

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{\tan h} - 1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \lim_{h\to 0} \frac{h\cos h - \sin h}{h \sin h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - h\sin h - \cos h}{h\cos h + \sin h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h\sin h}{h\cos h + \sin h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-\sin h - h\cos h}{-h\sin h + \cos h + \cos h} = \frac{0}{2} = 0,
\end{aligned}$$

der vi har brukt L'Hôpitals regel to ganger. Dette viser at f er deriverbar i 0, og at $f'(0) = 0$. For $x = -\frac{\pi}{2}$ får vi

$$\begin{aligned}
f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-\frac{\pi}{2}+h}{\tan(-\frac{\pi}{2}+h)}}{h} \\
&= -\frac{\pi}{2} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h\tan(-\frac{\pi}{2} + h)} = -\frac{\pi}{2} \lim_{h\to 0} \frac{\cos(-\frac{\pi}{2} + h)}{h\sin(-\frac{\pi}{2} + h)} \\
&= \frac{\pi}{2} \lim_{h\to 0} \frac{\cos(-\frac{\pi}{2} + h)}{h} = \frac{\pi}{2} \lim_{h\to 0} \frac{-\sin(-\frac{\pi}{2} + h)}{1} \\
&= \frac{\pi}{2}\frac{1}{1} = \frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

der vi igjen har brukt L'Hôpitals regel. Dette viser at f er deriverbar i $-\frac{\pi}{2}$, og at $f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$. På samme måte får vi for $x = \frac{\pi}{2}$ at

$$\begin{aligned}
f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\frac{\pi}{2}+h}{\tan(\frac{\pi}{2}+h)}}{h} \\
&= \frac{\pi}{2} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h\tan(\frac{\pi}{2} + h)} = \frac{\pi}{2} \lim_{h\to 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} + h)}{h\sin(\frac{\pi}{2} + h)} \\
&= \frac{\pi}{2} \lim_{h\to 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} + h)}{h} = \frac{\pi}{2} \lim_{h\to 0} \frac{-\sin(\frac{\pi}{2} + h)}{1} \\
&= \frac{\pi}{2}\frac{-1}{1} = -\frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

som viser at f er deriverbar også i $\frac{\pi}{2}$, og at $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

Seksjon 6.5

Oppgave 6.5.10

Vi regner først ut

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to\infty} x(e^{1/x}-1) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x}-1}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = \lim_{h\to 0} e^h = 1,
\end{aligned}$$

der vi har brukt L'Hôpitals regel. Vi regner deretter ut

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} (f(x)-x) &= \lim_{x\to\infty} (x^2(e^{1/x}-1)-x) = \lim_{x\to\infty} x(x(e^{1/x}-1)-1) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{h}(e^h-1)-1}{h}.
\end{aligned}$$

Vi viste akkurat at $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(e^h-1) = 1$, slik at vi her kan bruke L'Hôpitals regel. Vi får dermed

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h}e^h - \frac{1}{h^2}(e^h-1) \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(h-1)e^h+1}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{he^h}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2}e^h = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Derfor blir $y = x + \frac{1}{2}$ en asymptote for f.

Vi må også sjekke om $x = 0$ er en asymptote, siden f ikke er definert for $x = 0$. Vi regner ut

$$\lim_{x\to 0} x^2(e^{1/x}-1) = \lim_{x\to 0} x^2 e^{1/x} = \lim_{y\to\infty} \frac{e^y}{y^2} = \infty,$$

der vi på det siste uttrykket brukte L'Hôpitals regel to ganger. Derfor er også $x = 0$ en asymptote for f.

Kapittel 7

Seksjon 7.1

Oppgave 7.1.1

La sidene til innhegningen være x og y, der y er den delen som står mot låven. Lengden på gjerdet blir $2x + y = 50$, slik at $y = 50 - 2x$. Arealet blir derfor $A = xy = x(50 - 2x) = 50x - 2x^2$. Setter vi den deriverte lik 0 får vi at

$$A'(x) = 50 - 4x = 0,$$

som gir at $x = 12.5m$, og $y = 50 - 2x = 25m$. Det maksimale arealet blir derfor $12.5 \times 25m^2 = 312.5m^2$.

Oppgave 7.1.4

På 1 time kjører bilen v mil, slik at bensinforbruket per mil blir $\frac{2+0.08v^2}{v} = \frac{2}{v} + 0.08v$. Deriverer vi dette får vi $-\frac{2}{v^2} + 0.08$. Setter vi dette lik 0 får vi at $\frac{2}{v^2} = 0.08$, som gir at $v^2 = 25$, og deretter $v = 5$. Dette må bli et minimum, siden bensinforbruket per mil går mot uendelig både når $v \to 0$, og når $v \to \infty$. Vi har altså minimum bensinforbruk per mil for $v = 5$ mil per time, eller $50km/h$.

Oppgave 7.1.7

Høyden på renna er $20\sin\theta$, og bredden på siderenna er $20\cos\theta$. Arealet av tverrsnittet blir dermed

$$20 \times 20\sin\theta + 20\sin\theta \times 20\cos\theta = 400\sin\theta(1+\cos\theta) = 200\sin(2\theta) + 400\sin\theta.$$

Deriverer vi dette får vi $400(\cos(2\theta) + \cos\theta)$. Skal dette bli 0 må $\cos(2\theta) + \cos\theta = 0$, som også kan skrives $2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$. Løser vi denne finner vi at $\cos\theta = -1$ eller $\cos\theta = \frac{1}{2}$. Førstnevnte gir tverrsnitt 0, som jo er et minimumspunkt for arealet. Sistnevnte må være et maksimum, der $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Oppgave 7.1.9

a)

La sidene i rektanglet være x og y. Skal omkretsen være c så må $2x + 2y = c$, som gir at $y = \frac{1}{2}c - x$. Arealet blir da $A = xy = x\left(\frac{1}{2}c - x\right) = \frac{1}{2}cx - x^2$, og vi får at $A'(x) = \frac{1}{2}c - 2x$. Skal dette være 0 må $x = \frac{c}{4}$, som svarer til at alle sidene er like lange, altså at vi har et kvadrat.

b)

La sidene i pakken være x, y, z. På grunn av a) kan vi anta at grunnflaten er kvadratisk, siden vi er ute etter å maksimere volum. Summen av omkretsen og største lengde blir da $4x + z$. Setter vi dette til 300 må $z = 300 - 4x$, og volumet blir derfor $V = x^2(300 - 4x) = 300x^2 - 4x^3$. Vi får nå at $V'(x) = 600x - 12x^2 = 12x(50 - x)$, og skal dette være 0 må enten $x = 0$ eller $x = 50$. Det er sistnevnte som må maksimere volumet, siden den første gir volum 0. Vi får altså at $x = y = 50$, og $z = 300 - 4x = 100$.

Oppgave 7.1.15

La θ være vinkelen mellom diameteren og linjen fra sentrum i sirkelen til et av de øverste hjørnene på trapesen. Det er klart at høyden på trapesen er $r \sin\theta$, og at øverste kant på trapesen har lengde $2r\cos\theta$. Siden nederste kant på trapesen har lengde $2r$, så blir arealet lik

$$A(\theta) = \frac{1}{2}(2r + 2r\cos\theta)r\sin\theta = r^2\sin\theta(\cos\theta + 1) = \frac{1}{2}r^2\sin(2\theta) + r^2\sin\theta.$$

Vi får da at

$$A'(\theta) = r^2(\cos(2\theta) + \cos\theta).$$

Skal dette bli 0 må $\cos(2\theta)+\cos\theta = 0$, som også kan skrives $2\cos^2\theta+\cos\theta-1 = 0$. Løser vi denne finner vi at $\cos\theta = -1$ eller $\cos\theta = \frac{1}{2}$. Førstnevnte gir areal 0, som jo er et minimumspunkt for arealet. Vi må ha et maksimum for en θ, siden enhver kontinuerlig funksjon på et begrenset intervall har maksimum og minimum. Videre kan ikke endepunktene i intervallet ($\theta = 0$, $\theta = \pi$) våre maksimum, siden for disse punktene blir arealet 0. Derfor må maksimum inntreffe i et indre punkt, som er det punktet vi har funnet. For maksimum finner vi at $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, som gir areal

$$r^2\sin\theta(\cos\theta + 1) = r^2\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}r^2}{4}.$$

Seksjon 7.2

Oppgave 7.2.7

La z være lengden på det opplyste området, og x være avstanden fra gjerdet. Vi har da at $\frac{\frac{z}{2}}{x} = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, som gir at $z = \frac{2}{3}\sqrt{3}x$. Dette gir at $z'(t) = \frac{2}{3}\sqrt{3}x'(t)$, og hvis $x'(t) = 1$ som angitt i oppgaven, så blir $z'(t) = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

Oppgave 7.2.13

La x være avstanden mellom bilen og stolpen, og la z være avstanden mellom bilen og radaren. Avstanden til radaren er $\sqrt{24^2 + 7^2} = 25$. Vi har også at $x^2 = z^2 - 7^2$. Deriverer vi begge sider får vi $2x(t)x'(t) = 2z(t)z'(t)$, som gir at $x'(5) = \frac{z(5)z'(5)}{x(5)} = \frac{25\times 30}{24} = 31.25m/s$.

Seksjon 7.4

Oppgave 7.4.8

Bruker vi kjerneregelen en gang har vi jo $g'(x) = \frac{1}{f'[g(x)]}$. Deriverer vi denne som en brøk får vi

$$g''(x) = \frac{0 - f''[g(x)]g'(x)}{(f'[g(x)])^2} = -\frac{f''[g(x)]g'(x)}{(f'[g(x)])^2}$$

Merk at vi kan skrive dette enda mer kompakt som $g'(x) = -\frac{f''[g(x)]}{(f'[g(x)])^3}$ ved å substituere $g'(x) = \frac{1}{f'[g(x)]}$. Med $f(x) = \sin x$ har vi $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$. Vi har også at $f(\pi/6) = 1/2$, slik at $g(1/2) = \pi/6$, og dermed

$$\begin{aligned} f'(g(1/2)) &= \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2 \\ f''(g(1/2)) &= -\sin(\pi/6) = -1/2. \end{aligned}$$

Dermed blir

$$g''(1/2) = -\frac{-\frac{1}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3} = \frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{9}\sqrt{3}.$$

Oppgave 7.4.10

Med $f(x) = xe^{(1-x^2)/2}$ har vi at $f'(x) = (1-x^2)e^{(1-x^2)/2}$. Det er klart at $f'(x) > 0$ på $(-1,1)$, slik at f er injektiv på $(-1,1)$. Den omvendte funksjonen er definert på $[f(-1), f(1)] = [-1,1]$. Vi får til slutt at

$$\begin{aligned} \lim_{y\to 1^-}(1-y)[g'(y)]^2 &= \lim_{x\to 1^-}\frac{1-f(x)}{[f'(x)]^2} = \lim_{x\to 1^-}\frac{1-xe^{(1-x^2)/2}}{(1-x^2)^2e^{1-x^2}} \\ &= \lim_{x\to 1^-}\frac{1-xe^{(1-x^2)/2}}{(1-x^2)^2} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(-1+x^2)e^{(1-x^2)/2}}{-4x(1-x^2)} \\ &= -\frac{1}{4}\lim_{x\to 1^-}\frac{-1+x^2}{1-x^2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Seksjon 7.6

Oppgave 7.6.7

a)

Vi skriver om likningen til

$$f(x) = \frac{1+x}{1+x^2} - 2\arctan x = 0,$$

og regner ut at

$$\begin{aligned} f(\frac{1}{3}\sqrt{3}) &= \frac{1+\frac{1}{3}\sqrt{3}}{\frac{4}{3}} - 2\frac{\pi}{6} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} > 0 \\ f(1) &= 1 - 2\arctan(1) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0. \end{aligned}$$

Det følger derfor fra skjæringssetningen at likningen har minst en løsning. Vi regner også ut at

$$f'(x) = \frac{1+x^2-2x(1+x)}{(1+x^2)^2} - 2\frac{1}{1+x^2} = \frac{1-2x-x^2-2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{-1-2x-3x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Det er raskt å sjekke at andregradlikningen i telleren ikke har reelle røtter, slik at $f'(x) < 0$ overalt. Siden f dermed er strengt avtagende, så finnes det bare en løsning av likningen i det gitte intervallet.

b)

Vi har at $\phi'(x) = \frac{\frac{(1+x)^2}{1+x^2} - 2(1+x)\arctan x}{(1+x)^4} = \frac{\frac{1+x}{1+x^2} - 2\arctan x}{(1+x)^3}$. Vi vet fra a) at telleren er > 0 for $x < x_0$, og < 0 for $x > x_0$. Tar vi med nevneren i betraktningen ser vi at f er avtagende på $(\infty, -1)$ og $[x_0, \infty)$, og voksende på $(-1, x_0]$.

På $(-1, \infty)$ ser vi fra fortegnet til den deriverte at x_0 er et maksimum. Videre ser at ϕ er negativ for $x < -1$, og siden $\phi(x_0)$ er positiv, ser vi at x_0 også er et globalt maksimum. Maksimumsverdien blir $\phi(x_0) = \frac{\arctan x_0}{(1+x_0)^2}$.

Oppgave 7.6.13

a)

Derivasjon gir

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{1+x^2} \\ g'(x) &= -\frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Siden de to funksjonene har samme derivert så blir $f'(x) - g'(x) = 0$, slik at $f(x) - g(x)$ blir en konstant. $f(x) - g(x)$ er imidlertid ikke definert for $x = 0$, slik at vi kan bare slutte at $f(x) - g(x)$ er konstant på $(-\infty, 0)$, og konstant på $(0, \infty)$. Det er imidlertid klart at $\lim_{x\to 0^-}(f(x) - g(x)) = -\frac{\pi}{2}$, og $\lim_{x\to 0^+}(f(x) - g(x)) = \frac{\pi}{2}$. Derfor er $f(x) - g(x) = -\frac{\pi}{2}$ for $x < 0$, og $f(x) - g(x) = \frac{\pi}{2}$ for $x > 0$

b)

Linjestykket som forbinder punktene $(x_0, y_0) = (n, \arctan n)$ og $(x_1, y_1) = \left(-\frac{1}{n}, \arctan\left[-\frac{1}{n}\right]\right)$ er gitt ved $y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$, som blir

$$y - \arctan n = \frac{\arctan\left[-\frac{1}{n}\right] - \arctan n}{-\frac{1}{n} - n}(x - n) = \frac{-\frac{\pi}{2}}{-\frac{1}{n} - n}(x - n),$$

der vi har brukt at

$$\begin{aligned} &\arctan\left[-\frac{1}{n}\right] - \arctan n \\ &= \arctan\left[-\frac{1}{n}\right] - (-\arctan(-n)) = f(-n) - g(-n) = -\frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

der vi hra brukt at $f(x)-g(x)=-\frac{\pi}{2}$ på $(-\infty,0)$ fra a). Setter vi inn $(x,y)=(x_n,0)$ og ganger opp med $\frac{1}{n}+n$ får vi at

$$-\arctan n\left(\frac{1}{n}+n\right)=\frac{\pi}{2}(x_n-n),$$

som gir at $x_n=n\left(1-\frac{2}{\pi}\arctan n\right)-\frac{2\arctan n}{n\pi}$, som er uttrykket vi skulle frem til. Grenseverdien blir

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_n &= \lim_{n\to\infty}\left(n\left(1-\frac{2}{\pi}\arctan n\right)-\frac{2\arctan n}{n\pi}\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{2}{\pi}\arctan n\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{\pi}\arctan n}{\frac{1}{n}}=-\frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+n^2}}{-\frac{1}{n^2}}\\
&= \frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{1+n^2}=\frac{2}{\pi}.
\end{aligned}$$

Oppgave 7.6.15

a)

La d være den horisontale kateten i den rettvinklede trekanten med vertikal katet x, og med vinkel 30°. Vi har da at $\tan(30°)=\frac{x}{d}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, slik at $d=\sqrt{3}x$. Vi ser også at vinkelen $v(x)$ kan skrives som en differens av to vinkler, nemlig som vinklene i de rettvinklede trekantene med vertikal katet x og horisontal katet $60+d$ og $10+d$, respektive:

$$\begin{aligned}
v(x) &= \arctan\left(\frac{60+d}{x}\right)-\arctan\left(\frac{10+d}{x}\right)\\
&= \arctan\left(\frac{60+\sqrt{3}x}{x}\right)-\arctan\left(\frac{10+\sqrt{3}x}{x}\right)\\
&= \arctan\left(\frac{60}{x}+\sqrt{3}\right)-\arctan\left(\frac{10}{x}+\sqrt{3}\right).
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
v'(x) &= \frac{-\frac{60}{x^2}}{1+\left(\frac{60}{x}+\sqrt{3}\right)^2}-\frac{-\frac{10}{x^2}}{1+\left(\frac{10}{x}+\sqrt{3}\right)^2}\\
&= \frac{10}{x^2}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{10}{x}+\sqrt{3}\right)^2}-\frac{6}{1+\left(\frac{60}{x}+\sqrt{3}\right)^2}\right).
\end{aligned}$$

c)

Setter vi $v'(x)=0$ så må

$$\frac{1}{1+\left(\frac{10}{x}+\sqrt{3}\right)^2}=\frac{6}{1+\left(\frac{60}{x}+\sqrt{3}\right)^2},$$

som gir at

$$6+6\left(\frac{10}{x}+\sqrt{3}\right)^2=1+\left(\frac{60}{x}+\sqrt{3}\right)^2.$$

Ganger vi opp med x^2 og flytter alt over på en side får vi

$$3600 + 120\sqrt{3}x + 3x^2 - 600 - 120\sqrt{3}x - 18x^2 - 5x^2 = -20x^2 + 3000 = 0.$$

Løser vi dette finner vi at $x^2 = 150$, og $x = \pm 5\sqrt{2}$. Det er klart at $x = 5\sqrt{2}$ blir et maksimum: $v(x)$ går mot 0 når x går mot 0 og mot ∞, slik at funksjonen er begrenset. Dermed må også v ha et maksimum i et indre punkt.

Kapittel 8

Seksjon 8.2

Oppgave 8.2.15

La Π være en partisjon av $[a, b]$, og la $m_i^{(f)}, M_i^{(f)}$ være infimum og supremum av f på intervallene i partisjonen. Hvis $m_i^{(f)}, M_i^{(f)}$ har samme fortegn, så er det klart at $M_i^{(f)} - m_i(f) = M_i^{(|f|)} - m_i^{(|f|)}$. Hvis de har motsatt fortegn så har vi at $M_i^{(|f|)} - m_i^{(|f|)} \leq M_i^{(f)} - m_i^{(f)}$. Den siste ulikhetene gjelder derfor i alle tilfeller. Siden f er integrerbar kan vi finne en partisjon Π slik at Ø(Π)-N(Π) $< \epsilon$. Da har vi at

$$\sum_i (M_i^{(|f|)} - m_i(|f|))(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_i (M_i^{(f)} - m_i(f))(x_i - x_{i-1}) \leq \epsilon$$

slik at Ø(Π)-N(Π) $< \epsilon$ gjelder også hvis vi bytter ut f med $|f|$. Men da er også $|f|$ integrerbar.

Siden $M_i^{(f)} \leq M_i^{(|f|)}$ vil enhver øvre trappesum for f være dominert av tilsvarende øvre trappesum for $|f|$, og ulikheten gitt i oppgaven følger direkte ved å ta grenseverdier.

Seksjon 8.3

Oppgave 8.3.7

a)

Her er det klart at både teller og nevner går mot 0 når $x \to 0$, slik at vi ved å kombinere analysens fundamentalteorem og L'Hôpitals regel får

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x e^{-t^2} dt}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^2} dt}{1} = 1.$$

b)

Det er klart at nevneren går mot ∞, og telleren gjør det samme siden eksponenten i integraden går mot 0, slik at integranden går mot 1 (og da vil jo integralet gå mot ∞). Vi kan derfor bruke L'Hôpitals regel, og får

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\int_1^x e^{1/t} dt}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{1/x}}{2x} = 0.$$

Oppgave 8.3.9

Sett $F(x) = \int_a^x f(x)dx$, der $a \leq x \leq b$. Bruker vi middelverdisetningen på $F(x)$ ser vi at det finnes en $c \in [a, b]$ slik at $\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(c)$. Setter vi inn $F'(c) = f(c), F(a) = 0, F(b) = \int_a^b f(x)dx$ får vi $\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(c)$. Resultatet følger nå ved å gange opp med $(b-a)$ på begge sider.

Oppgave 8.3.12

a)

Funksjonene $g_1(x) = \phi(-x)$ og $\phi_2(x) = -\phi(x)$ (vi bruker kjerneregelen sammen med analysens fundamentalteorem for å derivere den førstnevnte) $g_1'(x) = \ln\cos(-x) = \ln\cos x$, $g_2'(x) = \ln\cos x$. Vi har derfor at $g_1(x) = g_2(x) + C$. Siden $g_1(0) = g_2(0)$ følger det at $C = 0$, og at $g_1(x) = g_2(x)$, og dermed at $\phi(-x) = -\phi(x)$.

b)

Fra fundamentalteoremet har vi at $\phi'(x) = -\ln\cos x$. Vi får også at $\phi''(x) = -\frac{-\sin x}{\cos x} = \tan x$.

c)

Vi ser at $\phi'(x) > 0$ for alle $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, slik at ϕ er voksende. Siden $\tan x < 0$ for $x \in (-\pi/2, 0)$, og $\tan x > 0$ for $x \in (0, \pi/2)$, så er ϕ konkav på $(-\pi/2, 0)$, konveks på $(0, \pi/2)$.

d)

Siden $\phi(x) = 0$ kan vi kombinere L'Hôpitals regel og analysens fundamentalteorem, og vi får

$$\lim_{x\to 0} \frac{\phi(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\ln\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

e)

Setter vi inn $x = 0$ ser vi rask at begge sidene blir like, siden $\phi(0) = 0$. For å vise at venstre og høyre side er like trenger vi derfor bare sjekke at de deriverte er like. Den deriverte av venstresiden er $-\ln\cos x$. Bruker vi kjerneregelen for å derivere høyresiden får vi

$$\begin{aligned}
&-2\frac{1}{2}\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-2\frac{1}{2}\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-\ln 2\\
&= -\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-\ln 2\\
&= -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right)-\ln 2\\
&= -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right)-\ln 2\\
&= -\ln\left(\frac{1}{2}\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right)-\ln 2\\
&= -\ln\left(\frac{1}{2}\cos x\right)-\ln 2=\ln 2-\ln\cos x-\ln 2=-\ln\cos x,
\end{aligned}$$

som var det vi skulle vise.

f)

Vi viser først at grenseverdien $I=\lim_{x\to(\pi/2)^-}\phi(x)$ eksisterer. Siden ϕ er voksende trenger vi bare motbevise at $\phi(x)\to\infty$ når $x\to\pi/2$ (funksjonsverdiene nær $\pi/2$ kan da sees på om som verdiene i en voksende og begrenset følge, og slike følger vet vi er konvergente). Vi kan skrive om likningen vi fant i e) til

$$2\phi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-\phi(x)=\phi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+\phi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-\phi(x)=2\phi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+x\ln 2. \tag{1}$$

Når $x<\pi/2$ er det klart at $\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}>x$, og siden ϕ er voksende så er det klart at $\phi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-\phi(x)>0$. Hvis $\phi(x)\to\infty$ når $x\to\pi/2$, så vil $\phi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\to\infty$, siden $\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\to\pi/2$ også, men da vil også venstresiden i (1) gå mot ∞, siden $\phi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-\phi(x)>0$. Men siden $\phi(0)=0$ så vil høyresiden i (1) gå mot 0 (siden $\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\to 0$), noe som strider mot at venstresiden går mot ∞. Derfor kan ikke $\phi(x)\to\infty$ når $x\to\pi/2$, slik at grenseverdien $I=\lim_{x\to(\pi/2)^-}\phi(x)$ eksisterer.

Vi lar så x gå mot $\pi/2$ nedenfra på venstre og høyre side i identiteten fra e). Venstresiden nærmer seg da I. På høyresiden vil argumentet $\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}$ nærme seg $\pi/2$ nedenfra, mens argumentet $\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$ vil nærme seg 0. Siden $\phi(0)=0$ vil høyresiden nærme seg $2I-\frac{\pi}{2}\ln 2$. Etter å ha tatt grenseverdier på identiteten fra e) ender vi altså opp med

$$I=2I-\frac{\pi}{2}\ln 2,$$

slik at $I=\frac{\pi}{2}\ln 2$.

Oppgave 8.3.14

Siden $g(c)>0$ og g er kontinuerlig, så finnes det en ϵ og et intervall I som inneholder c, med $g(x)>\epsilon$ for alle $x\in I$. La Π være en partisjon som inneholder I som et av sine intervaller. Da har vi at

$$\int_a^b g(x)dx\geq\sum_i m_i(x_i-x_{i-1})\geq\epsilon|I|>0,$$

der $|I|$ er lengden på intervallet I, og der vi har brukt at alle $m_i \geq 0$ (siden $g(x) \geq 0$ for alle x), og at integralet er supremum av alle nedre trappesummer.

Seksjon 8.4

Oppgave 8.4.5

a)

Setter vi inn $y = 1$ i (*) får vi at $f(x) = f(x) + f(1)$, og det følger umiddelbart at $f(1) = 0$.

b)

Vi vet fra (*) at $f(x+h) = f\left(x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right) = f(x) + f\left(1+\frac{h}{x}\right)$. Dette kan også skrives om til

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}.$$

Hvis $x = 1$ vet vi at grenseverdien her er k (siden $f'(1) = k$, slik at $\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)}{h} = k$. Men med substitusjonen $u = \frac{h}{x}$ kan vi også skrive

$$\lim_{h\to 0} \frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} = \lim_{u\to 0} \frac{f(1+u)}{ux} = \frac{k}{x},$$

slik at f er deriverbar i x også, og $f'(x) = \frac{k}{x}$.

c)

Vi vet at f har formen $f(x) = k \ln x + C$. Siden $f(1) = 0$ følger det umiddelbart at $C = 0$, slik at $f(x) = k \ln x$.

Seksjon 8.5

Oppgave 8.5.3

Middelverdisetningen sier at det finnes en $c_i \in [x_i, x_{i-1}]$ slik at $\frac{F(x_i)-F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = F'(c_i) = f(c_i)$, der vi har brukt at F er en antiderivert til f. Dette kan skrives om til $F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(c_i)(x_i - x_{i-1})$. Kombinerer vi hintet fra oppgaven og dette finner vi at

$$\int_a^b F(x)dx = \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Men dette er ogå lik $R(\Pi, U)$, der $\Pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, og U er utvalget $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$.

Seksjon 8.6

Oppgave 8.6.11

c)

Vi har at $y'(x) = x - \frac{1}{4x}$, slik at buelengden blir

$$\begin{aligned}\int_1^e \sqrt{1+(y'(x))^2}dx &= \int_1^e \sqrt{1+(x-\frac{1}{4x})^2}dx = \int_1^e \sqrt{1+x^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{16x^2}}dx \\ &= \int_1^e \sqrt{x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{16x^2}}dx = \int_1^e \sqrt{(x+\frac{1}{4x})^2}dx \\ &= \int_1^e (x+\frac{1}{4x})dx = \left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}/lnx\right]_1^e \\ &= \frac{1}{2}(e^2-1)+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Oppgave 8.6.23

a)

$0 \leq y \leq h$ svarer til at $0 \leq x \leq \sqrt{h}$. Volumet blir derfor

$$\int_0^{\sqrt{h}} 2\pi x f(x)dx = \int_0^{\sqrt{h}} 2\pi x^3 dx = \left[\frac{1}{2}\pi x^4\right]_0^{\sqrt{h}} = \frac{1}{2}\pi h^2.$$

b)

Opplysningen i oppgaven sier at $V'(h) = \pi h$, slik at $V'(1) = \pi$. Dermed gir kjerneregelen at

$$2 = V'(t) = V'(h(t))h'(t) = \pi h'(t),$$

slik at $h'(t) = \frac{2}{\pi}$ (her har vi egentlig betraktet volumfunksjonen som to funksjoner: en der den er en funksjon av høyde, en der den er en funksjon av tid).

Oppgave 8.6.27

a)

Vi får at

$$\begin{aligned}
I_p &= \int_0^{32} (32-u)^2 u^p du = \int_0^{32} (32^2 u^p - 64u^{p+1} + u^{p+2}) du \\
&= \left[\frac{32^2}{p+1} u^{p+1} - \frac{64}{p+2} u^{p+2} + \frac{1}{p+3} u^{p+3} \right]_0^{32} \\
&= \frac{32^2}{p+1} 32^{p+1} - \frac{64}{p+2} 32^{p+2} + \frac{1}{p+3} 32^{p+3} \\
&= 32^{p+3} \frac{(p+2)(p+3) - 2(p+1)(p+3) + (p+1)(p+2)}{(p+1)(p+2)(p+3)} \\
&= 32^{p+3} \frac{p^2 + 5p + 6 - 2p^2 - 8p - 6 + p^2 + 3p + 2}{(p+1)(p+2)(p+3)} \\
&= \frac{2 \times 32^{p+3}}{(p+1)(p+2)(p+3)}.
\end{aligned}$$

b)

Vi har at

$$f'(x) = cm(x-16)^{m-1}(48-x)^n - cn(x-16)^m(48-x)^{n-1}$$

for $16 \leq x \leq 48$. Skal dette være 0 må $cm(x-16)^{m-1}(48-x)^n = cn(x-16)^m(48-x)^{n-1}$, som gir at $m(48-x) = n(x-16)$. Setter vi inn $x = 28$ får vi $20m = 12n$, eller $m = \frac{3}{5}n$.

c)

Vi gjør først substitusjonen $u = 48 - x$ og får

$$\begin{aligned}
\int_{16}^{48} (x-16)^2 (48-x)^{10/3} dx &= -\int_{32}^{0} (32-u)^2 u^{10/3} du = \int_0^{32} (32-u)^2 u^{10/3} du \\
&= \frac{2 \times 32^{10/3+3}}{(10/3+1)(10/3+2)(10/3+3)} = \frac{2 \times 32^{13/3}}{\frac{13}{3}\frac{16}{3}\frac{19}{3}} \\
&= \frac{54 \times 32^{13/3}}{13 \times 16 \times 19} \approx 4.66 \times 10^7.
\end{aligned}$$

Siden det gjennomsnittlige antall barn en kvinne føder fra hun er 16 til hun er 48 er gitt ved dette integralet ganget med c, så må vi ha $c\frac{54 \times 32^{19/3}}{13 \times 16 \times 19} = 1.86$ (for at en kvinne i gjennomsnitt skal føde 1.86 barn), eller

$$c = \frac{1.86}{\frac{54 \times 32^{19/3}}{13 \times 16 \times 19}} \approx 4 \times 10^{-8}$$

d)

For å løse denne deloppgaven trenger vi et begrep vi egentlig ikke har lært enda: En sannsynlighetstetthetsfunksjon er en funksjon $p(x)$ som er slik at $\int p(x)dx = 1$. Sannsynlighetstetthetsfunksjonen for antall fødsler er altså gitt ved

$$p(x) = \frac{c(x-16)^2(48-x)^{10/3}}{\int_{16}^{48} c(x-16)^2(48-x)^{10/3}dx} = \frac{(x-16)^2(48-x)^{10/3}}{I_{10/3}}.$$

Gitt sannsynlighetstetthetsfunksjonen $p(x)$, så blir gjennomsnittsalderen for en fødende kvinne $\int_{16}^{48} xp(x)dx$ (denne formelen har dere ikke lært, så det er ikke så lett for dere å løse denne oppgaven!), som blir

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{I_{10/3}}\int_{16}^{48} x(x-16)^2(48-x)^{10/3}dx \\
&= \frac{1}{I_{10/3}}\int_0^{32} c(48-u)(32-u)^2u^{10/3}du \\
&= \frac{1}{I_{10/3}}\left(48\int_0^{32}(32-u)^2u^{10/3}du - \int_0^{32}(32-u)^2u^{13/3}du\right) \\
&= \frac{1}{I_{10/3}}(48I_{10/3} - I_{13/3}) = 48 - \frac{I_{13/3}}{I_{10/3}} \\
&= 48 - \frac{\frac{54\times 32^{22/3}}{16\times 19\times 22}}{\frac{54\times 32^{19/3}}{13\times 16\times 19}} = 48 - \frac{32\times 13}{22} \approx 29.1.
\end{aligned}$$

Kapittel 9

Seksjon 9.1

Oppgave 9.11.6

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx &= \ln x(2\sqrt{x}) - \int \frac{1}{x} 2\sqrt{x} dx = 2\sqrt{x}\ln - \int 2\sqrt{x}^{-1/2} dx \\
&= 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C.
\end{aligned}$$

Oppgave 9.1.14

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^\pi 2\pi x \sin x dx = [-2\pi x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi 2\pi \cos x dx \\
&= 2\pi^2 + [2\pi \sin x]_0^\pi = 2\pi^2.
\end{aligned}$$

Oppgave 9.1.21

Gjør vi substitusjonen $u = -x^2$ får vi først at $du = -2xdx$, og deretter

$$\int xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int e^u dx = -\frac{1}{2} e^u = -\frac{1}{2} e^{-x^2}.$$

Bruker vi delvis integrasjon finner vi så

$$\begin{aligned}
\int x^n e^{-x^2} dx &= \int x^{n-1} x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} x^{n-1} e^{-x^2} + \int \frac{1}{2}(n-1) x^{n-2} e^{-x^2} dx \\
&= -\frac{1}{2} x^{n-1} e^{-x^2} + \frac{n-1}{2} \int x^{n-2} e^{-x^2} dx.
\end{aligned}$$

Vi får deretter

$$\begin{aligned}
\int x^5 e^{-x^2} dx &= -\frac{1}{2} x^4 e^{-x^2} + 2 \int x^3 e^{-x^2} dx \\
&= -\frac{1}{2} x^4 e^{-x^2} + 2 \left(-\frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} + \int x e^{-x^2} \right) \\
&= -\frac{1}{2} x^4 e^{-x^2} - x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2} \\
&= -\left(\frac{1}{2} x^4 + x^2 + 1 \right) e^{-x^2}.
\end{aligned}$$

Oppgave 9.1.23

a)

Vi har at $I_0 = \int_0^1 1dx = 1$. For $n = 1$ bruker vi substitusjonen $u = \arcsin x$ etterfulgt av delvis integrasjon og får

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \arcsin x dx = \int_0^{\pi/2} u \cos u du \\ &= [u \sin u]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin u = \pi/2 + [\cos u]_0^{\pi/2} \\ &= \pi/2 - 1. \end{aligned}$$

b)

Vi bruker substitusjonen $u = \arcsin x$ etterfulgt av delvis integrasjon og får

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 (\arcsin x)^n dx = \int_0^{\pi/2} u^n \cos u du \\ &= [u^n \sin u]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} n u^{n-1} \sin u \\ &= (\pi/2)^n - n \left(\left[-u^{n-1} \cos u\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n-1) u^{n-2} \cos u du \right) \\ &= (\pi/2)^n - n(n-1) \int_0^{\pi/2} u^{n-2} \cos u du = (\pi/2)^n - n(n-1) I_{n-2}. \end{aligned}$$

c)

Vi får at $I_3 = (\pi/2)^3 - 6I_1 = (\pi/2)^3 - 6(\pi/2 - 1) = (\pi/2)^3 - 3\pi + 6$.

Seksjon 9.2

Oppgave 9.2.4

Med substitusjonen $x = 2 \sin u$ får vi først $dx = 2 \cos u du$, og dermed

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{4 - 4\sin^2 u} 2 \cos u du \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 u du = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 + \cos(2u)) du \\ &= 2 \left[u + \frac{1}{2} \sin(2u) \right]_0^{\pi/2} = \pi. \end{aligned}$$

Oppgave 9.2.15

Vi får

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1+x}{\sqrt{4-x^2}}dx &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx + \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx \\
&= \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}dx - \frac{1}{2}\int_4^1 \frac{1}{\sqrt{u}}du \\
&= [\arcsin u]_0^{\sqrt{3}/2} + \left[\sqrt{u}\right]_1^4 \\
&= \frac{\pi}{3} + 2 - 1 = \frac{\pi}{3} + 1,
\end{aligned}$$

der vi i det første integralet gjorde substitusjonen $u = 2x$, i det andre integralet substitusjonen $u = 4 - x^2$.

Oppgave 9.2.23

Vd hjelp av substitusjonen $u = \arcsin x$ blir volumet

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \pi(\arcsin x)^2 dx &= \int_0^{\pi/2} \pi u^2 \sqrt{1-x^2} du = \int_0^{\pi/2} \pi u^2 \sqrt{1 - sin^2 u} du \\
&= \int_0^{\pi/2} \pi u^2 \cos u du = \left[\pi u^2 \sin u\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2\pi u \sin u du \\
&= \frac{\pi^3}{4} + [2\pi u \cos u]_0^{\pi/2} du - \int_0^{\pi/2} 2\pi \cos u du \\
&= \frac{\pi^3}{4} - [2\pi \sin u]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{4} - 2\pi.
\end{aligned}$$

Oppgave 9.2.25

Vi setter $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$.

a)

Vi har at $I_0 = \int_0^{\pi/4} dx = \pi/4$, og

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\pi/4} \tan x dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x} x dx \\
&= -\int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{du}{u} = \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{du}{u} \\
&= [\ln u]_{\sqrt{2}/2}^1 = -\ln(2^{-1/2}) = \frac{\ln 2}{2},
\end{aligned}$$

der vi har gjort substitusjonen $u = \cos x$.

b)

Vi har at

$$\begin{aligned}\tan^{n+2} x &= \tan^n x \tan^2 x = \tan^n x \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \tan^n x \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \tan^n x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right).\end{aligned}$$

Vi får derfor at

$$\begin{aligned}I_{n+2} &= \int_0^{\pi/4} \tan^{n+2} x dx = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{\tan^n x}{\cos^2 x} dx - \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx \\ &= \int_0^1 u^n du - I_n = \left[\frac{1}{n+1} u^{n+1} \right]_0^1 - I_n = \frac{1}{n+1} - I_n.\end{aligned}$$

der vi har gjort substitusjonen $u = \tan x$.

c)

Setter vi inn $n = 0$ i den gitte identiteten får vi at $I_1 = \frac{\ln 2}{2}$, som vi har bevist er sant i a). Anta så at vi har vist at formelen er riktig for n. Vi skal vise at den også er riktig for $n+1$. Vi bruker b) og får

$$\begin{aligned}I_{2(n+1)+1} &= I_{2n+3} = \frac{1}{2n+2} - I_{2n+1} \\ &= \frac{1}{2n+2} - \frac{(-1)^n}{2} \left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{-1^{n+1}}{n} \right) \right] \\ &= (-1)^{n+1}(-1)^{n+1} \frac{1}{n+1} \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{n+1}}{2} \left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{-1^{n+1}}{n} \right) \right] \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2} \left[(-1)^{n+1} \frac{1}{n+1} + \ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{-1^{n+1}}{n} \right) \right] \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2} \left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{-1^{n+1}}{n} - (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1} \right) \right] \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2} \left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{-1^{n+1}}{n} + (-1)^{n+2} \frac{1}{n+1} \right) \right],\end{aligned}$$

som beviser at formelen er riktig for $n+2$ også. Det følger ved induksjon at formelen er riktig for alle n.

d)

For en verdi $y \in (0, \pi/4)$ har vi

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \tan^n x dx &= \int_0^y \tan^n x dx + \int_y^{\pi/4} \tan^n x dx \le \int_0^y \tan^n y dx + \int_y^{\pi/4} dx \\ &= y \tan^n y + (\pi/4 - y) \le \frac{\pi}{4} \tan^n y + (\pi/4 - y),\end{aligned}$$

der vi har brukt at $\tan y < 1$. Hvis vi først velger y så nær $\pi/4$ at $\pi/4 - y < \frac{\epsilon}{2}$, og deretter n så stor at $\frac{\pi}{4}\tan^n y < \frac{\epsilon}{2}$, så ser vi at $\int_0^{\pi/4} \tan^n x dx < \epsilon$. Det følger at $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx = 0$, siden ϵ var vilkårlig valgt. Dermed må leddene i c) kansellere hverandre, slik at

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{-1^{n+1}}{n}.$$

Oppgave 9.2.28

a)

Vi får

$$\begin{aligned}
\int_{f(a)}^{f(b)} g(t)dt &= [tg(t)]_{f(a)}^{f(b)} - \int_{f(a)}^{f(b)} tg'(t)dt \\
&= f(b)g(f(b)) - f(a)g(f(a)) - \int_a^b f(x)dx
\end{aligned}$$

der vi først gjorde delvis integrasjon, og deretter substitusjonen $x = g(t)$ (som gir $t = f(x)$), som vi kan gjøre siden g er monoton.

b)

Med $g(t) = \arcsin\sqrt{t}$ har vi at $f(x) = \sin^2 x$, og i det gitte integralet er $a = 0, b = \frac{\pi}{2}$. f er kontinuerlig og strengt monoton, og bruker vi a) får vi at integralet blir

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} - 0 - \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx &= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\left(1 - \sin(2x)\right) dx \\
&= \frac{\pi}{2} - \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\cos(2x)\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Seksjon 9.3

Oppgave 9.3.2

a)

Vi skriver

$$\frac{5x+5}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3) + B(x-2)}{(x-2)(x+3)} = \frac{(A+B)x + 3A - 2B}{(x-2)(x+3)},$$

og ser at vi må løse likningene

$$\begin{aligned}
A + B &= 5 \\
3A - 2B &= 5.
\end{aligned}$$

Det er raskt å se at eneste løsning her er $A = 3, B = 2$, slik at delbrøksoppspalting gir

$$\int \frac{5x+5}{(x-2)(x+3)}dx = \int \left(\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+3}\right) dx = 3\ln|x-2| + 2\ln|x+3| + C.$$

c)

Vi kan faktorisere nevneren som $x^2 - 2x - 8 = (x+2)(x-4)$. og vi skriver

$$\frac{4x+2}{(x+2)(x-4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-4} = \frac{A(x-4)+B(x+2)}{(x+2)(x-4)} = \frac{(A+B)x - 4A + 2B}{(x+2)(x-4)},$$

og ser at vi må løse likningene

$$\begin{aligned} A + B &= 4 \\ -4A + 2B &= 2. \end{aligned}$$

Det er raskt å se at eneste løsning her er $A = 1, B = 3$, slik at delbrøksoppspalting gir

$$\int \frac{4x+2}{(x+2)(x-4)}dx = \int \left(\frac{1}{x+2} + \frac{3}{x-4}\right) dx = \ln|x+2| + 3\ln|x-4| + C.$$

Oppgave 9.3.6

a)

Polynomidivisjon gir først at

$$\begin{aligned} \frac{x^5+4x^4+2}{x^2+x+1} &= x^3 + 3x^2 - 4x + 1 + \frac{3x+1}{x^2+x+1} \\ &= x^3 + 3x^2 - 4x + 1 + \frac{\frac{3}{2}(2x+1) - \frac{1}{2}}{x^2+x+1} \\ &= x^3 + 3x^2 - 4x + 1 + \frac{3}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\ &= x^3 + 3x^2 - 4x + 1 + \frac{3}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{2}{3}\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1}, \end{aligned}$$

der vi har "lurt inn" et multiplum av den deriverte av nevneren (som blir $2x+1$) i telleren, splittet opp brøken i to, og skrevet om nevneren (det er raskt å sjekke at nevneren ikke har reelle røtter). De fire første leddene her er greie å integrere. For det neste leddet kan vi gjøre substitusjonen $u = x^2+x+1$, og får at integralet blir $\frac{3}{2}\ln(x^2+x+1)$. I det siste leddet kan vi gjøre substitusjonen $u = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$, og får da $du = \frac{2}{\sqrt{3}}dx$, og dermed

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1}dx \\ &= -\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1}{u^2+1}du = -\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan u + C \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + C. \end{aligned}$$

Hele integralet blir dermed

$$\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2x^2 + x + \frac{3}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + C.$$

d)

Vi ser raskt at nevneren kan skrives som $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$. Delbrøksoppspalting gir deretter

$$\frac{2x+1}{x^2-4x+3} = \frac{2x+1}{(x-1)(x-3)} = -\frac{3}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{7}{2}\frac{1}{x-3},$$

slik at integralet blir

$$-\frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{7}{2}|x-3| + C.$$

Oppgave 9.3.8

Delbrøksoppspalting gir her

$$\begin{aligned}
\frac{2x+2}{(x+2)^2(x-1)} &= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x-1} \\
&= \frac{A(x+2)(x-1) + B(x-1) + C(x+2)^2}{(x+2)^2(x-1)} \\
&= \frac{(A+C)x^2 + (A+B+4C)x + (-2A-B+4C)}{(x+2)^2(x-1)},
\end{aligned}$$

og dette gir likningene

$$\begin{aligned}
A + C &= 0 \\
A + B + 4C &= 2 \\
-2A - B + 4C &= 2,
\end{aligned}$$

som har løsningene $A = -\frac{4}{9}$, $B = \frac{2}{3}$, $C = \frac{4}{9}$. Dermed blir integralet

$$-\frac{4}{9}\ln|x+2| - \frac{2}{3}\frac{1}{x+2} + \frac{4}{9}\ln|x-1| + C.$$

Oppgave 9.3.18

Røttene til $x^4+1 = 0$ er $x = e^{\frac{\pi}{4}i}, e^{\frac{3\pi}{4}i}, e^{\frac{5\pi}{4}i}, e^{\frac{7\pi}{4}i}$. Parer vi sammen de konjugerte røttene finner vi

$$\begin{aligned}
(x - e^{\frac{\pi}{4}i})(x - e^{\frac{7\pi}{4}i}) &= x^2 - \sqrt{2}x + 1 \\
(x - e^{\frac{3\pi}{4}i})(x - e^{\frac{5\pi}{4}i}) &= x^2 + \sqrt{2}x + 1.
\end{aligned}$$

Delbrøksoppspaltingen tar nå formen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^4+1} &= \frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1} \\
&= \frac{(Ax+B)(x^2+\sqrt{2}x+1) + (Cx+D)(x^2-\sqrt{2}x+1)}{x^4+1} \\
&= \frac{(A+C)x^3 + (\sqrt{2}A + B - \sqrt{2}C + D)x^2 + (A + \sqrt{2}B + C - \sqrt{2}D)x + (B+D)}{x^4+1},
\end{aligned}$$

som gir likningene

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ \sqrt{2}A + B - \sqrt{2}C + D &= 0 \\ A + \sqrt{2}B + C - \sqrt{2}D &= 0 \\ B + D &= 1, \end{aligned}$$

som har løsninger $A = -\frac{\sqrt{2}}{4}, B = D = \frac{1}{2}, C = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Vi har altså

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^4+1} &= \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \\ &= \frac{-\frac{\sqrt{2}}{8}(2x - \sqrt{2}) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{8}(2x + \sqrt{2}) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{2}\frac{1}{\left(\sqrt{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2 + 1} \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}}{8}\frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{2}\frac{1}{\left(\sqrt{2}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2 + 1}, \end{aligned}$$

der vi har skrevet

$$\begin{aligned} x^2 - \sqrt{2}x + 1 &= \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \\ x^2 + \sqrt{2}x + 1 &= \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Her kan vi integrere alle de fire leddene, slik at integralet blir

$$\begin{aligned} &-\frac{\sqrt{2}}{8}\ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\sqrt{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \\ &+\frac{\sqrt{2}}{8}\ln(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\sqrt{2}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right), \end{aligned}$$

der vi har gjort substitusjonene $u = \sqrt{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ og $u = \sqrt{2}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Oppgave 9.3.25

a)

Siden polynomet har reelle koeffisienter, og $2 + i$ er en rot, så er også $2 - i$ en rot. Men da er polynomet delelig med $(z - (2 + i))(z - (2 - i)) = z^2 - 4z + 5$. Utfører vi polynomdivisjonen $(z^3 - 11z + 20) : (z^2 - 4z + 5)$ får vi $z + 4$. Røttene er altså $2 + i, 2 - i$, og -4.

b)

Vi skriver

$$\begin{aligned}
\frac{10x+3}{x^3-11x+20} &= \frac{Ax+B}{x^2-4x+5}+\frac{C}{x+4} \\
&= \frac{(Ax+B)(x+4)+C(x^2-4x+5)}{x^3-11x+20} \\
&= \frac{(A+C)x^2+(4A+B-4C)x+(4B+5C)}{x^3-11x+20},
\end{aligned}$$

som gir oss likningene

$$\begin{aligned}
A+C &= 0 \\
4A+B-4C &= 10 \\
4B+5C &= 3,
\end{aligned}$$

som har løsninger $A=1, B=2, C=-1$. Integralet blir dermed

$$\begin{aligned}
&\int \left(\frac{x+2}{x^2-4x+5}-\frac{1}{x+4}\right)dx \\
&= \int \frac{1}{2}\frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx+\int \frac{4}{(x-2)^2+1}dx-\int \frac{1}{x+4}dx \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5)+4\arctan(x-2)-\ln|x+4|+C.
\end{aligned}$$

Oppgave 9.3.36

Vi har at $V=\int_0^1 \frac{\pi}{(1+x^2)^2}dx$. Her kan vi bruke formel (2) i boka, men la oss gå frem som om vi ikke husker denne, og i stedet bruke metoden som utleder (2). Delvis integrasjon gir

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{du}{1+u^2} &= \int_0^1 1\times\frac{1}{1+u^2}du = \left[u\frac{1}{1+u^2}\right]_0^1+\int_0^1 \frac{2u^2}{(1+u^2)^2}du \\
&= \frac{1}{2}+2\int_0^1 \frac{du}{1+u^2}-2\int_0^1 \frac{1}{(1+u^2)^2}du.
\end{aligned}$$

Isolerer vi $\int_0^1 \frac{1}{(1+u^2)^2}du$ her ser vi at

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{(1+u^2)^2}du &= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \frac{du}{1+u^2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{\pi}{8}+\frac{1}{4},
\end{aligned}$$

der vi har brukt at $\int \frac{du}{1+u^2}=\arctan u$. Dermed blir volumet $\pi\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right)$.

Seksjon 9.5

Oppgave 9.5.3

e)

Vi skal bevise denne på to måter. Først skal vi bruke sammenligningskriteriet. Ved opptegning av grafene ser vi at $e^x-1\leq 2x$ på $[0,1]$, slik at $\frac{1}{e^x-1}\geq\frac{1}{2x}$.

Men

$$\int_0^1 \frac{1}{2x}dx = \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{1}{2}\ln t\right]_t^1 = \lim_{t\to 0^+} -\frac{1}{2}\ln t = \infty,$$

slik at integralet divergerer. Den andre måten å vise dette på er ved å regne ut integralet direkte ved hjelp av substitusjonen $u = e^x - 1$, som gir $du = e^x dx$, eller $dx = \frac{du}{u+1}$. Vi får da

$$\begin{aligned}\int_0^1 &= \int_0^{e-1} \frac{1}{u(u+1)}du = \int_0^{e-1}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)du \\ &= \lim_{t\to 0^+}\left[\ln\left(\frac{u}{u+1}\right)\right]_t^{1-e} = \infty.\end{aligned}$$

Oppgave 9.5.4

a)

Arealet under grafen er gitt ved $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$, som vi vet fra Setning 9.5.8 divergerer, slik at arealet er uendelig. Volumet av omdreiningslegemet er gitt ved

$$\int_1^\infty \frac{\pi dx}{x^2} = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{\pi}{x}\right]_1^t = \pi,$$

slik at volumet er endelig.

b)

Arealet under grafen er gitt ved

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to 0^+}\left[2\sqrt{x}\right]_t^1 = 2,$$

slik at arealet er endelig. Volumet av omdreiningslegemet er gitt ved

$$\int_0^1 \frac{\pi dx}{x} = \lim_{t\to 0}\left[\pi \ln x\right]_t^1 = \infty,$$

slik at volumet er uendelig.

Oppgave 9.5.5

Anta først at $p \leq 1$. Bruker vi grensesammenligningskriteriet med $g(x) = \frac{1}{x^p}$, ser vi umiddelbart at integralet divergerer, siden $\frac{\frac{\ln x}{x^p}}{\frac{1}{x^p}} = \ln x \to \infty$ når $x \to \infty$. For $p > 1$ kan vi finne en $\epsilon > 0$ slik at også $p - \epsilon > 1$. Vi bruker nå grensesammenligningskriteriet med $g(x) = \frac{1}{x^{p-\epsilon}}$ (som gir et konvergent integral) og får $\frac{\frac{\ln x}{x^p}}{\frac{1}{x^{p-\epsilon}}} = \frac{\ln x}{x^\epsilon}$. Bruker vi L'Hôpitals regel på den siste får vi

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^\epsilon} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\epsilon x^{\epsilon-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\epsilon x^\epsilon} = 0,$$

slik at integralet konvergerer.

Oppgave 9.5.12

Problemet i oppgaven er at integranden er på formen $\infty - \infty$. Vi kan skrive om integranden til

$$\frac{x}{2x^2+2k} - \frac{k}{x+1} = \frac{x(x+1) - k(2x^2+2k)}{(2x^2+2k)(x+1)} = \frac{(1-2k)x^2 + x - 2k^2}{(2x^2+k)(x+1)}.$$

Hvis $1 - 2k \neq 0$, d.v.s. $k \neq \frac{1}{2}$, kan vi bruke grensesammenligningskriteriet med $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ til å slutte at integralet divergerer, siden da er det leddet i teller med høyest grad et andregradsledd.

Anta så at $k = \frac{1}{2}$. Vi kan da skrive integralet som

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \left(\frac{x}{2x^2+1} - \frac{1}{2x+2} \right) dx &= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{4} \ln(2x^2+1) - \frac{1}{2} \ln(x+1) \right]_1^t \\
&= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{4} \ln \left(\frac{2x^2+1}{(x+1)^2} \right) \right]_1^t \\
&= \frac{1}{4}(\ln 2 - \ln \frac{3}{4}) = \frac{1}{4} \ln \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

Kapittel 10

Seksjon 10.1

Oppgave 10.1.3

a)

Vi har $f(x) = -\frac{2}{x}$, og en antiderivert til f er $F(x) = -2\ln x$. Setter vi $g(x) = x^2$ og brukr Setning 10.1.3 finner vi løsningen

$$\begin{aligned} y &= e^{-F(x)}\left(\int e^{F(x)}g(x)dx + C\right) = e^{2\ln x}\left(\int e^{-2\ln x}x^2 dx + C\right) \\ &= x^2\left(\int dx + C\right) = x^3 + Cx^2. \end{aligned}$$

d)

Vi har $f(x) = \frac{2}{x}$, og en antiderivert til f er $F(x) = 2\ln x$. Setter vi $g(x) = \frac{\arctan x}{x^2}$ og bruker Setning 10.1.3 finner vi løsningen

$$\begin{aligned} y &= e^{-F(x)}\left(\int e^{F(x)}g(x)dx + C\right) = e^{-2\ln x}\left(\int e^{2\ln x}\frac{\arctan x}{x^2}dx + C\right) \\ &= \frac{1}{x^2}\left(\int \arctan x dx + C\right) = \frac{1}{x^2}\left(x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx + C\right) \\ &= \frac{1}{x^2}\left(x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C\right) = \frac{1}{x}\arctan x - \frac{1}{2x^2}\ln(1+x^2) + \frac{C}{x^2}, \end{aligned}$$

der vi har brukt delvis integrasjon.

Oppgave 10.1.7

Differensiallikningen $(x+1)y' + y - 1 = 0$ kan skrives $y' + \frac{1}{x+1}y = \frac{1}{x+1}$ for $x > -1$. Vi setter $f(x) = g(x) = \frac{1}{x+1}$ og regner ut en antiderivert til f ved $F(x) = \ln(x+1)$. Vi bruker så setning 10.1.3 og får løsningen

$$\begin{aligned} y &= e^{-F(x)}\left(\int e^{F(x)}g(x)dx + C\right) = e^{-\ln(x+1)}\left(\int e^{\ln(x+1)}\frac{1}{x+1}dx + C\right) \\ &= \frac{1}{x+1}\left(\int dx + C\right) = \frac{x+C}{x+1}. \end{aligned}$$

Seksjon 10.2

Oppgave 10.2.1

Veksten i befolkningen per år er $0.02y(t)$. Tilskuddet per år på grunn av innvandring er 40000, slik at vi får at $y'(t) = 0.02y(t) + 40000$. Dette kan også skrives $y'(t) - 0.02y(t) = 40000$. Vi setter $f(t) = -0.02$, og finner en antiderivert $F(t) = -0.02t$. Setter vi $g(t) = 40000$ og bruker Setning 10.1.3 finner vi

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-F(t)}\left(\int e^{F(t)}g(t)dt + C\right) = e^{0.02t}\left(\int 40000e^{-0.02t}dt + C\right) \\ &= e^{0.02t}\left(-\frac{40000}{0.02}e^{-0.02t} + C\right) = -2000000 + Ce^{0.02t}. \end{aligned}$$

Setter vi inn $y(0) = 2000000$ får vi at $2000000 = -2000000 + C$, slik at $C = 4000000$. Løsningen blir derfor $y(t) = -2000000 + 4000000e^{0.02t}$.

Oppgave 10.2.5

a)

På grunn av nedbrytning mister vi $-0.05y(t)$ per tidsenhet, slik at $y'(t) = -0.05y(t)$. Den generelle løsningen blir derfor $y(t) = Ce^{-0.05t}$. Ved $t = 0$ er 200000 tonn av 10 millioner tonn skadelig stoff, som svarer til 2% av stoffet. Derfor er initialbetingelsen $y(0) = 2$. Setter vi inn $t = 0$ i $y(t) = Ce^{-0.05t}$ finner vi at $C = 2$, slik at $y(t) = 2e^{-0.05t}$.

b)

La $z(t)$ være antall millioner tonn skadelig stoff på den nye lagringsplassen. Leddet $-0.1z(t)$ stammer fra at hvert år brytes ned 10% på den nye lagringsplassen. Når vi overfører en halv million tonn søppel ved tid t overfører vi $\frac{2e^{-0.05t}}{100}0.5 = 0.01e^{-0.05t}$ millioner tonn skadelig stoff. Dette forklarer det andre leddet i differensiallikningen. Initialbetingelsen $z(0) = 0$ kommer av at vi starter med ingenting på den nye lagringsplassen.

c)

Differensiallikningen kan skrives $z'(t) + 0.1z(t) = 0.01e^{-0.05t}$, slik at vi kan sette $f(t) = 0.1$, og $g(t) = 0.01e^{-0.05t}$. En antiderivert til $f(t)$ blir $F(t) = 0.1t$, og Setning 10.1.3 gir en generell løsning

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{-0.1t}\left(\int e^{0.1t}0.01e^{-0.05t}dt + C\right) = e^{-0.1t}\left(\int 0.01e^{0.05t}dt + C\right) \\ &= e^{-0.1t}\left(0.2e^{0.05t} + C\right) = 0.2e^{-0.05t} + Ce^{-0.1t}. \end{aligned}$$

Setter vi inn $z(0) = 0$ får vi at $C = -0.2$, slik at $z(t) = 0.2e^{-0.05t} - 0.2e^{-0.1t}$.

Oppgave 10.2.10

Hvis $y(t)$ er antall liter klor som finnes i badevannet, så mister vi $\frac{1}{20}y$ klor hvert døgn, siden 50000 liter er en tyvendedel av 1 million liter. Videre får vi hvert døgn tilførsel av $\frac{0.001\times 50000}{100} = 0.5$ liter klor. Vekstraten blir derfor $y'(t) = -\frac{1}{20}y(t) + \frac{1}{2}$. Flytter vi over $-\frac{1}{20}y(t)$ får vi likningen fra boka.

For å løse likningen setter vi $f(t) = \frac{1}{20}$, $g(t) = \frac{1}{2}$, og bruker Setning 10.1.3 til å finne løsningen

$$y(t) = e^{-0.05t}\left(\int \frac{1}{2}e^{0.05t}dt + C\right) = 10 + Ce^{-0.05t}.$$

Vi har videre initialbetingelsen $y(0) = \frac{0.004\times 1000000}{100} = 40$. Setter vi inn $t = 0$ i løsningen over finner vi at $C = 30$, slik at $y(t) = 10 + 30e^{-0.05t}$. Klorprosenten er nede i 0.003% når $\frac{y(t)}{1000000} = 3 \times 10^{-5}$, det vil si når $y(t) = 30$. Vi må altså løse likningen $30 = 10 + 30e^{-0.05t}$, som gir at $e^{-0.05t} = \frac{2}{3}$, slik at $t = \frac{\ln 2 - \ln 3}{-0.05} = 20(\ln 3 - \ln 2) \approx 8.1093$. Med andre ord, det tar oss litt mer enn 8 dager å nå en klorprosent på 0.003%.

Oppgave 10.2.15

a)

Opplysningene i oppgaven gir at det finnes en α slik at $T'(t) = \alpha(20 - T(t))$. Dette kan også skrives $T'(t) + \alpha T(t) = 20\alpha$. Dette gir løsningen $T(t) = e^{-\alpha t}\left(\int 20ke^{\alpha t}dt + B\right) = 20 + Be^{-\alpha t}$, som er på den formen som står i oppgaveteksten med $A = 20$. Videre er initialbetingelsene $T(0) = 6$ og $T(2) = 13$, som gir likningene $20 + B = 6$ (det vil si $B = -14$), og $20 + Be^{-\alpha 2} = 20 - 14e^{-2\alpha} = 13$. Den siste likningen kan skrives $\frac{1}{2} = e^{-2\alpha}$, som gir $\alpha = \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0.34657$.

b)

Vi har at $T(3) = 20 - 14e^{-\alpha 3} \approx 15.0503$.

c)

Fra a) ser vi at $T(t) = A + Be^{-\alpha t}$, der A er temperaturen i kjøleskapet, B er ukjent, og der α er regnet ut i a). Initialbetingelsene er nå $T(0) = 15$ og $T(1) = 12$, som gir likningene

$$\begin{aligned} A + B &= 15 \\ A + Be^{-\alpha} &= 12. \end{aligned}$$

Trekker vi disse fra hverandre finner vi at $B(1 - e^{-\alpha}) = 3$, slik at $B = \frac{3}{1-e^{-\alpha}}$. Dermed blir

$$A = 15 - B = 15 - \frac{3}{1 - e^{-\alpha}} \approx 4.7574.$$

Seksjon 10.3

Oppgave 10.3.1

Vi setter $f(x) = -3$ og finner antiderivert $F(x) = -3x$. Med $g(x) = e^{2x}$ finner vi den generelle løsningen

$$y(x) = e^{3x}\left(\int e^{-3x}e^{2x}dx + C\right) = e^{3x}\left(-e^{-x} + C\right) = -e^{2x} + Ce^{3x}.$$

Setter vi inn $y(0) = 0$ finner vi $0 = -1 + C$, slik at $C = 1$, som gir løsningen $y(x) = -e^{2x} + e^{3x}$.

Oppgave 10.3.3

Vi setter $f(x) = \tan x$ og $g(x) = \sin(2x)$, og finner først

$$\int_c^x f(t)dt = \int_0^x \tan t dt = \int_0^x \frac{\sin t}{\cos t}dt = [-\ln\cos u]_0^x = -\ln\cos x.$$

Deretter finner vi

$$\begin{aligned}\int_c^x g(t)e^{\int_c^t f(s)ds}dt &= \int_0^x \sin(2t)e^{-\ln\cos t}dt = \int_0^x \frac{\sin(2t)}{\cos t}dt \\ &= \int_0^x 2\sin t dt = [-2\cos t]_0^x = -2\cos x + 2.\end{aligned}$$

Setter vi inn i Setning 10.3.1 får vi

$$y(x) = e^{\ln\cos x}\left(-2\cos x + 2 + 2\right) = 4\cos x - 2\cos^2 x.$$

Oppgave 10.3.11

a)

Likningen kan også skrives $y' + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x\ln x}\right)y = \frac{1}{x\ln x}$ Vi finner en antiderivert til $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x\ln x}$ ved $F(x) = \ln x + \ln\ln x$, og finner dermed løsningen

$$\begin{aligned}y(x) &= e^{-\ln x - \ln\ln x}\left(\int e^{\ln x + \ln\ln x}\frac{1}{x\ln x}dx + C\right) \\ &= \frac{1}{x\ln x}(x + C) = \frac{1}{\ln x} + \frac{C}{x\ln x}.\end{aligned}$$

b)

$\frac{C}{x\ln x}$ er ikke definert for $x = 1$. Hvis $C = 0$ faller dette leddet imidlertid bort slik at vi da har løsningen $y(x) = \frac{1}{\ln x}$.

Seksjon 10.4

Oppgave 10.4.1

b)

Vi skriver likningen først som $y^3y' = x^2$. Integrerer vi dette finner vi at $\frac{1}{4}y^4 = \frac{1}{3}x^3 + C$, som gir at $y(x) = \pm\sqrt[4]{\frac{4}{3}x^3 + D}$.

d)

Vi skriver likningen som

$$xyy' = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2 = (1 + x^2) + y^2(1 + x^2) = (1 + x^2)(1 + y^2).$$

Likningen kan dermed også skrives som $\frac{yy'}{1+y^2} = \frac{1}{x} + x$. Integrasjon gir $\frac{1}{2}\ln(1 + y^2) = \ln|x| + \frac{1}{2}x^2 + C$, slik at

$$1 + y^2 = De^{2\ln|x|+x^2} = Dx^2e^{x^2}.$$

Vi finner dermed løsningen $y = \pm\sqrt{Dx^2e^{x^2} - 1}$.

Oppgave 10.4.2

a)

Likningen kan skrives $\frac{1}{y}y' = 3x$, som gir at $\ln|y| = \frac{3}{2}x^2 + C$, og dermed $y = De^{3x^2/2}$. $y(0) = 4$ gir at $D = 4$, slik at $y(x) = 4e^{3x^2/2}$.

e)

Likningen kan skrives $e^{-y}y' = -2$, som gir at $-e^{-y} = -2x + C$, som gir at $y = -\ln(2x + C)$. $y(0) = 0$ gir at $C = 1$, slik at $y(x) = -\ln(2x + 1)$.

Oppgave 10.4.4

Vi har at $y' = a(y-r_1)(y-r_2)$ kan skrives på separert form som $\frac{y'}{(y-r_1)(y-r_2)} = a$. Gjør vi delbrøksoppspalting får vi

$$\begin{aligned}\frac{A}{y - r_1} + \frac{B}{y - r_2} &= \frac{A(y - r_2) + B(y - r_1)}{(y - r_1)(y - r_2)}\\ &= \frac{(A + B)y - r_2A - r_1B}{(y - r_1)(y - r_2)} = \frac{1}{(y - r_1)(y - r_2)}.\end{aligned}$$

Dette gir likningene

$$\begin{aligned}A + B &= 0\\ -r_2A - r_1B &= 1.\end{aligned}$$

Det første likningen gir at $B = -A$. Innsatt i den andre gir det at $(r_1-r_2)A = 1$, som gir at $A = 1/(r_1 - r_2)$. Vi får nå at

$$\begin{aligned}\int \frac{y'}{(y - r_1)(y - r_2)}dt &= \frac{1}{r_1 - r_2}\int\left(\frac{1}{y - r_1} - \frac{1}{y - r_2}\right)dt\\ &= \frac{1}{r_1 - r_2}\left(\ln|y - r_1| - \ln|y - r_2|\right) + C_1\\ &= \frac{1}{r_1 - r_2}\ln\left(\frac{|y - r_1|}{|y - r_2|}\right) + C_1.\end{aligned}$$

Siden integralet av høyresiden blir $at + C_2$ får vi at

$$\frac{1}{r_1 - r_2} \ln\left(\frac{|y - r_1|}{|y - r_2|}\right) + C_1 = at + C_2,$$

som gir at

$$\frac{y - r_1}{y - r_2} = Ke^{a(r_1 - r_2)t}$$

or en konstant K. Løser vi for y finner vi at

$$\begin{aligned} y &= \frac{r_1 - r_2 Ke^{a(r_1-r_2)t}}{1 - Ke^{a(r_1-r_2)t}} = \frac{r_1 - r_1 Ke^{a(r_1-r_2)t} + r_1 Ke^{a(r_1-r_2)t} - r_2 Ke^{a(r_1-r_2)t}}{1 - Ke^{a(r_1-r_2)t}} \\ &= r_1 - \frac{(r_2 - r_1)Ke^{a(r_1-r_2)t}}{1 - Ke^{a(r_1-r_2)t}} = r_1 + \frac{r_2 - r_1}{Ce^{a(r_2-r_1)t} + 1}, \end{aligned}$$

der vi til slutt har satt $C = -1/K$.

Oppgave 10.4.7

a)

Løser vi $0.56p - 4.0 \cdot 10^{-8} p^2 - 16 \cdot 10^5 = 0$ finner vi at

$$\begin{aligned} p &= \frac{-0.56 \pm \sqrt{0.56^2 - 256 \cdot 10^{-3}}}{-8.0 \cdot 10^{-8}} = \frac{-0.56 \pm \sqrt{0.3136 - 0.256}}{-8.0 \cdot 10^{-8}} \\ &= \frac{-0.56 \pm \sqrt{0.0576}}{-8.0 \cdot 10^{-8}} = \frac{-0.56 \pm 0.24}{-8.0 \cdot 10^{-8}} = (0.07 \pm 0.03)10^8, \end{aligned}$$

som gir at $p = 10^7$, eller $p = 4 \cdot 10^6$. Differensiallikningen kan dermed skrives

$$\frac{p'(t)}{(p - 10^7)(p - 4 \cdot 10^6)} = -4.0 \cdot 10^{-8}.$$

Vi må nå bruke delbrøksoppspalting, og skriver

$$\frac{1}{(p - 10^7)(p - 4 \cdot 10^6)} = \frac{A}{p - 10^7} + \frac{B}{p - 4 \cdot 10^6} = \frac{(A + B)p - 4 \cdot 10^6 A - 10^7 B}{(p - 10^7)(p - 4 \cdot 10^6)},$$

som gir likningene

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ -4 \cdot 10^6 A - 10^7 B &= 1, \end{aligned}$$

som har løsning $A = \frac{1}{6} \cdot 10^{-6}$, $B = -\frac{1}{6} \cdot 10^{-6}$. Integrasjon gir deretter

$$\frac{1}{6} \cdot 10^{-6} \ln|p - 10^7| - \frac{1}{6} \cdot 10^{-6} \ln|p - 4 \cdot 10^6| = -4.0 \cdot 10^{-8} t + C,$$

som gir at $\ln\left|\frac{p-10^7}{p-4\cdot 10^6}\right| = -0.24t + C$, og deretter

$$\frac{p - 10^7}{p - 4 \cdot 10^6} = De^{-0.24t}.$$

Setter vi inn initialbetingelsen finner vi at $D = \frac{-4 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^6} = -2$. Vi får nå at $p - 10^7 = -2(p - 4 \cdot 10^6)e^{-0.24t}$, og til slutt at

$$p(t) = \frac{10^7 + 8 \cdot 10^6 e^{-0.24t}}{1 + 2e^{-0.24t}} = 2 \times 10^6 \frac{5 + 4e^{-0.24t}}{1 + 2e^{-0.24t}} = 2 \cdot 10^6 \left(2 + \frac{3}{1 + 2e^{-0.24t}}\right).$$

b)

Vi ser at $\lim_{t\to\infty} p(t) = 2\cdot 10^6\left(2+\frac{3}{1}\right) = 10^7$.

c)

Vekstraten er størst når $(p-10^7)(p-4\cdot 10^6)$, som skjer når $p = 7\cdot 10^6$ (midt mellom de to nullpunktene). Setter vi inn i

$$\frac{p-10^7}{p-4\cdot 10^6} = -2e^{-0.24t}$$

finner vi at $\frac{-3\cdot 10^6}{3\cdot 10^6} = -1 = -2e^{-0.24t}$, som gir at

$$t = \frac{\ln(1/2)}{-0.24} = \frac{\ln 2}{0.24} \approx 2.881,$$

som svarer til 1963.

Oppgave 10.4.10

a)

Leddet $-ax$ kommer fra at dødsraten er proporsjonal med antall fisk $x(t)$. Leddet bx^2 kommer fra at, siden antall møter av en gitt fisk med andre fisk er proporsjonal med x, så vil det totale antall møter mellom to fisk være proporsjonal med x^2, slik at fødselsraten også er proporsjonal med x^2, det vil si at den er på formen bx^2.

b)

Differensiallikningen kan skrives $\frac{1}{x(bx-a)}\frac{dx}{dt} = 1$. Etter delbrøksoppspalting og integrasjon får vi

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(bx-a)}\frac{dx}{dt}dt &= \int \frac{1}{x(bx-a)}dx = \frac{1}{a}\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-a/b}\right)dx\\ &= \frac{1}{a}\left(\ln|x-a/b| - \ln|x|\right) = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x-a/b}{x}\right| = t+C,\end{aligned}$$

slik at $\frac{x-a/b}{x} = 1-\frac{a}{bx} = De^{at}$. Setter vi inn $x(0) = x_0$ finner vi at $D = 1-\frac{a}{bx_0}$, Løser vi for x finner vi at

$$x(t) = \frac{a}{b(1-De^{at})} = \frac{a}{b-(b-\frac{a}{x_0})e^{at}}.$$

c)

Hvis $b-\frac{a}{x_0} > 0$ vil vi når $b = (b-\frac{a}{x_0})e^{at}$ få 0 i nevneren, slik at $x(t)\to\infty$ når t går mot denne verdien. Løser vi for dette finner vi at $e^{at} = \frac{b}{b-\frac{a}{x_0}}$, som gir at $t = -\frac{1}{a}\ln(1-a/(bx_0))$. Videre er $b-\frac{a}{x_0} > 0$ det samme som at $b > \frac{a}{x_0}$, som er det samme som at $x_0 > \frac{a}{b}$. Med $k_0 = \frac{a}{b}$ har vi altså at hvis $x_0 > k_0$ så vil populasjonen vokse over alle grenser når $t \to -\frac{1}{a}\ln(1-a/(bx_0))$. Hvis $x_0 < k_0$ kan vi aldri få null i nevneren, og nevneren går mot uendelig, slik at populasjonen dør ut i dette tilfellet.

d)

Hvis fiskepopulasjonen skal holde seg konstant lik x_0 må vi ha at $\frac{dx}{dt} = 0$. Da må $bx^2 - ax - c = 0$, slik at $x = \frac{a \pm \sqrt{a^2+4bc}}{2b}$. Her er det bare $x = \frac{a+\sqrt{a^2+4bc}}{2b}$ som er interessant (den andre er negativ). Vi må altså ha at $x(t) = x_0 = \frac{a+\sqrt{a^2+4bc}}{2b}$ for alle t. Løser vi for c finner vi at $c = c_0 = \frac{(2bx_0-a)^2-a^2}{4b}$.

Oppgave 10.4.13

a)

Nullpunkter for h har vi kun når $t = 0$. Vi har at $h'(t) = -0.1e^{-0.1t} + 0.5e^{-0.5t}$. Setter vi dette lik 0 får vi at $e^{-0.1t} = 5e^{-0.5t}$, som gir at $-0.1t = -0.5t + \ln 5$, slik at $t = \frac{5}{2}\ln 5$. Det er klart at dette må være et maksimumspunkt, og at

$$h(\frac{5}{2}\ln 5) = e^{-0.25\ln 5} - e^{-1.25\ln 5} = 5^{-0.25} - 5^{1.25} \approx 0.5350$$

Vi har også at $h''(t) = 0.1^2e^{-0.1t} - 0.5^2e^{-0.5t}$. $h''(t) = 0$ gir at $e^{-0.1t} = 25e^{-0.5t}$, som gir at $-0.1t = -0.5t + 2\ln 5$, slik at $t = 5\ln 5$.

c)

Vi ser først at $f(t) = Ce^{-kt}$. Siden $f(0) = 10$ må vi ha at $C = 10$, slik at $f(t) = 10e^{-kt}$. Den andre likningen blir nå $g'(t) + lg(t) = 10ke^{-kt}$. Løser vi denne som en førsteordens lineær differensiallikning finner vi at

$$\begin{aligned} g(t) &= e^{-lt}\left(\int e^{lt}10ke^{-kt}dt + C\right) = e^{-lt}\left(\frac{10k}{l-k}e^{(l-k)t}dt + C\right) \\ &= \frac{10k}{l-k}e^{-kt} + Ce^{-lt}. \end{aligned}$$

$g(0) = 0$ gir at $0 = \frac{10k}{l-k} + C$, slik at $C = \frac{10k}{k-l}$. Vi får derfor $g(t) = \frac{10k}{l-k}(e^{-kt} - e^{-lt})$.

d)

Vi har her at $g(t) = \frac{5}{2}(e^{-0.1t} - e^{-0.5t}) = \frac{5}{2}h(t)$. Kl 1700 har det gått 10 timer, og da er $g(10) = \frac{5}{2}(e^{-1} - e^{-5}) = 0.9029$.

e)

Hvis vi endrer initialkravet til $f(0) = A$ får vi at $f(t) = Ae^{-kt}$, og $g(t) = \frac{0.1A}{0.4}(e^{-0.1t} - e^{-0.5t}) = \frac{1}{4}Ah(t)$. Maksimumsverdien her er $\frac{1}{4}A \times 0.5350$. For at denne skal være mindre enn 5 må vi ha at $A < \frac{20}{0.5350} = 37.3837$.

Oppgave 10.4.18

a)

Deriverer vi begge sider og bruker analysens fundamentalteorem finner vi at

$$\begin{aligned} 2f(x)f'(x) &= -\frac{1}{x^2}\int_1^x f(t)dt + \frac{1}{x}f(x) = -\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt\right) + \frac{1}{x}f(x) \\ &= -\frac{1}{x}[f(x)]^2 + \frac{1}{x}f(x) = \frac{f(x) - [f(x)]^2}{x}. \end{aligned}$$

Her vi også substituert $[f(x)]^2 = \frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt$, det vil si brukt likningen i boka. Likningen i boka får vi nå ved å sette in $y = f(x)$, og dele med 2.

b)

Likningen er separabel siden vi kan skrive

$$\frac{1}{1-y}y' = \frac{1}{2x}.$$

Vi integrerer og finner $-\ln|1-y| = \frac{1}{2}\ln|x| + C$, slik at $|1-y|^{-1} = e^{\ln|x|/2+C} = De^{\ln|x|^{1/2}} = D\sqrt{x}$, slik at $1-y = \frac{E}{\sqrt{x}}$, og dermed $y = 1 - \frac{E}{\sqrt{x}}$.

Seksjon 10.5

Oppgave 10.5.1

a)

Den karakteristiske likningen blir $r^2 + r - 6 = 0$, som har røtter $r = -3, 2$. Dermed blir den genereller løsningen $y(x) = Ce^{-3x} + De^{2x}$.

c)

Den karakteristiske likningen blir $r^2+6r+9 = 0$, som har røtter $r = -3$. Dermed blir den genereller løsningen $y(x) = Ce^{-3x} + Dxe^{-3x}$.

Oppgave 10.5.3

a)

Den karakteristiske likningen blir $r^2-5r+4 = 0$, som har røtter $r = 1, 4$. Dermed blir den generelle løsningen $y(x) = Ce^x + De^{4x}$. Initialbetingelsene $y(0) = 2$ og $y'(0) = -4$ gir dermed likningene

$$\begin{aligned} C + D &= 2 \\ C + 4D &= -4, \end{aligned}$$

som gir at $C = 4,\ D = -2$. Løsningen blir dermed $y(x) = 4e^x - 2e^{4x}$.

c)

Den karakteristiske likningen blir $r^2 - 4r - 1 = 0$, som har røtter $r = 2 \pm \sqrt{5}$. Dermed blir den generelle løsningen $y(x) = Ce^{(2+\sqrt{5})x} + De^{(2-\sqrt{5})x}$. Initialbetingelsene $y(1) = 2$ og $y'(1) = -1$ gir dermed likningene

$$\begin{aligned} Ce^{2+\sqrt{5}} + De^{2-\sqrt{5}} &= 2 \\ C(2+\sqrt{5})e^{2+\sqrt{5}} + D(2-\sqrt{5})e^{2-\sqrt{5}} &= -1, \end{aligned}$$

Ved å sette inn den første likningen i den andre kan disse skrives om til

$$\begin{aligned} Ce^{2+\sqrt{5}} + De^{2-\sqrt{5}} &= 2 \\ Ce^{2+\sqrt{5}} - De^{2-\sqrt{5}} &= -\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Legger vi disse sammen og trekker de fra hverandre finner vi at $C = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{5})e^{-2-\sqrt{5}}$, og $D = \frac{1}{2}(2+\sqrt{5})e^{-2+\sqrt{5}}$. Løsningen blir dermed

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{2}(2-\sqrt{5})e^{-2-\sqrt{5}}e^{(2+\sqrt{5})x} + \frac{1}{2}(2+\sqrt{5})e^{-2+\sqrt{5}}e^{(2-\sqrt{5})x} \\ &= \frac{1}{2}(2-\sqrt{5})e^{(2+\sqrt{5})(x-1)} + \frac{1}{2}(2+\sqrt{5})e^{(2-\sqrt{5})(x-1)}. \end{aligned}$$

Oppgave 10.5.4

a)

Den karakteristiske likningen blir $r^2 - 4r + 4 = 0$, som har $r = 2$ som en dobbeltrot. Det betyr at den generelle løsningen blir $y(x) = Ce^{2x} + Dxe^{2x}$. Kravene $y(0) = 1$ og $y(1) = -1$ gir likningene

$$\begin{aligned} C &= 1 \\ Ce^2 + De^2 &= -1, \end{aligned}$$

som gir at $C = 1$ of $D = -e^{-2} - 1$. Dette gir løsningen $y(x) = e^{2x} - (e^{-2}+1)xe^{2x}$.

Oppgave 10.5.5

a)

Fra løsningen ser vi at -2 må være en dobbelrot i den karakteristiske likningen, som dermed må ha formen $a(r+2)^2 = a(r^2+4r+4) = 0$. En differensiallikning blir dermed $y'' + 4y' + 4y = 0$.

b)

Den generelle løsningen av likningen er $Ae^{-2x} + Bxe^{-2x}$. Løsningen der $y(0) = 0$ og $y'(0) = 1$ kan vi derfor finne ved å løse

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ -2A + B &= 1, \end{aligned}$$

som gir $A = 0$, $B = 1$, slik at løsningen blir $y(x) = xe^{-2x}$.

Oppgave 10.5.11

a)

$x(t)$ er rovdyr og $y(t)$ er byttedyr siden $x(t)$ gir en reduksjon i vekstraten til $y(t)$.

b)

Vi har at $x''(t) = by'(t) = -bcx(t)$, der vi i det andre steget brukte den andre likningen.

c)

Differensiallikningen $x''(t)+bcx(t) = 0$ for å finne $x(t)$ har karakteristisk likning $r^2 + bc = 0$, som har løsning $r = \pm\sqrt{bc}i$. Vi får dermed $x(t) = C\cos(\sqrt{bc}t) + D\sin(\sqrt{bc}t)$. Siden $x(0) = x_0$ og $x'(0) = by(0) = by_0$ kan vi finne C og D ved å sette inn $t = 0$ i

$$\begin{aligned} x(t) &= C\cos(\sqrt{bc}t) + D\sin(\sqrt{bc}t) \\ x'(t) &= -C\sqrt{bc}\sin(\sqrt{bc}t) + D\sqrt{bc}\cos(\sqrt{bc}t) \end{aligned}$$

og får da

$$\begin{aligned} C &= x_0 \\ D\sqrt{bc} &= by_0, \end{aligned}$$

som gir at $C = x_0$ og $D = \sqrt{\frac{b}{c}}y_0$, slik at

$$x(t) = x_0\cos(\sqrt{bc}t) + \sqrt{\frac{b}{c}}y_0\sin(\sqrt{bc}t).$$

Vi får også

$$\begin{aligned} y(t) = \frac{1}{b}x'(t) &= \frac{1}{b}\left(-x_0\sqrt{bc}\sin(\sqrt{bc}t) + \sqrt{\frac{b}{c}}\sqrt{bc}y_0\cos(\sqrt{bc}t)\right) \\ &= -\sqrt{\frac{c}{b}}x_0\sin(\sqrt{bc}t) + y_0\cos(\sqrt{bc}t). \end{aligned}$$

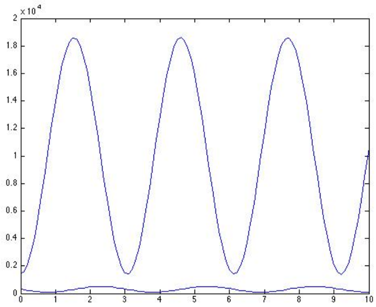
d)

Med verdiene i oppgaven får vi at $\sqrt{bc} = \sqrt{4.2}$, og $\sqrt{\frac{c}{b}} = \sqrt{20\times 84} = \sqrt{1680}$. Videre er det klart at

$$\begin{aligned} x_0 &= N_1(0) - 300 = 300 - 300 = 0 \\ y_0 &= N_2(0) - 10000 = 1400 - 10000 = -8600. \end{aligned}$$

Dermed blir antall individer av hver art

$$\begin{aligned} N_1(t) &= x(t) + 300 = \sqrt{\frac{b}{c}}y_0\sin(\sqrt{bc}t) + 300 = -\frac{8600}{\sqrt{1680}}\sin(\sqrt{4.2}t) + 300 \\ N_2(t) &= y(t) + 10000 = y_0\cos(\sqrt{bc}t) + 10000 = -8600\cos(\sqrt{4.2}t) + 10000. \end{aligned}$$



Figur 2: Bestandene $N_1(t)$ og $N_2(t)$.

Det er klart fra dette at $N_1(t)$ varierer mellom $300 + \frac{8600}{\sqrt{1680}} \approx 509.185$ og $300 - \frac{8600}{\sqrt{1680}} \approx 90.1815$, og at minimum inntreffer for $t = \frac{T}{4}$, maksimum for $t = \frac{3T}{4}$, der T er perioden. $N_2(t)$ varierer mellom $10000-8600 = 1400$ og $10000+8600 = 18600$ men minimum som inntreffer for $t = 0$, maksimum for $t = \frac{T}{2}$. Det er klart at perioden er $T = \frac{2\pi}{\sqrt{bc}} = \frac{2\pi}{\sqrt{4.2}} \approx 3.0659$. Vi har plottet bestandene i Figur 2. $N_2(t)$ er den bestanden med flest dyr, det vil si at det alltid er flest byttedyr. Forklaringen på at bunner og topper er forskjøvet i forhold til hverandre kan være at når byttedyrbestanden blir stor blir det bedre tider for rovdyrene, mens når byttedyrbestanden blir liten blir det dårligere tider for rovdyrene.

Seksjon 10.6

Oppgave 10.6.1

a)

$y'' - y' - 2y = 0$ har karakteristisk likning $r^2 - r - 2 = 0$, som har røtter $r = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{1\pm 3}{2}$, slik at røttene er -1 og 2. Den generelle løsningen er dermed $y(x) = Ce^{-x} + De^{2x}$.

b)

Vi prøver med $y_p = Ae^x$, og da blir $(y_p)'' - (y_p)' - 2y_p = (A - A - 2A)e^x = -2Ae^x = e^x$, slik at $A = -\frac{1}{2}$, slik at $y_p = -\frac{1}{2}e^x$ er en partikulær løsning.

c)

Den generelle løsningen til $y'' - y' - 2y = e^x$ er $y(x) = Ce^{-x} + De^{2x} - \frac{1}{2}e^x$. Vi har også at $y'(x) = -Ce^{-x} + 2De^{2x} - \frac{1}{2}e^x$. Setter vi inn initialbetingelsene får vi at

$$\begin{aligned} C + D - \frac{1}{2} &= 2 \\ -C + 2D - \frac{1}{2} &= 2. \end{aligned}$$

Legger vi sammen likningene får vi først at $3D - 1 = 4$, slik at $D = \frac{5}{3}$. Deretter får vi at $C = 2 + \frac{1}{2} - D = \frac{5}{2} - \frac{5}{3} = \frac{5}{6}$. Dermed blir løsningen $y(x) = \frac{5}{6}e^{-x} + \frac{5}{3}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{x}$.

Oppgave 10.6.2

a)

$y'' - 2y' - 8y = 0$ har karakteristisk likning $r^2 - 2r - 8 = 0$, som har røtter $r = \frac{2\pm\sqrt{4+32}}{2} = 1 \pm 3$, slik at røttene er 4 og -2. Den generelle løsningen er dermed $y(x) = Ce^{4x} + De^{-2x}$.

b)

Vi prøver med $y_p = Ax+B$, og da blir $(y_p)'' - 2(y_p)' - 8y_p = -2A - 8Ax - 8B = -8Ax - 2A - 8B = 6 - 8x$. Vi må da ha at $A = 1$. Videre må $-2A - 8B = -2 - 8B = 6$, slik at $B = -1$, og dermed blir $y_p = x - 1$ en partikulær løsning.

c)

Den generelle løsningen til $y'' - y' - 2y = 6 - 8x$ er $y(x) = Ce^{4x} + De^{-2x} + x - 1$. Vi har også at $y'(x) = 4Ce^{4x} - 2De^{-2x} + 1$. Setter vi inn initialbetingelsene får vi at

$$
\begin{aligned}
Ce^4 + De^{-2} &= 0 \\
4Ce^4 - 2De^{-2} + 1 &= 1.
\end{aligned}
$$

Fra den siste likningen får vi at $4Ce^6 = 2D$, slik at $D = 2Ce^6$. Setter vi inn i den første likningen får vi at $Ce^4 + 2Ce^6e^{-2} = 0$, som gir at $3Ce^4 = 0$. Vi får dermed $C = 0$, og $D = 0$, slik at løsningen blir $y(x) = x - 1$.

Oppgave 10.6.3

a)

Deriverer vi $y(x) = Ae^x \sin(2x)$ får vi at

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= Ae^x \sin(2x) + 2Ae^x \cos(2x) \\
y''(x) &= Ae^x \sin(2x) + 2Ae^x \cos(2x) + 2Ae^x \cos(2x) - 4Ae^x \sin(2x) \\
&= -3Ae^x \sin(2x) + 4Ae^x \cos(2x).
\end{aligned}
$$

Setter vi inn får vi at

$$
\begin{aligned}
y'' - 2y' - 3y &= -3Ae^x \sin(2x) + 4Ae^x \cos(2x) \\
&\quad - 2Ae^x \sin(2x) - 4Ae^x \cos(2x) - 3Ae^x \sin(2x) \\
&= -8Ae^x \sin(2x).
\end{aligned}
$$

Skal dette være lik $e^x \sin(2x)$ så må $A = -\frac{1}{8}$, slik at $y(x) = -\frac{1}{8}e^x \sin(2x)$.

b)

Den karakteristiske likningen har røtter $r = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = 1 \pm 2$, slik at røttene er 3 og -1. Dermed blir den generelle løsningen av den homogene likningen $y_h = Ce^{3x} + De^{-x}$. Den generelle løsningen er dermed

$$y = y_p + y_h = Ce^{3x} + De^{-x} - \frac{1}{8}e^x \sin(2x).$$

Oppgave 10.6.4

a)

Den karakteristiske likningen her blir $r^2 - 4r + 4 = 0$, som bare har den reelle roten $r = 2$. Dermed er den generelle løsningen $y_h(x) = Ce^{2x} + Dxe^{2x}$.

b)

Vi prøver med $y_p(x) = Ax + B$, og får da at

$$(y_p)'' - 4(y_p)' + 4y_p = -4A + 4Ax + 4B = 4Ax - 4A + 4B = x.$$

Vi ser da at $A = B = \frac{1}{4}$, slik at $y_p(x) = \frac{1}{4}(x+1)$ er en partikulær løsning. Den generell løsningen blir dermed $y(x) = Ce^{2x} + Dxe^{2x} + \frac{1}{4}(x+1)$. Vi får nå at $y'(x) = 2Ce^{2x} + (D + 2Dx)e^{2x} + \frac{1}{4}$. Setter vi inn initialbetingelesene får vi at

$$\begin{aligned} C + \frac{1}{4} &= 0 \\ 2C + D + \frac{1}{4} &= 1, \end{aligned}$$

som gir at $C = -\frac{1}{4}$, og $D = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$. Løsningen blir dermed $y(x) = -\frac{1}{4}e^{2x} + \frac{5}{4}xe^{2x} + \frac{1}{4}(x+1)$.

Oppgave 10.6.7

Vi prøver med $y_p = Ax^2 + Bx + C$, og får da at

$$(y_p)'' - 8(y_p)' + 6y_p = 2A - 8(2Ax + B) + 6(Ax^2 + Bx + C) = 6Ax^2 + (-16A + 6B)x + 2A - 8B + 6C.$$

Skal dette være lik x^2 så må A, B, C oppfylle likningene

$$\begin{aligned} 6A &= 1 \\ -16A + 6B &= 0 \\ 2A - 8B + 6C &= 0 \end{aligned}$$

Den første likningen gir at $A = \frac{1}{6}$. Den andre likningen gir nå at $B = \frac{16}{6}A = \frac{4}{9}$. Den tredje likningen gir til slutt at $C = -\frac{1}{3}A + \frac{4}{3}B = -\frac{1}{18} + \frac{16}{27} = \frac{-3+32}{54} = \frac{29}{54}$. Vi har dermed den partikulære løsningen $y_p = \frac{1}{6}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{29}{54}$. Videre har den karakteristiske løkningen røtter $\frac{8 \pm \sqrt{64-24}}{2} = 4 \pm \sqrt{10}$. Dermed blir den generelle løsningen

$$y(x) = Ce^{(4+\sqrt{10})x} + De^{(4-\sqrt{10})x} + \frac{1}{6}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{29}{54}.$$

Kapittel 11

Seksjon 11.1

Oppgave 11.1.1

De deriverte til $f(x) = e^{x^2}$ er

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^{x^2} & f''(x) &= (2+4x^2)e^{x^2} \\ f^{(3)}(x) &= (12x+8x^3)e^{x^2} & f^{(4)}(x) &= (12+48x^2+16x^4)e^{x^2}. \end{aligned}$$

Dermed får vi at

$$f(0) = 1 \qquad f'(0) = 0 \qquad f''(0) = 2 \qquad f^{(3)}(0) = 0 \qquad f^{(4)}(0) = 12.$$

Dermed blir Taylorpolynomet av fjerde grad om 0 lik

$$\begin{aligned} T_4(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x-0)^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}(x-0)^4 \\ &= 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4. \end{aligned}$$

Oppgave 11.1.3

De deriverte til $f(x) = \sin x$ er

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x & f''(x) &= -\sin x \\ f^{(3)}(x) &= -\cos x & f^{(4)}(x) &= \sin x. \end{aligned}$$

Dermed får vi at

$$\begin{aligned} &f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} & &f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} & &f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &f^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} & &f^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Dermed blir Taylorpolynomet av fjerde grad om $\frac{\pi}{4}$ lik

$$\begin{aligned} T_4(x) &= f(0) + f'(0)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{f''(0)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{\sqrt{2}}{48}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4. \end{aligned}$$

Oppgave 11.1.7

De deriverte til $f(x) = \arctan x$ er

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$
$$f^{(3)}(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}.$$

Dermed får vi at

$$f(0) = 0 \qquad f'(0) = 1 \qquad f''(0) = 0 \qquad f^{(3)}(0) = -2.$$

Dermed blir Taylorpolynomet av tredje grad om 0 lik

$$T_3(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x-0)^3 = x - \frac{1}{3}x^3.$$

Oppgave 11.1.10

De deriverte til $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 7$ er

$$f'(x) = 4x^3 - 6x + 2 \qquad f''(x) = 12x^2 - 6 \qquad f^{(3)}(x) = 24x.$$

Dermed får vi at

$$f(1) = -7 \qquad f'(1) = 0 \qquad f''(1) = 6 \qquad f^{(3)}(1) = 24.$$

Dermed blir Taylorpolynomet av tredje grad om 0 lik

$$\begin{aligned} T_3(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3 \\ &= -7 + 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3 \end{aligned}$$

Seksjon 11.2

Oppgave 11.2.1

Taylorpolynomet til e^x av grad 4 om 0 blir $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$, siden alle de deriverte er e^x. Restleddet tar formen $\frac{e^c}{120}x^5$, der c er et tall mellom 0 og b. Siden e^x er en voksende funksjon er dette mindre enn $\frac{e^b}{120}b^5$, når vi setter inn $x = b$.

Oppgave 11.2.3

Med $f(x) = \ln x$ har vi at $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}$, og $f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$. Vi får dermed at $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$, $f''(1) = -1$, og $f^{(3)}(1) = 2$, slik at Taylorpolynomet til f av grad 3 om 1 blir

$$P_3(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{6}(x-1)^3 = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3.$$

For $b \geq 1$ har vi at $|f^{(4)}(x)| \leq 6$ for $x \in [1, b]$. Dermed gir Korollar 11.2.2 at

$$|R_3 f(b)| \leq \frac{6}{4!}(b-1)^4 = \frac{1}{4}(b-1)^4.$$

Oppgave 11.2.4

Med $f(x) = e^x$ har vi at $f^{(n)}(x) = e^x$. Vi ser på Taylorpolynomet til f om 0. Siden $f^{(n)}$ er voksende så kan restleddet begrenses ved $|R_n f(1)| \leq \frac{e}{(n+1)!}(1-0)^{n+1} \leq \frac{3}{(n+1)!}$. Vi må nå velge n slik at $\frac{3}{(n+1)!} \leq \frac{1}{10000}$, som gir at $(n+1)! \geq 30000$. Prøver vi oss frem finner vi at minste slik n er $n = 7$. e med nøyaktighet større enn $\frac{1}{10000}$ blir dermed

$$P_8(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} \approx 2.71825397.$$

Oppgave 11.2.5

Med $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ får vi

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} \qquad f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2} \qquad f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2}.$$

Vi får dermed

$$f(100) = 10 \qquad f'(100) = \frac{1}{20} \qquad f''(100) = -\frac{1}{4000}$$

Taylor-polynomet av grad 2 om 100 blir dermed $10 + \frac{1}{20}(x-100) - \frac{1}{8000}(x-100)^2$. Tilnærmingen til $\sqrt{101} = f(101)$ blir dermed

$$10 + \frac{1}{20} - \frac{1}{8000} = \frac{80000 + 400 - 1}{8000} = \frac{80399}{8000} \approx 10.049875.$$

Restleddet tar formen $\frac{1}{16}c^{-5/2}$, der c er et tall mellom 100 og 101. Siden $x^{-5/2}$ er en avtagende funksjon er dette mindre enn $\frac{1}{16}100^{-5/2} = \frac{1}{16}10^{-5} = 0.625 \times 10^{-6}$, slik at vi har 6 siffers presisjon.

Oppgave 11.2.6

Vi har at $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$ for en c mellom 0 og x. Dermed blir

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2!} + \frac{x}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-2}}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n-1}.$$

Lar vi x gå mot 0 her ser vi at grenseverdien blir $\frac{1}{2}$.

Oppgave 11.2.9

Det er mye regning å finne Taylorrekka til integranden $\frac{1-e^{-t}}{t}$. Det viser seg å være enklere i denne oppgaven å ta utgangspunkt i Taylorrekka til e^x, som kan skrives $e^x = T_n(x) + R_n(x) = 1 + x + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$ for en c mellom 0 og x. Setter vi $x = -t$ her får vi at

$$\begin{aligned}
\frac{1-e^{-t}}{t} &= \frac{1 - \left(1 + (-t) + \ldots + \frac{(-t)^n}{n!} + \frac{e^{c(t)}}{(n+1)!}(-t)^{n+1}\right)}{t} \\
&= \frac{t + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{t^n}{n!} + (-1)^{n+2}\frac{e^{c(t)}}{(n+1)!}t^{n+1}}{t} \\
&= 1 + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{t^{n-1}}{n!} + (-1)^{n+2}\frac{e^{c(t)}}{(n+1)!}t^n,
\end{aligned}$$

der $c(t)$ er et tall mellom 0 og $-t$. Dermed har vi at

$$\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}dt = \int_0^1 \left(1 + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{t^{n-1}}{n!}\right) dt + \int_0^1 (-1)^{n+2}\frac{e^{c(t)}}{(n+1)!}t^n dt.$$

Fra dette er det klart at vi bør velge n slik at

$$\left|\int_0^1 (-1)^{n+2}\frac{e^{c(t)}}{(n+1)!}t^n dt\right| \leq \int_0^1 \frac{e^{c(t)}}{(n+1)!}t^n dt \leq \int_0^1 \frac{1}{(n+1)!}t^n dt < 10^{-3},$$

der vi har brukt at $e^{c(t)} < 1$ når $c(t) \in [-1, 0]$. Det holder derfor å velge n slik at $\int_0^1 \frac{1}{(n+1)!}t^n dt = \frac{1}{(n+1)(n+1)!} < 10^{-3}$. Dette holder hvis $(n+1)(n+1)! > 1000$. Prøver vi oss frem finner vi at $n = 5$ er minste slik n. Vi får dermed at

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}dt &\approx \int_0^1 \left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{6} - \frac{t^3}{24} + \frac{t^4}{120}\right) dt \\
&= 1 - \frac{1}{2\times 2!} + \frac{1}{3\times 3!} - \frac{1}{4\times 4!} + \frac{1}{5\times 5!} \\
&= \frac{7200 - 1800 + 400 - 75 + 12}{7200} = \frac{5737}{7200} \approx 0.7968
\end{aligned}$$

Oppgave 11.2.15

a)

Med $g(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{1/3}$ får vi at

$$g'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-2/3} \quad g''(x) = -\frac{2}{9}(1+x)^{-5/3} \quad g'''(x) = \frac{10}{27}(1+x)^{-8/3}.$$

Vi får deretter

$$g(0) = 1 \qquad g'(0) = \frac{1}{3} \qquad g''(0) = -\frac{2}{9}.$$

Dermed blir Taylorpolynomet til g av grad 2 om origo

$$T_2(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}.$$

b)

For $c \geq 0$ er $g'''(c) = \frac{10}{27}(1+c)^{-8/3} \leq \frac{10}{27}$. Dermed har vi for restleddet at

$$R_2(x) = \frac{g'''(c)}{3!}x^3 \leq \frac{10}{27\times 6}x^3 = \frac{5}{81}x^3$$

c)

Vi har at $\sqrt[3]{1003} = \sqrt[3]{1000+3} = 10\sqrt[3]{1+0.003} = 10g(0.003)$. Hvis vi bruker Taylorpolynomet av grad 2 vil restleddet bli mindre enn $10 \times \frac{5}{81}0.003^3 = \frac{15}{3} \times 10^{-9} = 0.5 \times 10^{-8}$, slik at vi får minst 7 siffers presisjon. Dermed blir tilnærmingen

$$\sqrt[3]{1003} = 10g(0.003) \approx 10\left(1 + \frac{0.003}{3} - \frac{0.003^2}{9}\right) = 10+0.01-10^{-5} = 10.0099900$$

Kapittel 12

Seksjon 12.1

Oppgave 12.1.1

b)

Vi ser at $a_0 = 14$, $r = \frac{1}{7}$. Dermed er summen $\frac{a_0}{1-r} = \frac{14}{1-\frac{1}{7}} = \frac{14\times 7}{6} = \frac{49}{3}$.

c)

Den geometriske rekken fåes ved å gange hvert ledd med $-\frac{1}{6} < 1$ for å få det neste leddet. Summen blir derfor $\frac{4}{1-(-\frac{1}{6})} = \frac{24}{7}$.

Oppgave 12.1.3

a)

Her er $a_0 = 1$, $r = -x$, så summen er $\frac{1}{1+x}$.

b)

Her er $r = x^2$, så summen er $\frac{1}{1-x^2}$.

d)

Her er $r = e^{-1/2}$, så summen er $\frac{1}{1-e^{-1/2}}$.

Oppgave 12.1.4

a)

Følger av at $\arctan n \to \frac{\pi}{2}$ når $n \to \infty$.

b)

Følger av at $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \to 1$ når $n \to \infty$.

c)

Vi regner ut

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\sin\frac{1}{n}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(1-\sin\frac{1}{n}\right)} \\
&= e^{\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1-\sin\frac{1}{n}\right)} \\
&= e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin x)}{x}} \\
&= e^{\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{1-\sin x}} \\
&= e^{-1}.
\end{aligned}$$

Det følger dermed fra divergenstesten at rekken divergerer.

d)

Vi regner ut

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n+3}\right)^n &= \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(\frac{n-2}{n+3}\right)} \\
&= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{n-2}{n+3}\right)}{\frac{1}{n}}} \\
&= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n+3}^{2}}{-\frac{1}{n^2}\frac{n-2}{n+3}}} \\
&= e^{\lim_{n\to\infty} -5\frac{n^2}{(n+3)(n-2)}} \\
&= e^{-5}\neq 0.
\end{aligned}$$

e)

Vi regner ut

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n(2^{1/n}-1) &= \lim_{n\to\infty}\frac{-n^{-2}2^{1/n}\ln 2}{-n^{-2}} \\
&= \ln 2\neq 0.
\end{aligned}$$

Oppgave 12.1.5

a)

Setter vi

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k}+\frac{B}{k+1} = \frac{(A+B)k+A}{k(k+1)}$$

ser vi umiddelbart at $A=-B$ og at $A=1$, slik at $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$.

b)

Bruker vi det vi viste i a) vil alle ledd i summen kansellere bortsett fra det positive leddet (1) for $k=1$, og det negative leddet (-$\frac{1}{n+1}$) for $k=n$. Resultatet følger.

c)

Det er klart fra b) at summen konvergerer mot 1.

Seksjon 12.2

Oppgave 12.2.1

a)

Funksjonen $f(x) = \ln(x + 1)$ er positiv, kontinuerlig og avtagende på $[1, \infty]$. Vi kan derfor sammenligne med integralet

$$\int_1^\infty \frac{1}{x+1} dx = \lim_{n\to\infty} [\ln(x+1)]_1^n = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) - \ln 2.$$

Rekken vil derfor divergere, siden integralet divergerer (ln går mot uendelig).

b)

Funksjonen $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ er positiv, kontinuerlig og avtagende på $[1, \infty]$. Vi kan derfor sammenligne med integralet

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{n\to\infty} [\arctan x]_1^n = \lim_{n\to\infty} \arctan n - \arctan 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Rekken vil derfor konvergere.

c)

Funksjonen $f(x) = \frac{1}{x^2+x}$ er positiv, kontinuerlig og avtagende på $[1, \infty]$. Vi kan derfor sammenligne med integralet

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+x} dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{n\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n = 1.$$

Rekken vil derfor konvergere.

d)

Funksjonen $f(x) = \frac{1}{\cosh^2 x}$ er positiv, kontinuerlig og avtagende på $[1, \infty]$. Vi kan derfor sammenligne med integralet

$$\int_1^\infty \frac{1}{\cosh^2 x} dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{e^{2x}} dx = \lim_{n\to\infty} \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_1^n = \frac{1}{2}e^{-2}.$$

Rekken vil derfor konvergere.

e)

Funksjonen $f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ er positiv, kontinuerlig og avtagende på $[0, \infty]$. Vi kan derfor sammenligne med integralet

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\pi}{2} - \arctan x dx &= \lim_{n\to\infty}\left(\left[x(\frac{\pi}{2} - \arctan x)\right]_0^n + \int_0^n \frac{x}{1+x^2}dx\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(n(\frac{\pi}{2} - \arctan n) + \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(n(\frac{\pi}{2} - \arctan n) + \frac{1}{2}\ln(1+n^2)\right).
\end{aligned}$$

Begge leddene her er større enn 0, og det andre vil gå mot ∞. Rekken vil derfor divergere.

Oppgave 12.2.2

Vi sammenligner med

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int_{\ln 2}^\infty \frac{du}{u^p}.$$

Hvis $p \neq 1$ vet vi at dette er

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1-p}u^{1-p}\right]_{\ln 2}^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-p}(n^{1-p} - (\ln 2)^{1-p}).$$

Det er klart at dette konvergerer hvis og bare hvis $p > 1$.

For $p = 1$ vil rekken divergere. Integralet ovenfor vil da i stedet bli en logaritmefunksjon, og integralet vil divergere siden $\ln n \to \infty$ når $n \to \infty$.

Oppgave 12.2.3

a)

Bruk grensesammenligningstesten med $\lim_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ til å fastslå at rekken divergerer.

b)

Bruk grensesammenligningstesten med $\lim_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ til å fastslå at rekken konvergerer.

c)

Bruk grensesammenligningstesten med $\lim_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ til å fastslå at rekken konvergerer (bruk at $\arctan n \to \pi/2$).

d)

Vi regner ut (sammenligner med $\frac{1}{n}$):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{(n+\sqrt{n})\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{1+n^{-1/2}} = 1.$$

Rekken vil derfor divergere, siden $\sum_n \frac{1}{n}$ divergerer.

e)

Vi sammenligner med $\frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{-\frac{2}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Rekken vil derfor konvergere, siden $\frac{1}{n^2}$ konvergerer.

f)

Bruk grensesammenligningstesten med $\sum \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n)}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-(1/n^2)\cos(1/n)}{-1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \cos(1/n) = 1,$$

slik at rekken divergerer.

g)

Bruk grensesammenligningstesten med $\sum \frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arcsin(1/n^2)}{1/n^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1,$$

og dermed konvergerer rekken.

h)

Bruk grensesammenligningstesten med $\sum \frac{1}{n}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{1/n} &= \lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n^2+1-n^2)}{\sqrt{n^2+1}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}+1} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

og dermed divergerer rekken.

i)

Bruk grensesammenligningstesten med $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}-n^{3/2}}{1/n^{3/2}} &= \lim_{n\to\infty} n^{3/2}(\sqrt{n^3+1}-n^{3/2}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}(\sqrt{n^3+1}-n^{3/2})(\sqrt{n^3+1}+n^{3/2})}{\sqrt{n^3+1}+n^{3/2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}(n^3+1-n^3)}{\sqrt{n^3+1}+n^{3/2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}}{\sqrt{n^3+1}+n^{3/2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/n^3}+1} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

og dermed konvergerer rekken.

Oppgave 12.2.4

a)

Vi sammenligner rekkene $\sum_n a_n$ og $\sum_n \sin(a_n)$. Hvis $\sum_n a_n$ konvergerer, og siden

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1$$

(siden $\lim_{n\to\infty} = 0$) så vil $\sum_n \sin(a_n)$ også konvergere på grunn av grensesammenligningstesten. den motsatte veien følger for eksempel fra at $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sin(a_n)} = 1$.

b)

Siden $\sum_n \frac{1}{n}$ divergerer så vil $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ divergere på grunn av a). men da vil $\sum_n \sin\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ også divergere på grunn av a) igjen.

Oppgave 12.2.5

a)

Forholdstesten gir en grenseverdi på $\frac{1}{3}$, og dermed konvergerer rekken.

b)

Forholdstesten gir en grenseverdi på 3, og dermed divergerer rekken.

c)

Vi bruker rottesten:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} < 1.$$

Rekken vil derfor konvergere.

d)

Forholdstesten gir en grenseverdi på 0, og dermed konvergerer rekken.

e)

Forholdstesten gir en grenseverdi på 0, og dermed konvergerer rekken.

f)

Vi bruker forholdtesten:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4}.$$

Rekken vil derfor konvergere.

g)

Vi bruker forholdstesten:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{4(n+1)n^n}{(n+1)(n+1)^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^n}{(n+1)^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \\
&= \frac{4}{e} > 1.
\end{aligned}$$

Rekken vil derfor divergere.

Oppgave 12.2.7

a)

Rekken konvergerer. Bruk grensesammenligningstesten med rekker $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

b)

Rekken divergerer. Bruk grensesammenligningstesten med rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

c)

Rekken divergerer. Bruk sammenligningstesten med rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

d)

Rekken divergerer på grunn av divergenstesten, siden $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

e)

forholdstesten gir

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)e^{n^2-(n+1)^2}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)e^{-2n-1}}{n}=0,$$

slik at rekken konvergerer.

f)

Vi sammenligner med $\sum a_n = \sum \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+1/n)(1+1/n)^n}=\frac{1}{e},$$

slik at rekken divergerer.

g)

Forholdstesten gir

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}=0,$$

slik at rekken konvergerer.

Oppgave 12.2.9

Siden summen av de n første tallene er $\frac{n(n+1)}{2}$ så blir summen lik $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^{n+1}}$. Forholdstesten gir

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)2^{n+1}}{n(n+1)2^{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n}=\frac{1}{2},$$

og rekka konvergerer derfor.

Oppgave 12.2.13

a)

Anta $P(x)=\sum_{n=0}^{N}a_nx^n$. Da er

$$\lim_{n\to\infty}P(n)^{1/n}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\ln P(n)}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln P(x)}{x}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{P'(x)}{P(x)}}=e^0=1,$$

hvor vi har brukt at $P'(x)$ er et polynom av grad en mindre enn $P(x)$.

b)

På grunn av a) blir grenseverdien for $a_n^{1/n}$ lik $1/2$, og dermed konvergerer rekken på grunn av rottesten.

Seksjon 12.3

Oppgave 12.3.1

a), c), d)

Rekkene er alternerende, og $a_n \to 0$. Det er klart for alle rekkene at de er avtagendene, siden funksjonene n^2+1, $\sqrt{n}$ og $\ln(n)$ er voksende. derfor er alle tre rekkene konvergente (kravene i testen for alternerende rekker er oppfylt).

b)

Divergerer på grunn av divergenstesten (a_n går ikke mot 0).

e)

På grunn av divergenstesten divergerer rekken, siden det n'te leddet ikke går mot 0.

Oppgave 12.3.3

a)

Det er fort gjort å sjekke at kravene i testen for alternerende rekker er oppfylt. Vi forsøker finne den minste n slik at $|a_{n+1}| < \epsilon = 0.05$. Dette svarer til $\frac{1}{(n+2)^2} < 0.05$, eller $(n+2)^2 > 20$. Det er klart at minste n der dette er oppfylt er $n = 3$. Den tilnærmede summen blir da

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} = \frac{-36+16-9}{144} = -\frac{29}{144}.$$

b)

Vi må finne n slik at $|a_{n+1}| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 0.25$. Dette er det samme som $\sqrt{n+1} > 4$, eller $n > 15$. legger vi sammen de første 16 leddene finner vi -0.4818.

c)

Rekken er alternerende. Videre er $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{n+1}{ne}\right| < 1$ for alle n. Det er klart fra dette at kravene i testen for for alternerende rekke er oppfylt. Vi forsøker finne den minste n slik at $|a_{n+1}| < \epsilon = 0.1$. Dette svarer til $(n+1)e^{-(n+1)} < 0.1$. Det er fort gjort å sjekke at minste n hvor dette er oppfylt er $n = 3$ ($|a_3| = 0.1494, |a_4| = 0.0733$). Den tilnærmede summen blir da

$$s_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 - \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} - \frac{3}{e^3} \approx -0.2466.$$

Oppgave 12.3.4

a)

$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ er en geometrisk rekke der vi ganger med $-x$ for å få det neste leddet i rekka, og der det første leddet er 1. Summeformelen for en geometrisk rekke gir at summen blir $\frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$.

b)

Vi har at

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{1+x}-\sum_{k=0}^{n}(-x)^k\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-x)^k\right| = \left|(-x)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k\right| \\ &= \frac{|x|^{n+1}}{1+x} \leq x^{n+1}\end{aligned}$$

for $x \geq 0$ (siden da er $1+x > 1$).

c)

Med $f(x) = \ln(1+x)$ er $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$. Spesielt er $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$. Så lenge $x \geq 0$ er det klart at restleddet i Taylorrekka går mot 0, slik at Taylorrekka

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}x^{k+1}$$

om 0 konvergerer mot $\ln(1+x)$, det vil si at

$$\left|\ln(1+x)-\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}x^{k+1}\right)\right| = \left|\ln(1+x)+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-x)^{k+1}}{k+1}\right| \to 0.$$

Rekken her er alternerende, slik at avviket er fra summen er begrenset ved $|a_{n+1}| = \frac{x^{n+2}}{n+2}$.

d)

Sett inn $x = \frac{1}{2}$ i formelen fra c). Skal vi finne $\ln(3/2)$ med en nøyaktighet bedre enn 0.01 må derfor $\frac{(1/2)^{n+2}}{n+2} = \frac{1}{2^{n+2}(n+2)} < 0.01$. Prøver vi oss frem finner vi at $n = 3$, som gir tilnærmingen

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{3}\frac{(-1/2)^{k+1}}{k+1} &= \frac{1}{2}-\frac{1}{4\times 2}+\frac{1}{8\times 3}-\frac{1}{16\times 4} \\ &= \frac{96-24+8-3}{192} = \frac{77}{192} \approx 0.4010.\end{aligned}$$

Oppgave 12.3.6

a)

Siden $n \geq \sqrt{n}$ er $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Dermed er $-\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n} \leq 0$. For n odde er $a_n = -\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}$, som dermed er negative. For n like er det klart at leddene er positive, og rekken er derfor alternerende. Det er klart at leddene i rekken går mot 0.

b)

Vi kan skrive

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Den første av disse rekkene ser vi fort at oppfyller kravene i testen for en alternerende rekke. Den andre rekken vet vi at er divergent. Da følger det fra Korollar 12.1.8 at $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)$ er divergent. Grunnen til at dette ikke strider mot testen for alternerende rekker må jo da bli at det siste kravet der (om avtagende ledd) ikke er oppfylt. Hvis leddene var avtagende ville vi for n odde ha at ($-a_n > a_{n+1}$)

$$\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{n+1},$$

eller

$$\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}.$$

Dette kan du teste at ikke er tilfelle ved å sette inn et par verdier av n (for eksempel $n=5$). Alternativt kan du begrunne dette ved at leddene $\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ vil være mye større enn $\frac{1}{n}$, bare n er valgt stor nok.

Seksjon 12.4

Oppgave 12.4.1

a)

Rekken er betinget konvergent, siden $\sum \frac{1}{n+1}$ divergerer, mens den alternerende rekken konvergerer etter testen for alternerende rekker.

b)

Denne er absolutt konvergent: Sammenlign den positive rekken $\frac{1}{n^2+4}$ med $\frac{1}{n^2}$ (som jo konvergerer).

c)

Betinget konvergent, siden $\sum \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$ divergerer (sammenlign med den divergente $\sum \frac{1}{n}$), og $\sum(-1)^n \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$ konvergerer (alle kravene i testen for en alternerende rekke er oppfylt).

e)

Betinget konvergent, siden $\sum \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ divergerer (sammenlign med den divergente $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$, og $\sum(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ konvergerer. Sistnevnte tilfredsstiller alle kravene i testen for en alternerende rekke: Vi ser lett at $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. For å se at rekken er avtagende kan du for eksempel regne ut den deriverte til $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$ og sjekke at denne er <0 for x stor nok.

f)

Rottesten på $\sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ gir grenseverdien $e^{-1} < 1$, slik at rekken konvergerer absolutt.

Oppgave 12.4.3

a)

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |a|$. Fra forholdstesten for generelle rekker følger det da at rekken divergerer hvis $|a| > 1$, konvergerer (absolutt)hvis $|a| < 1$. For $a = -1$ ser vi at rekken konvergerer. For $a = 1$ ser vi at den divergerer.

b)

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$. Rekken er derfor (absolutt) konvergent for alle a.

d)

Når $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$ vil $|1-a^2| \leq 1$. Forholdstesten vil da gi at rekka konvergerer. Hvis $|a| > \sqrt{2}$ vil $|1 - a^2| > 1$, og samme testen gir at rekka divergerer. Når $a = \sqrt{2}, a = -\sqrt{2}, a = 0$ divergerer rekka på grunn av divergenstesten.

Oppgave 12.4.5

a)

Vi har at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n c_n|}{|a_n|} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{C|a_n|}{|a_n|} = C < \infty,$$

der $|c_n| < C$ for alle n. Da følger det av sammenligningstesten for positive rekker at $\sum_n a_n c_n$ er absolutt konvergent (siden a_n er antatt absolutt konvergent), og dermed konvergent.

b)

Hvis a_n bare er antatt konvergent gjelder resultatet ikke. Dette kan du se for eksempel ved å velge $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $c_n = (-1)^n$.

Oppgave 12.4.6

Vi bruker grensesammenligningstesten på de positive rekkene $|a_n|$ og $\frac{|a_n|}{|1+a_n|}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|/(|1 + a_n|)}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|1 + a_n|} = 1,$$

Hvor vi har brukt at $a_n \to 0$ på grunn av divergenstesten. Dermed konvergerer også $\frac{a_n}{1+a_n}$ absolutt.

Seksjon 12.5

Oppgave 12.5.1

b)

Forholdstesten gir at $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |2x|$. Rekken er defor absolutt konvergent for $|x| < \frac{1}{2}$, divergent for $|x| > \frac{1}{2}$. For $x = \pm\frac{1}{2}$ ser vi fort at rekken divergerer.

d)

Forholdstesten gir at $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = e^{-x}$. For $x > 0$ er derfor rekken absolutt konvergent, for $x < 0$ er den divergent. For $x = 0$ ser vi lett at den er divergent.

f)

Rottesten gir en grenseverdi e^x. For $x < 0$ ser vi derfor at rekken er (absolutt) konvergent, for $x > 0$ er den divergent. For $x = 0$ ser vi lett at rekken er divergent.

Oppgave 12.5.2

a)

Vi ser at $\frac{\sin(nx)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} = M_n$. Siden $\sum M_n$ er konvergent, så konvergerer $\sum_n \sin(nx)n^2$ uniformt på $\mathbb{R}$.

b)

Vi ser at $\left|\frac{x^n}{\sqrt{n^3}}\right| \leq \frac{1}{n^{3/2}} = M_n$ på $[-1,1]$. Siden $\sum M_n$ er konvergent, så konvergerer $\sum_n \frac{x^n}{\sqrt{n^3}}$ uniformt på $[-1,1]$.

c)

Vi ser at $|ne^{-nx}| \leq ne^{-n} = M_n$ på $\mathbb{R}$. Siden $\sum M_n$ er konvergent (forholdstesten), så konvergerer $\sum_n ne^{-nx}$ uniformt på $\mathbb{R}$.

Seksjon 12.6

Oppgave 12.6.1

a)

Forholdstesten gir at rekken konvergerer absolutt for $|x-2| < 1$, og divergerer hvis $|x-2| > 1$. Den divergerer hvis $|x-2| = 1$, slik at konvergensintervallet blir $(1,3)$.

b)

Forholdstesten igjen gir at rekken konvergerer for $|x| < 3$, divergerer for $|x| > 3$. For $|x| = 3$ ser vi fort at rekken divergerer, slik at konvergensintervallet blir $(-3, 3)$.

c)

Forholdstesten gir konvergens for $|2x - 1| < 1$, dvs. for $x \in (0, 1)$. Det er fort gjort å sjekke at rekken divergerer i endepunktene av dette intervallet, slik at konvergensintervallet blir $(0, 1)$.

d)

Forholdstesten gir konvergens for $|x + 1| < 1$, dvs. for $x \in (-2, 0)$. For $x = -2$ ser vi vi får en alternerende rekke, som oppfyller kravene i testen for konvergens av alternerende rekker. For $x = 0$ ser vi fort at rekken divergerer, slik at konvergensintervallet blir $[-2, 0)$.

e)

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{4}|x - 1|.$$

Rekka konvergerer derfor i $(-3, 5)$. Ved sammenligning med rekka $\sum \frac{1}{n^2}$ ser vi at rekka også konvergerer i endepunktene, slik at konvergensområdet blir $[-3, 5]$.

f)

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/(n+1))}{\sin(1/n)} |x| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{(n+1)^2} \cos(1/(n+1))}{-\frac{1}{n^2} \cos(1/n)} = |x|.$$

Vi ser derfor at rekke konvergerer for $|x| < 1$. Rekka konvergerer ikke for $x = 1$, som kan sees ved å sammenligne med rekken $\sum \frac{1}{n}$. Rekka konvergerer betinget for $x = -1$ på grunn av testen for alternerende rekker. Konvergensområdet blir derfor $[-1, 1)$.

g)

Forholdstesten gir

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(n+1)^2 x}{(2n+2)(2n+1)} \right| \to \left| \frac{x}{4} \right|.$$

Vi ser derfor at rekken konvergerer for $|x| < 4$, og divergerer for $|x| > 4$.

For $|x| = 4$ er dat langt ifra opplagt hva som skjer, og vi bør skrive om leddene i rekken på følgende måte for å se hva som skjer:

$$
\begin{aligned}
|a_n| &= \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!} \\
&= \frac{n \times n \times (n-1)(n-1) \times \cdots \times 2 \times 2 \times 1 \times 1}{2n \times (2n-1)(2n-2) \times \cdots \times 2 \times 1} 4^n \\
&= \frac{n(n-1)(n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 \times n(n-1)(n-2) \times \cdots \times 2 \times 1}{2n \times (2n-1)(2n-2) \times \cdots \times 2 \times 1} 2^{2n} \\
&= \frac{2n(2n-2)(2n-4) \times \cdots \times 4 \times 2 \times 2n(2n-2)(2n-4) \times \cdots \times 4 \times 2}{2n \times (2n-1)(2n-2) \times \cdots \times 2 \times 1} \\
&= \frac{2n(2n-2)(2n-4) \times \cdots \times 4 \times 2}{(2n-1)(2n-3) \times \cdots \times 3 \times 1} \\
&= \frac{2n}{2n-1} \frac{2n-2}{2n-3} \cdots \frac{4}{3} \frac{2}{1} \\
&> 1,
\end{aligned}
$$

der den siste ulikhetene følger av at hver av faktorene i produktet er > 1. Derfor er rekken divergent for $|x| = 4$, og konvergensintervallet blir $(-4, 4)$.

h)

$$\lim_{n \to \infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n \to \infty} 7^{1/\sqrt{n}} |2x| = |2x|.$$

Rekka konvergerer derfor i intervallet $(-1/2, 1/2)$. Det er klart at rekka divergerer i endepunktene på grunn av divergenstesten, slik at hele konvergensintervallet også er $(-1/2, 1/2)$.

Oppgave 12.6.3

På $[-1, 1]$ ser vi fort at rekken konvergerer (sammenlign med $\frac{1}{n^2}$). Dermed følger det fra Abels teorem at summen er en kontinuerlig funksjon.

Oppgave 12.6.4

Forholdstesten gir oss at rekken konvergerer for $\frac{|x-1|}{2} < 1$,dvs. for $x \in (-1, 3)$. For $x = -1$ får vi rekken $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, som vi ser fort at er konvergent. Dermed er summefunksjonen en kontinuerlig funksjon på $[-1, 3)$ (Abels teorem igjen) (det er fort gjort å sjekke at rekken divergerer i $x = 3$, slik at vi ikke kan utvide summefunksjonen til en kontinuerlig funksjon med 3 også i definisjonsområdet).

Oppgave 12.6.5

Rekken her er geometrisk. Hvis $|1 - x^2| < 1$ (dvs. $x \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$ får vi en geometrisk rekke, og dsummen blir $\frac{x}{1-(1-x^2)} = \frac{1}{x}$. For $x = 0$ er alle leddene i rekka 0, slik at summen blir 0. Summefunksjonen blir derfor gitt ved

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2}) \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

For $x = \pm\sqrt{2}$ og alle andre x-verdier divergerer rekken. Konvergensområdet er altså $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, og summen er altså 0 hvis $x = 0$, og $\frac{1}{x}$ hvis $x \neq 0$ og $|x| < \sqrt{2}$. Vi ser at summefunksjonen ikke er kontinuerlig i dette tilfellet. Dette kan virke som strider mot Abels teorem. Legg imidlertid merke til at potensrekken ikke har samme form slik den har i Abels teorem.

Oppgave 12.6.7

a)

For at følgene skal konvergere må vi på grunn av divergenstesten ha at $a_n \to 0$. Vi regner ut

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1,$$

og dermed kan vi bruke grensesammenligningstesten til å slå fast at den ene rekka konvergerer hvis og bare hvis den andre gjør det.

b)

Den gitte rekka konvergerer på grunn av a) hvis og bare hvis $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^p}\right)$ gjør det. Denne konvergerer igjen på grunn av a) hvis og bare hvis rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ gjør det. Fra tidligere vet vi fra integraltesten at denne konvergerer hvis og bare hvis $p > 1$.

c)

Vi kan bruke grensesammenligningstesten som i a) til å se at rekka har samme konvergensradius som $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$, og denne ser vi lett at har konvergensradius 1. For $x = 1$ ser vi at rekka divergerer siden $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerer, for $x = -1$ ser vi at rekka konvergerer siden den tilsvarende rekka er alternerende. Konvergensområdet er derfor $[-1, 1)$.

Seksjon 12.7

Oppgave 12.7.1

a)

Vi bruker Setning 12.7.1 og 12.7.3 for $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^{n-1} \\ \int_0^x f(t)dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} x^{n+1}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n \\ F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1}. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x+2)^{n-1}}{n+1} \\ F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-2)^{n+1}}{n(n+1)^2}. \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-4)^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1} (x-4)^n}{n!} = 3f(x) \\ F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (x-4)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-4)^n}{n!} = \frac{1}{3}(f(x)-1). \end{aligned}$$

Oppgave 12.7.2

a)

$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ er en geometrisk rekke som konvergerer for $|x| < 1$. Bruker vi summeformelen for geometriske rekker får vi $\frac{1}{1-x^2}$.

b)

Vi kan skrive

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x}.$$

Integrerer vi begge sider får vi

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} &= \int_0^x \left(\frac{\frac{1}{2}}{1-t} + \frac{\frac{1}{2}}{1+t} \right) dt \\ &= \frac{1}{2}[-\ln|1-t| + \ln|1+t|]_0^x \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right). \end{aligned}$$

Ganger vi med 2 på begge sider får vi

$$\ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1},$$

som var det vi skulle vise.

c)

Sett inn $x = \frac{1}{2}$ i b), da får du ligningen som du skal komme frem til.

Oppgave 12.7.3

a)

Bruk summeformelen for en geometrisk rekke med $r = x^3$, $a_0 = x^2$.

b)

Gang først med -3 på begge sider i ligningen fra a):

$$\frac{-3x^2}{1-x^3} = -3\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+2}.$$

Integrerer vi begge sider fra 0 til x får vi

$$[\ln(1-t^3)]_0^x = \ln(1-x^3) = -3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+3}x^{3n+3} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}x^{3(n+1)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^{3n}.$$

c)

Sett inn $x = -1$ i b):

$$\ln(2) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n+1}}{n}$$

Høyresiden konvergerer (er en alternerende rekke). Siden vi vet fra Abels teorem at summefunksjonen er kontinuerlig, så må summen av rekken bli lik venstresiden. Resultatet er faktisk det samme som det i Eksempel 12.7.4: Dette følger av at $n-1$ er like/odde hvis og bare hvis $3n+1$ er like/odde. Dermed får alle ledd i de to rekkene samme fortegn.

Oppgave 12.7.5

For $m = 1$ sier utsagnet at

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \binom{n}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,$$

som følger direkte fra summeformelen for en geometrisk rekke. Anta at vi har vist at

$$\frac{1}{(1+x)^m} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \binom{m+n-1}{n} x^n.$$

Deriverer vi begge sider får vi

$$\frac{-m}{(1+x)^{m+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n \binom{m+n-1}{n} x^{n-1}.$$

Deler vi med $-m$ på begge sider får vi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1+x)^{m+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{m}\binom{m+n-1}{n}x^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{m}\frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}x^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(m+n-1)!}{(n-1)!m!}x^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(m+n)!}{n!m!}x^{n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\binom{(m+1)+n-1}{n}x^{n}
\end{aligned}$$

Dette viser at påstanden holder også for $m+1$.

Oppgave 12.7.7

a)

Bruk forholdstesten.

b)

$$E'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = E(x).$$

c)

$$\begin{aligned}
E(x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^k y^{n-k}}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{y^l}{l!}\right) \\
&= E(x)E(y).
\end{aligned}$$

d)

Følger ved å bruke c) n ganger (start med $x = y = 1$).

e)

Følger ved å bruke c) n ganger (start med $x = y = \frac{1}{m}$).

f)

$E(p/q) = E((p-1)/q+1/q) = E((p-1)/q)E(1/q) = \cdots = E(1/q)^p = (e^{1/q})^p = e^{p/q}$.

Seksjon 12.8

Oppgave 12.8.1

a)

Taylor-rekken rundt 1 er

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{k!}(x-1)^k.$$

Forholdstesten viser at denne konvergerer for alle x. Hvis $|x| \leq M$ er restleddet begrenset av $\frac{e^M}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}$. Det er klart at vi kan få denne så liten vi vil bare vi velger n stor nok. (eller bruk Setning 12.8.2).

b)

De deriverte av $\sin(x)$ repeterer seg med periode 4: $\sin(x)$, $\cos(x)$, $-\sin(x)$, $-\cos(x)$, $\sin(x)$,.... Det er klart at Taylor-rekken rundt $\pi/4$ blir

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + (x-\pi/4) - \frac{1}{2!}(x-\pi/4)^2 - \frac{1}{3!}(x-\pi/4)^3 + \frac{1}{4!}(x-\pi/4)^4 + \cdots\right)$$

(på grunn av derivasjonsregelen for $\sin(x), \cos(x)$ kommer det alltid to positive ledd etter to negative ledd, og omvendt). Samme konvergenssområde og begrunnelse ellers som for a).

d)

Taylorrekka blir

$$Tf(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k!}{k!}(x-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(x-1)^k.$$

Dette er en geometrisk rekke, som har konvergensområde $(0,2)$ (endepunktene er ikke med på grunn av divergenstesten). Summeformelen for en geometrisk rekke gir summen $\frac{1}{1-(-(x-1)} = \frac{1}{x} = f(x)$, som viser at rekken konvergerer mot funksjonen.

e)

Den deriverte av $\ln(x+1)$ er

$$\frac{1}{x+1} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n.$$

Høyresiden må derfor være Taylor-rekken til $\frac{1}{1+x}$. Integrerer vi fra 0 til x får vi

$$\ln(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

Vet vet derfor at høyresiden her er Taylor-rekken til $\ln(x+1)$ (og har samme konvergensintervall $(-1,1)$ som rekken for $\frac{1}{x+1}$. Konvergensintervallet her blir faktisk $(-1,1]$, siden vi nå har fått konvergens i det ene endepunktet også (alternerende rekke).

Oppgave 12.8.3

a)

Vi vet at $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$, slik at

$$\sin(x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(x^2)2k+1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{4k+2}.$$

b)

Vi har $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, slik at

$$e^{-x^3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^3)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{3k}}{k!}.$$

d)

Siden $f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$ $(n \geq 1)$ får vi

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \\ \ln(1-x^3) &= -\sum_{n\geq 1} \frac{x^{3n}}{n} \end{aligned}$$

(ser her at den andre rekken ikke er alternerende).

e)

Siden $f^{(n)}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n! 2^{2n}}$ $(n \geq 0)$ får vi

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} x^n \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= \sum_{n\geq 0} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} x^{2n}. \end{aligned}$$

f)

Vi har $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, slik at

$$x^2 e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+2}}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{(k-2)!}.$$

g)

Vi vet at $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$, slik at

$$\frac{\sin(x)}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k}.$$

Siden $f(x)$ er definert slik at den er kontinuerlig i 0, så vil rekken over være Taylorrekka til f.

Oppgave 12.8.5

a)

Vi ser først at

$$f^{(1)}(x) = (2x^2 + 2x + 2x + 1)e^{2x} = (2x^2 + 4x + 1)e^{2x}.$$

Vi ser umiddelbart at dette stemmer med induksjonshypotesen for $n = 1$. Anta at vi har vist at

$$f^{(n)}(x) = (2^n x^2 + 2^n(n+1)x + 2^{n-2}n(n+1))e^{2x}.$$

Da blir

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (2^{n+1}x^2 + 2^{n+1}(n+1)x + 2^{n-1}n(n+1) + 2^{n+1}x + 2^n(n+1))e^{2x} \\ &= (2^{n+1}x^2 + 2^{n+1}(n+2)x + 2^{n-1}(n+1)(n+2))e^{2x}, \end{aligned}$$

som viser at induksjonshypotesen er riktig for $n + 1$ også.

b)

Vi ser at $f^{(n)}(0) = 2^{n-2}n(n+1)$. Taylor-rekken blir dermed

$$\sum_{n\geq 1} \frac{2^{n-2}(n+1)}{(n-1)!} x^n.$$

Ved hjelp av forholdstesten ser vi at denne konvergerer for alle x.

c)

Det er lett å se at vi kan få restleddet så lite vi vil ved å velge n stor nok. Dermed vil Taylor-rekken konvergere mot f for alle x. Setter vi inn $x = -1/2$ ser vi at Taylor-rekken blir

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{n+1}{4(n-1)!},$$

som er rekken fra oppgaveteksten. Summen blir dermed $f(-1/2) = (1/4 - 1/2)e^{-1} = -\frac{1}{4e}$.

d)

Vi har

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \\
e^{2x} &= \sum_{n\geq 0} \frac{2^n x^n}{n!} \\
xe^{2x} &= \sum_{n\geq 0} \frac{2^n x^{n+1}}{n!} = \sum_{n\geq 1} \frac{2^{n-1}x^n}{(n-1)!} \\
x^2e^{2x} &= \sum_{n\geq 0} \frac{2^n x^{n+2}}{n!} = \sum_{n\geq 2} \frac{2^{n-2}x^n}{(n-2)!}.
\end{aligned}$$

Legger vi sammen de to siste rekkene ser vi at vi får for $n \geq 2$ (for $n = 1$ er det lett å se at vi får samme bidrag som i Taylor-rekken over)

$$\frac{2^{n-1}x^n}{(n-1)!} + \frac{2^{n-2}x^n}{(n-2)!} = 2^{n-2}\frac{2+(n-1)}{(n-1)!}x^n = 2^{n-2}\frac{n+1}{(n-1)!}x^n,$$

som stemmer med Taylor-rekken over.

Oppgave 12.8.8

a)

Vi bruker forholdstesten:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{\log\sqrt{n+1}}}{\frac{x^n}{\log\sqrt{n}}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{\frac{\log\sqrt{n+1}}{\log\sqrt{n}}}\right| \\
&= \frac{|x|}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\log\sqrt{n+1}}{\log\sqrt{n}}\right|} \\
&= \frac{|x|}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2(n+1)}}{\frac{1}{2n}}\right|} \\
&= |x|.
\end{aligned}$$

Konvergensradien er derfor 1. Rekka konvergerer for $x = -1$ på grunn av testen for alternerende rekker. For $x = 1$ kan vi sammenligne med den divergente rekka

$\sum \frac{1}{n}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\log\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log\sqrt{n}} \\
&= \frac{1}{\log e} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{2}\ln n} \\
&= \frac{1}{2\log e} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} \\
&= \frac{1}{2\log e} \lim_{n\to\infty} n = \infty.
\end{aligned}$$

Det er dermed klart fra grensesammenligningstesten at denne rekka også divergerer for $x = 1$, slik at konvergensområdet er $[-1, 1)$.

b)

Siden potensrekken er lik Taylorrekka til f er $\frac{f^{(310)}(0)}{310!} = \frac{1}{\log\sqrt{310}}$, slik at $f^{(310)}(0) = \frac{310!}{\log\sqrt{310}}$. Vi begrenser så feilen for ledd $N+1, N+2, ...$ slik:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^{N+1}\log\sqrt{N+1}} + \frac{1}{2^{N+2}\log\sqrt{N+2}} + \cdots \\
\leq\ & \frac{1}{\log\sqrt{N+1}}\left(\frac{1}{2^{N+1}} + \frac{1}{2^{N+2}} + \cdots\right) \\
=\ & \frac{1}{2^N \log\sqrt{N+1}} \\
\leq\ & 0.1.
\end{aligned}$$

Det holder derfor å velge N slik at $2^N \log\sqrt{N+1} > 10$. Prøver vi oss frem finner vi at $N = 5$ er den minste slike verdien.

Oppgave 12.8.11

a)

Vi ser ved forholstesten at rekka konvergerer i $(-1, 1)$. Dette er faktisk hele konvergensområdet, sidne vi har divergens i endepunktene på grunn av divergenstesten.

b)

Deriverer vi $h(x)$ får vi $h'(x) = xf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)x^{2n+1}$. Integrerer vi denne fra 0 til x får vi at

$$h(x) - h(0) = h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+2} = x^2 + x^4 + x^6 + \cdots$$

Det er klart at dette er Taylor-rekken til h.

c)

Vi ser at Taylorrekken til h er geomterisk, og at summen blir $h(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$. Vi får videre

$$f(x) = \frac{h'(x)}{x} = \frac{\frac{2x(1-x^2)+2x^3}{(1-x^2)^2}}{x} = \frac{2}{(1-x^2)^2}.$$

Oppgave 12.8.12

a)

Forholdstesten viser at konvergensradien er 1. Rekken er alternerende i endepunktene, slik at konvergensområdet blir $[-1, 1]$.

b)

Kall summen for $s(x)$. Deriverer vi rekka leddvis får vi

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-1} = \frac{x}{1+x^2},$$

der vi har gjenkjent rekka som en geometrisk rekke. Integrerer vi får vi

$$s(x) = \int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

Setter vi inn $x = 0$ på begge sider får vi at $C = 0$, og dermed $s(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

Oppgave 12.8.13

a)

$$\sum_{n \geq 1} n x^n$$

konvergerer når $|x| < 1$ (bruk forholdstesten). Siden rekken divergerer når $|x| = 1$ (divergenstesten), så er konvergensintervallet $(-1, 1)$.

b)

Vi har at

$$\frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}.$$

Integrerer vi begge sider fra 0 til x får vi

$$\int_0^x \frac{S(t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Deriverer vi nå får vi

$$\frac{S(x)}{x} = \frac{1}{(1-x)^2},$$

slik at $S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$. Det eneste problemet som kunne oppstå her er når vi deler med x, siden x kan være 0. Dette er ikke noe problem likevel, siden vi kan bruke det vi vet om at summefunksjonen er en kontinuerlig funksjon, også i 0.

Oppgave 12.8.14

a)

Forholdstesten gir at rekka konvergerer for $|x| < \frac{1}{3}$. Rekka konvergerer for $x = -1$ ved testen for alternerende rekker. Rekka divergerer for $x = 1$ ved sammenligning med den divergente rekka $\sum \frac{1}{n}$.

b)

Vi ganger først med x og får

$$xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^{n+1}}{n+1}.$$

Deriverer vi nå får vi

$$(xS(x))' = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n = \frac{1}{1-3x}.$$

Integrerer vi dette får vi

$$xS(x) = -\frac{1}{3}\ln|1-3x| + C = -\frac{1}{3}\ln(1-3x) + C.$$

Setter vi inn $x = 0$ ser vi at $C = 0$, slik at

$$S(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}\ln(1-3x) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Oppgave 12.8.15

a)

Forholdstesten gir at rekken konvergerer for $|x| < 1$. Siden rekken er alternerende er det klart at konvergensintervallet er $[-1, 1]$.

b)

Vi ganger først med x på begge sider og får

$$xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Deriverer vi begge sider får vi at

$$(xS(x))' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Integrerer vi fra 0 til x får vi

$$xS(x) = \arctan(x),$$

slik at $S(x) = \frac{\arctan(x)}{x}$ for $x \neq 0$. På grunn av kontinuitet av summen av rekka ser vi fort at vi må ha at $S(0) = 1$ (som vi også kunne fått ved å sette inn $x = 0$ i den opprinnelige rekka).

c)

Vi har nå vist at

$$\arctan(1/2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!2^{2n+1}}.$$

Siden denne rekka er alternerende holder det å finne n slik at $|a_{n+1}| = \frac{1}{(2n+3)!2^{2n+3}} \leq 0.01$. Det er lett å se at minste slik n er 1, slik at tilnærmingen blir

$$s_1 = a_0 + a_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6 \times 2^3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{48} = \frac{23}{48}.$$

Dette er ikke helt det samme som svaret i fasiten.

Oppgave 12.8.16

a)

Ved forholdstesten blir konvergensradien 1. Rekka konvergerer i begge endepunktene ved sammenligningstesten på rekka $\sum \frac{1}{n^2}$. derfor blir konvergensområdet $[-1, 1]$. Deriverer vi rekka leddvis to ganger får vi

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n x^{n-2} = \frac{1}{1+x}.$$

b)

Vi integrerer først og får

$$f'(x) = \ln|1+x| + C,$$

og dermed $f'(x) = \ln(1+x)$ (sett inn $x = 0$), der vi kunne ta bort absoluttverditegnet. Vi integrerer så på nytt og bruker delvis integrasjon:

$$\begin{aligned} f(x) &= x\ln(1+x) - \int \frac{x}{x+1} dx \\ &= x\ln(1+x) - x + \ln(x+1) + C \\ &= (x+1)\ln(x+1) - x + C. \end{aligned}$$

Setter vi inn $x = 0$ ser vi at $C = 0$, slik at $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$.

c)

Vi ser at $f(1/2) = 3/2\ln(3/2) - 1/2$. Altså har vi at

$$\ln(3/2) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} f(1/2) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n(n-1)} \right).$$

Rekken til høyre er her alternerende. Hvis vi klarer å finne N slik at

$$|a_{N+1}| = \frac{2}{3} \frac{1}{2^{N+1}(N+1)N} \leq \frac{1}{250},$$

så får vi den nøyaktigheten vi skal ha. Vi må altså velge minste mulige N slik at $2^{N+1}(N+1)N \geq 166.66$. Vi finner fort at dette blir $N = 3$, slik at approksimasjonen blir

$$\begin{aligned}
\ln(3/2) &\approx \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2^2 2} - \frac{1}{2^3 3 \times 2}\right) \\
&= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{48}\right) \\
&= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{5}{48} \\
&= \frac{1}{3} + \frac{5}{72} \\
&= \frac{29}{72} \\
&\approx 0.4028.
\end{aligned}$$

Oppgave 12.8.17

Vi ser på rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}(x-1)^n.$$

Forholdstesten gir at rekken konvergerer når $\frac{|x-1|}{2} < 1$, det vil si når $|x-1| < 2$. Det er klart at rekken divergerer når $|x-1| = 2$ (divergenstesten), slik at konvergensområdet er $(-1, 3)$. La $S(x)$ være summen av rekken. Vi skriver om først:

$$\frac{S(x)}{x-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}(x-1)^{n-1}.$$

Deretter integrerer vi begge sider fra 1 til x:

$$\int_1^x \frac{S(t)}{t-1}dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n} = \frac{x-1}{2(1-\frac{x-1}{2})} = \frac{x-1}{3-x}.$$

Deriverer vi nå får vi

$$\frac{S(x)}{x-1} = \frac{2}{(3-x)^2},$$

slik at $S(x) = \frac{2(x-1)}{(3-x)^2}$.

Oppgave 12.8.18

a)

Ved forholdstesten blir konvergensradien 1, slik at rekka konvergerer i $(-1, 1)$. Rekka konvergerer ikke i endepunktene $x = -1, x = 1$ på grunn av divergenstesten. Dermed blir konvergensområdet $(-1, 1)$.

b)

Kall summen av rekka for $s(x)$. Deriverer vi rekka får vi først

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n.$$

Deler vi med x får vi

$$\frac{s'(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

Integrerer vi får vi

$$\int \frac{s'(x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n + C = \frac{x}{1-x} + C.$$

Deriverer vi får vi

$$\frac{s'(x)}{x} = \frac{1}{(1-x)^2} = -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2},$$

eller $s'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$. Ny integrasjon gir at

$$s(x) = \ln(1-x) + \frac{1}{1-x} + C.$$

Setter vi inn $x = 0$ ser vi at $C = -1$, slik at $s(x) = \ln(1-x) + \frac{1}{1-x} - 1$.

Oppgave 12.8.19

a)

Bruk forholdstesten her.

b)

Vi har at

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{nn!}.$$

Deriverer vi får vi

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}.$$

Ganger vi opp med x får vi

$$xs'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1,$$

eller

$$s'(x) = \frac{e^x - 1}{x}.$$

Integrerer vi denne fra 0 til x får vi ligningen i oppgaveteksten.

c)

Muligens kan dette gjøres på flere måter. Metoden nedenfor bruker ikke noe estimat på restleddet i Taylors formel (siden det ikke er så lett å skrive opp en formel for de deriverte i dette tilfellet). Fra a) og b) vet vi nå at

$$\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt = 1 + \frac{1}{2 \cdot 2!} + \frac{1}{3 \cdot 3!} + \cdots + \frac{1}{n \cdot n!} + \cdots .$$

Vi vil finne ut hvor mange ledd vi trenger på høyresiden for å få til en approksimasjon med en feil $E < 5 \cdot 10^{-6}$. Legg merke til at

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(n+1) \cdot (n+1)!} \\ &= \frac{1}{(n+1) \cdot (n+1)!2} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+1)!2^2} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+1)!2^3} + \cdots \\ &> \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)!} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+3)!} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+4)!} + \cdots \\ &> \frac{1}{(n+2) \cdot (n+2)!} + \frac{1}{(n+3) \cdot (n+3)!} + \frac{1}{(n+4) \cdot (n+4)!} + \cdots \end{aligned}$$

I den første ligningen har vi brukt at $1 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots = 1)$. Dermed har vi at, hvis $s_n(x)$ er summen de n første leddene, så er

$$s(1) - s_n(1) \leq \frac{2}{(n+1) \cdot (n+1)!}.$$

Vi trenger derfor bare velge n slik at

$$\frac{2}{(n+1) \cdot (n+1)!} < 5 \cdot 10^{-6}.$$

Eksperimentering med Matlab gir her at $n = 8$ holder. Summen av de 8 første leddene kan du regne ut med Matlab ved å skrive

```
n = [1:8]; sum(1./(n.*factorial(n)))
```

Vi får da 1.317902, avrundet.

Oppgave 12.8.21

a)

ved forholdstesten ser vi at rekka konvergerer for alle x.

b)

deriverer vi rekka får vi at

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n-2)!} x^n \\ &= x^2 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n-2)!} x^{n-2} \\ &= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} x^n \\ &= x^2 e^{-x}. \end{aligned}$$

som er en rekkeutvikling for $f'(x)$.

c)

Integrerer vi ved delvis integrasjon får vi at

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2e^{-x} + \int 2xe^{-x}dx \\ &= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x}\int 2e^{-x}dx \\ &= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C. \end{aligned}$$

Setter vi inn $x = 0$ og $f(0) = 2$ ser vi at $C = 4$, slik at

$$f(x) = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + 4.$$

Oppgave 12.8.23

Vi bruker forholdstesten:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x}{n+1}\right| = 0.$$

Rekken konvergerer derfor for alle x (selv om $x = 0$ strengt talt ikke gir mening, siden 0^0 ikke gir mening). Kall summen for $S(x)$. Ganger vi med x på begge sider får vi

$$xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = e^x - 1$$

hvor vi kjente igjen potensrekken til e^x. Vi ser derfor at $S(x) = \frac{e^x-1}{x}$ for alle x forskjellig fra 0 (definerer vi $S(0) = 1$ kan denne utvides til en kontinuerlig funksjon i 0).

Oppgave 12.8.25

a)

Bruker vi forholdstesten ser vi at rekken konvergerer når $|x| < 1$. Det er også klart at rekken konvergerer for $x = \pm 1$, slik at konvergensintervallet blir $[-1, 1]$.

b)

Det er klart at $f(x)$ er kontinuerlig og deriverbar for $x \neq 0$. Vi har at

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{1-x} = -1 = f(0),$$

slik at f er kontinuerlig i 0. Vi har også at

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\ln(1-h)}{h}+1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1-h)+h}{h^2} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{1}{1-h}+1}{2h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{2h(1-h)} \\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Derfor er f deriverbar i 0 også, og $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

c)

Sett $S(x)$ til å være summen av rekken i a). Deriverer vi får vi først

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$$

Ganger vi opp med x og deriverer på nytt får vi

$$(xS'(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x},$$

når $x \in (-1,1)$. Integrerer vi får vi

$$xS'(x) = -\ln(1-x),$$

eller $S'(x) = -f(x)$. Integrerer vi begge sider fra 0 til x får vi

$$S(x) = -\int_0^x f(t)dt = 1 - g(x).$$

Der $S(x)$ konvergerer er det derfor klart at $g(x) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ konvergerer. Dermed må Taylor-rekken til g om 0 være gitt ved $1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

d)

Vi ser at $g'(x) = f(x)$ for alle x i konvergensområdet. Det er videre klart at $f(x)$ er negativ for alle x, og dermed er $g(x)$ en strengt avtagende funksjon (den deriverte er mindre enn 0), og har dermed en omvendt funksjon h. Siden $g(0) = 1$ har vi at

$$h'(1) = \frac{1}{g'(0)} = \frac{1}{f(0)} = -1.$$

Utregningen av $h''(1)$ er litt verre, siden vi ikke har lært om sammenhengen mellom de andrederiverte til en funksjon og dens omvendte funksjon. Vi kan imidlertid utlede en slik sammenheng ved å derivere den kjente ligningen

$$h'(x) = \frac{1}{g'(h(x))}$$

ved hjelp av kjerneregelen (se også Oppgave 7.4.8 i læreboka). Da får vi

$$h''(x) = -\frac{g''(h(x))h'(x)}{(g'(h(x)))^2}.$$

Setter vi inn $x = 1$, $h(1) = 0$ får vi

$$h''(1) = -\frac{g''(0)h'(1)}{(g'(0))^2} = -\frac{f'(0)h'(1)}{(f(0))^2} = -\frac{-\frac{1}{2} \times (-1)}{1} = -\frac{1}{2}.$$