2. oktober 2022

MAT-IN 1105

Oblig 7 av 7

Innleveringsfrist

Fredag 28. oktober 2022, klokken 17:00 i Devilry (devilry.ifi.uio.no).

Instruksjoner

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og skanner den, eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Skannede ark må være godt lesbare. Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Husk å inkludere eventuell kode og kjøreeksempel, samt relevante plott og figurer i PDF-filen.

Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan du bli bedt om en muntlig redegjørelse.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) før innleveringsfristen. Vitenskapelig ansatte kan ikke innvilge utsettelser.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Oppgaver

Oppgave 1. I denne oppgave skal vi studere funksjonen

$$f(x) = (1+x)\ln(1+x)\,.$$

a) (5 poeng) Finn Taylorpolynomet av orden 3 til f om punktet $a = 0$.
Løsning: Produktregelen for derivasjon gir oss

$$f'(x) = \ln(1+x) + (1+x)\frac{1}{1+x} = \ln(1+x) + 1,$$

$$f''(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{og} \quad f^{(3)}(x) = -(1+x)^{-2}$$

Dermed får vi

$$T_2 f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{((0)}}{3!}x^3 = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3.$$

b) (5 poeng) Vis ved induksjon at for alle $k \geq 2$ så er

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k (k-2)!(1+x)^{1-k}.$$

Bestem Taylorpolynomet $T_n f(x)$ til f om punktet $a = 0$ og et uttrykk for restleddet $R_n f(x)$.
Løsning: Anta at påstanden holder for en $k \geq 2$ (vi har vist i forrige oppgave at den holder for $k = 2$ og $k = 3$). Da har vi at

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \frac{d}{dx} f^{(k)}(x) = (-1)^k (k-2)!(1-k)(1+x)^{1-(k+1)} \\ &= (-1)^{k+1}((k+1)-2)!(1-x)^{1-(k+1)}, \end{aligned}$$

og resultatet følger ved induksjon.
Dermed har vi at $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ og

$$f^{(k)}(0) = (-1)^k (k-2)! \quad k \geq 2,$$

som gir (for $n \geq 2$)

$$\begin{aligned} T_n f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = x + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k (k-2)!}{k!} x^k \\ &= x + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k(k-1)} x^k. \end{aligned}$$

c) (5 poeng) Finn et naturlig tall N slik at

$$\max_{x \in [0,1]} |f(x) - T_n f(x)| < 10^{-4} \quad \text{for alle} \quad n \geq N.$$

Ved hjelp av restleddsformelen finnes det en en $c \in (0, x)$ slik at

$$R_n f(x) = f(x) - T_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Og fra forrige oppgave vet vi at for alle $c > 0$ og $n \geq 0$, så er

$$|f^{(n+1)}(c)| \leq (n-1)!$$

Det impliserer at

$$\max_{x \in [0,1]} |f(x) - T_n f(x)| = \max_{x \in [0,1]} |R_n f(x)| \leq \frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Vi søker minste $N \geq 0$ slik at

$$\frac{1}{N(N+1)} < 10^{-4} \implies N(N+1) > 10^4 \implies N = 100.$$

Oppgave 2. (5 poeng)

Lag et program som plotter grafene til funksjonen $f(x) = \exp(x)$ og Taylorpolynomet $T_n f(x)$ om punktet $a = 0$ for $n = 1, 2, 3, 4$ over intervallet $[0, 2]$.

Løsning: $T_n e^x = 1 + x + \cdots + \frac{1}{n!} x^n$ er plottet i koden under.

```
# importing the required module
import math
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# x axis values
x = np.linspace(0,2,100)
f = np.exp(x)
plt.plot(x,f)

# Derivatives f^{(k)}(0) of f(x) = exp(x) to order 5
f_k = [1,1,1,1,1]

# computing T_0 f
T_nf = f_k[0]*np.power(x,0)

for n in range(1,5):
    #computing and plotting T_n f = T_{n-1}f + (f^{(n)}(0)/n!) x^n
    T_nf = T_nf + (f_k[n]/math.factorial(n))*np.power(x,n)
    plt.plot(x,T_nf)

# naming the x axis
plt.xlabel(’x’)
# naming the y axis

# giving a title to my graph
```

```
plt.title('Exercise 3')
plt.legend(['exp(x)','T_1f','T_2f', 'T_3f', 'T_4f'])
# function to show the plot
plt.show()
```