1.2.4 i Kalkulus

Vis ved induksjon at $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

P_n : $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$ (ind. hypoteser)

P_1 : VS : $\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$ HS : $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

Derfor er P_1 sann

Induksjonssteget: anta at $P_1, \ldots, P_n$ er sanne. Vis P_{n+1} er sann:

P_{n+1} : $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} \overset{?}{=} \frac{(n+1)}{(n+1)+1} = \frac{n+1}{(n+2)}$

$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(n+1)((n+1)+1)}$

$\overset{P_n}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{(n+2)}$

Derfor er P_{n+1} sann, og det følger at P_k er sann for alle k

1.2.10

$$\begin{aligned}
1 &= 1 = 1^2 \\
1+3 &= 4 = 2^2 \\
1+3+5 &= 9 = 3^2 \\
1+3+5+7 &= 16 = 4^2 \\
1+3+5+7+9 &= 25 = 5^2
\end{aligned}$$

a) P_n: summen av de n første oddetallene er n^2

b) P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 er vist sanne i a)

det n'te oddetallet er $2n-1$

P_n: $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$

Anta at P_n er sann.

P_{n+1}: $\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = (n+1)^2$

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(2i-1)}_{P_n} + \underline{2(n+1)-1} = n^2 + 2(n+1) - 1 = n^2 + 2n + 2 - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Derfor er P_{n+1} sann.

1.2.11 $f(x) = e^{x^2}$ Vis at $f^{(n)}(x) = p_n(x)\, e^{x^2}$ der p_n er et n'te grads polynom. $(n \geq 0)$

$P_n: f^{(n)}(x) = p_n(x)\, e^{x^2}$

P_0: $p_0(x) = 1$. Derfor er P_0 sann

$(e^x)^2 \qquad e^{2x} \qquad (e^{(x^2)})$

anta at P_n er sann

$$P_{n+1}: f^{(n+1)}(x) = \underbrace{p_{n+1}}_{\text{grad } n+1}(x)\, e^{x^2}$$

$$\left(f^{(n)}(x)\right)' \overset{P_n}{=} \left(p_n(x)\, e^{x^2}\right)' = p_n'(x)\, e^{x^2} + p_n(x) \cdot 2x\, e^{x^2} = \Big(\underbrace{\underbrace{p_n'(x)}_{\text{grad } n-1} + \underbrace{2x\, p_n(x)}_{\text{grad } n+1}}_{\text{grad } n+1}\Big)\, e^{x^2}$$

Vi kan nå sette $p_{n+1}(x) = p_n'(x) + 2x\,p_n(x)$, som er et $(n+1)$-gr. polynom.

$\Rightarrow P_{n+1}$ sann.

10.4.4 i kompendiet