UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT-IN 1105 — Programmering, modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Mandag 5. Desember 2022.
Tid for eksamen:	15:00 – 19:00.

Oppgavesettet er på 12 sider.

Vedlegg:	Formelark. Svarark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamenen består av to deler: flervalgsoppgaver (totalt 30 poeng) og tradisjonelle oppgaver (totalt 70 poeng).

Del 1: Flervalgsoppgaver

Denne delen består av 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Svarene dine føres på svararket.

Oppgave 1. Løsningen av differensiallikningen

$$y' + 5y = e^{3x}, \quad y(0) = \frac{1}{4}$$

er gitt ved

A: $y(x) = x^5 + 1/4$
B: $y(x) = e^{3x} - 3/4$
C: $y(x) = \cos(5x)/4$
D: $y(x) = \arctan(x + \pi/4)/4$
✓**E:** $y(x) = (e^{3x} + e^{-5x})/8$

Svar: Her man man først observere at den homogene ligningen har generell løsning $y^h(x) = e^{-5x}$. Hvis vi prøver $y^p(x) = Ae^{3x}$ som partikulær løsning, så må $3A + 5A = 1$, slik at $A = 1/8$. Den generelle løsningen er derfor $y(x) = y^p(x) + y^h(x) = \frac{1}{8}e^{3x} + Ce^{-5x}$. Bruker vi initialbetingelsen får vi at $\frac{1}{8} + C = \frac{1}{4}$, slik at $C = \frac{1}{8}$. Dette gir $y(x) = (e^{3x} + e^{-5x})/8$.
Oppgaven kan også løses med metoden for integrerende faktor (se seksjon 10.1 i Kalkulus). Multipliserer vi med e^{5x} på begge sider får vi

$$(ye^{5x})' = e^{8x}.$$

(Fortsettes på side 2.)

Integrasjon gir

$$y(x) = \frac{e^{3x}}{8} + Ce^{-5x}$$

og $y(0) = 1/4 \implies C = 1/8$. Løsningen blir igjen $y(x) = (e^{3x} + e^{-5x})/8$.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 2. Vi ønsker å finne en tilnærming til nullpunktet til funksjonen $f(x) = e^{2x} - 2$. Hvis vi starter med $a_0 = 0$ og $b_0 = 1$ og itererer to steg med halveringsmetoden, så er midtpunktet $m_2 = (a_2 + b_2)/2$ lik

A: $1/8$

B: $1/3$

C: $5/8$

D: 1

✓**E:** $3/8$

Svar: Med $m_0 = 1/2$ impliserer $f(a_0)f(m_0) < 0$ at $b_1 = m_0 = 1/2$ og $a_1 = a_0 = 0$.
Med $m_1 = 1/4$ gir $f(m_1) = e^{1/2} - 2 = \sqrt{2.71828\ldots} - 2 < 0$ og dermed $f(b_1)f(m_1) < 0$, og at $a_2 = m_1 = 1/4$, $b_2 = b_1 = 1/2$.
Løsningen er $m_2 = (a_2 + b_2)/2 = 3/8$.

Oppgave 3. Taylorpolynomet av grad 2 til funksjonen

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$$

om punktet $a = 1$ er gitt ved

A: $1 + 2x + 3x^2$

B: $1 + x + x^2/2$

C: $1 - (x-1) + (x-1)^2/2$

✓**D:** $10 + 20(x-1) + 15(x-1)^2$

E: $1 - x^2$

Svar: Vi har at

$$T_2 f(x; a = 1) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2} f''(1)(x-1)^2,$$

hvor $f(1) = 10$, $f'(1) = 20$, $f''(1) = 30$. Løsningen er

$$T_2 f(x) = 10 + 20(x-1) + 15(x-1)^2.$$

Oppgave 4. For andregradspolynomet $p(x)$ som tilfredsstiller interpolasjonsbetingelsene $p(0) = 1$, $p(2) = 4$, og $p(3) = 1$ er verdien til $p'(1)$ lik

✓**A:** $p'(1) = 3/2$

B: $p'(1) = 1$

C: $p'(1) = -1/2$

D: $p'(1) = -1$

E: $p'(1) = 1/3$

Svar: Vi bestemmer først polynomet. Newtonformen til p er

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x(x-2)$$

Betingelsen $p(0) = 1$ gir $c_0 = 1$. Betingelsen $p(2) = 4$ gir $c_0 + 2c_1 = 4$, og da er $c_1 = 3/2$. Betingelsen $p(3) = 1$ gir $c_0 + 3c_1 + 3c_2 = 1$, og da er $c_2 = -c_1 = -3/2$. Dermed er

$$p(x) = 1 + 3x/2 - 3x(x-2)/2 = 1 + 9x/2 - 3x^2/2 \quad \text{og} \quad p'(x) = 9/2 - 3x,$$

(Fortsettes på side 4.)

som gir løsningen $p'(1) = 3/2$.

Man kan også løse denne oppgaven uten å bruke Newtonformen. Skriver vi polynomet på formen $p(x) = ax^2 + bx + c$ så gir $p(0) = 1$ at $c = 1$. Fra de to andre punktene får vi så at

$$\begin{aligned} 3 &= 4a + 2b \\ 0 &= 9a + 3b \end{aligned}$$

Setter vi inn $b = -3a$ i den første ligningen får vi at $3 = 4a - 6a = -2a$, slik at $a = -3/2$, og $b = 9/2$. Det følger at $p(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x + 1$, slik at $p'(x) = -3x + \frac{9}{2}$, slik at $p'(1) = 3/2$

Oppgave 5. Vi lager en tilnærming til integralet

$$\int_0^3 \frac{1}{1+x^2} dx$$

ved å bruke trapesmetoden med tre delintervaller (steglendge $h = 1$). Dette gir verdien

A: 7/3

B: 13/5

✓**C:** 5/4

D: 11/5

E: 3/2

Svar: Vi har delepunktene $x_k = k$ for $k = 0, 1, 2, 3$. For integralet over med integranden $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$ gir trapesregelen

$$\begin{aligned} I_{trap}(h) &= h\left(\frac{f(0) + f(3)}{2} + f(1) + f(2)\right) \\ &= \frac{1 + 1/10}{2} + 1/2 + 1/5 \\ &= \frac{11}{20} + \frac{10}{20} + \frac{4}{20} = \frac{25}{20} = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 6. Taylorpolynomet av grad 3 av funksjonen

$$f(x) = e^{\sin(x)-x}$$

om punktet $a = 0$ er lik

A: $1 + (\sin(x) - x) + \frac{1}{2}(\sin(x) - x)^2 + \frac{1}{6}(\sin(x) - x)^3$
B: $1 + x + x^2/2 + x^3/6$
C: $1 + x^2 - x^3/6$
✓**D:** $1 - x^3/6$
E: 1

Svar: Kjerneregelen gir

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\cos x - 1)e^{\sin(x)-x} \\ f''(x) &= (-\sin(x) + (\cos(x) - 1)^2)e^{\sin(x)-x} \\ f'''(x) &= \big(-\cos(x) - 3\sin(x)(\cos(x) - 1) + (\cos(x) - 1)^3\big)e^{\sin(x)-x}. \end{aligned}$$

Det følger at $f(0) = 1$, $f'(0) = f''(0) = 0$, og $f'''(0) = -1$, slik at Taylorpolynomet blir

$$T_3 f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)x^2/2 + f'''(0)x^3/6 = 1 - x^3/6.$$

Oppgave 7. Løsningen til differensiallikningen

$$y'' - y' - 6y = 3x - \frac{3}{2}, \qquad y(0) = 1/3, \quad y'(0) = 2$$

er lik

✓**A:** $y(x) = (e^{3x} - e^{-2x})/2 + 1/3 - x/2$
B: $y(x) = 2x + 1/3$
C: $y(x) = e^{3x} - e^{-2x} + 1/3 + x$
D: $y(x) = e^{-2x} - 2/3 + 4x$
E: $y(x) = \cos(x) - e^{-2x} + 1/3$

Svar: Den karakteristiske likningen

$$r^2 - r - 6 = 0$$

har røtter $r = -2$ og $r = 3$. Den generelle løsningen til den homogene likningen er dermed

$$y_h(x) = Ae^{-2x} + Be^{3x}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Siden 0 ikke er en rot til den karakteristiske likningen finnes en partikulærløsning er på formen $y_p(x) = c_0 + c_1 x$ hvor c_0 og c_1 må bestemmes. Vi ønsker at

$$y_p'' - y_p' - 6y_p = -c_1 - 6c_0 - 6c_1 x = 3x + \frac{3}{2}$$

som gir $c_1 = -1/2$ og $c_0 = 1/3$ og $y_p = 1/3 - x/2$. Den generelle løsningen til den inhomogene likningen er

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{-2x} + Be^{3x} + 1/3 - x/2.$$

(Fortsettes på side 6.)

Konstantene bestemmes fra initialbetingelsene. Observer først at

$$y'(x) = -2Ae^{-2x} + 3Be^{3x} - 1/2$$

Initialbetingelsene gir følgende likninger for A og B:

$$\begin{aligned} 1/3 &= y(0) = A + B + 1/3 \\ 2 &= y'(0) = -2A + 3B - 1/2 \end{aligned}$$

Første likning gir $B = -A$, og setter vi inn i andre, får vi

$$-5A = 5/2 \implies A = -1/2 \quad \text{og} \quad B = 1/2$$

Løsningen er

$$y(x) = \frac{e^{3x} - e^{-2x}}{2} + \frac{1}{3} - \frac{x}{2}\,.$$

Oppgave 8. Omskriving av annenordens differensiallikningen

$$x'' + (t + x^2)x' - e^{2t}x = \sin(t)$$

til et system av førsteordens differensiallikninger gir

A: $x' = y + \sin(t)$ og $y' = -(t + x^2)y + e^{2t}x$

✓**B:** $x' = y$ og $y' = -(t + x^2)y + e^{2t}x + \sin(t)$

C: $x' = y$ og $y' = y$

D: $x' = y - ty + e^{2t}x$ og $y' = x^2y + \sin(t)$

E: $x' = y$ og $y' = (t + x^2)y - e^{2t}x$

Svar: Vi introduserer funksjonen $y = x'$. Får da

$$y' = (x')' = x'' = -(t + x^2)x' + e^{2t}x + \sin(t) = -(t + x^2)y + e^{2t}x + \sin(t).$$

Det gir systemet

$$x' = y, \quad y' = -(t + x^2)y + e^{2t}x + \sin(t).$$

(Fortsettes på side 7.)

Oppgave 9. Den numeriske løsningen av

$$(1+t)x' = xe^t \quad x(0) = 1$$

ved tiden $t = 1$ som vi får ved å ta ett steg med Eulers midtpunktmetode med steglengde $h = 1$ er lik

A: $x_1 = 2$

B: $x_1 = 1 + h + h^2/2$

✓**C:** $x_1 = 1 + e^{1/2}$

D: $x_1 = (1 + e)/2$

E: $x_1 = 1 + e$

Vi minner om at Eulers midtpunktmetode for ligningen $x' = f(t,x)$ med $x(t_0) = x_0$ og steglengde h er gitt ved

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_{k+1/2}, x_{k+1/2})$$

der

$$x_{k+1/2} = x_k + hf(t_k, x_k)/2, \qquad t_{k+1/2} = t_k + h/2.$$

Svar: Omskriving gir

$$x' = \frac{e^t x}{(1+t)} =: f(t,x)$$

og Eulers midtpunktmetode er gitt ved

$$x_{1/2} = x_0 + (h/2)f(t_0, x_0), \quad x_1 = x_0 + hf(t_{1/2}, x_{1/2})$$

hvor $x_0 = 1$, $t_0 = 0$ og $t_{1/2} = h/2$. Det gir

$$x_{1/2} = 1 + (h/2) \times \frac{1}{1+0} = \frac{3}{2}$$

og

$$x_1 = x_0 + hf(t_{1/2}, x_{1/2}) = 1 + \frac{(3/2)e^{1/2}}{1+1/2} = 1 + e^{1/2}.$$

Oppgave 10. La funksjonen $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ være slik at dens deriverte tilfredsstiller

$$\max_{x\in[-1,1]} |f^{(n)}(x)| \leq n^2 \qquad \text{for alle} \quad n \geq 1.$$

La $T_n f(x)$ være Taylorpolynomet til f av grad n om punktet $a = 0$.
Vi søker minste $n \geq 0$ slik at vi kan være sikre på at

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - T_n f(x)| < 10^{-3}.$$

Svaret er

A: $n = 2$

B: $n = 4$

C: $n = 6$

✓**D:** $n = 8$

E: $n = 10$

(Fortsettes på side 8.)

Svar: Restleddsformelen sier at

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - T_n f(x)| \le \frac{1}{(n+1)!} \max_{x\in[-1,1]} |f^{(n+1)}(x)||x-a|^{n+1} \le \frac{n+1}{n!}.$$

Søker minste n slik at

$$\frac{n!}{n+1} > 1000 \implies n = 8$$

siden $7!/8 = 630$ og $8!/9 = 4480$.

(Fortsettes på side 9.)

Del 2

Denne delen består av 7 delspørsmål. Hvert delspørsmål teller 10 poeng. Du må begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige.

Oppgave 1. Vis ved induksjon at

$$2^{n+1} > n^2, \text{ for alle } n \geq 3.$$

Svar: Vi lar P_n være påstanden $2^{n+1} > n^2$. For $n = 3$ sier påstanden at $16 > 9$, som er sant. Anta nå at vi har vist at $P_3, P_4, ..., P_n$ er sanne, der $n \geq 3$. Vi får da at

$$2^{(n+1)+1} = 2 \cdot 2^{n+1} > 2n^2 = 2\frac{n^2}{(n+1)^2}(n+1)^2 > (n+1)^2,$$

der vi brukte at $2\frac{n^2}{(n+1)^2} > 1$ (dette kan skrives om til $\sqrt{2} > 1 + 1/n$, som opplagt holder for $n \geq 3$). Det følger at P_{n+1} også er sann. Dermed er P_n sann for alle n.

Oppgave 2. I denne oppgaven skal vi programmere sekantmetoden. Vi minner om at denne finner verdien for neste iterasjon fra de to foregående ved hjelp av formelen

$$x_i = x_{i-1} - \frac{x_{i-1} - x_{i-2}}{f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})} f(x_{i-1}).$$

a) Skriv en funksjon `secant(f, x0, x1, N)` i Python som tar funksjonen f, startpunkter x_0 og x_1, og N som parametre, og som kjører N iterasjoner av sekantmetoden. Funksjonen skal returnere den siste verdien for x_n som ble regnet ut.

Svar: Koden under løser begge programmeringsoppgavene.

```python
from math import sqrt

def secant(f, x0, x1, N):
    xpp = x0
    xp = x1
    for k in range(N):
        x = xp - ((xp-xpp)/(f(xp)-f(xpp)))*f(xp)
        xpp = xp
        xp = x
    return xp

def f(x):
    return x**3 - 8

def test_secant():
    x = secant(f, 3, 2.5, 8)
    assert abs(x - 2) <= 1E-8 , 'error, last estimate is %s' % x
```

(Fortsettes på side 10.)

```python
if __name__ == '__main__':
    test_secant()
```

b) Skriv en testfunksjon som kjører `secant` (som du programmerte i forrige oppgave) på funksjonen $f(x) = x^3 - 8$, med startverdier $x_0 = 3$ og $x_1 = 2.5$, og med 8 iterasjoner. Testfunksjonen skal feile hvis `abs(x - 2)>1E-8`, der `x` er estimatet som ble returnert fra `secant`. Med andre ord, testfunksjonen sjekker om sekantmetoden finner verdier nær nullpunktet $x = 2$. Testfunksjonen skal følge standard konvensjon for slike funksjoner (spesielt skal den ha navn på formen `test_*()`, og gjøre testen ved hjelp av et `assert`-statement).

Oppgave 3. I denne oppgaven skal vi se på en ny metode for numerisk derivasjon. Vi ser bort fra avrundingsfeil. Vi er gitt et generelt tredjegradspolynom $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Vis at, for alle $h > 0$, så er

$$f'(0) - \frac{-3f(0) + 4f(h) - f(2h)}{2h} = 2a_3h^2,$$

Hva kan du si om denne tilnærmingen til $f'(0)$ når f er et andregradspolynom?

Svar: Med $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ får vi

$$\begin{aligned}
&\frac{-3f(0) + 4f(h) - f(2h)}{2h} \\
&= \frac{-3a_0 + 4(a_3h^3 + a_2h^2 + a_1h + a_0) - (8a_3h^3 + 4a_2h^2 + 2a_1h + a_0)}{2h} \\
&= \frac{-4a_3h^3 + 2a_1h}{2h} = -2a_3h^2n + a_1 = -2a_3h^2 + f'(0).
\end{aligned}$$

der h^2-leddene, og konstantleddene i telleren, kansellerte. Resultatet følger ved å isolere $2a_3h^2$ på en side.

Hvis f er et andregradspolynom så er $a_3 = 0$, og da sier denne formelen at tilnærmingen er eksakt:

$$f'(0) = \frac{-3f(0) + 4f(h) - f(2h)}{2h}.$$

Man kan også løse oppgaven ved å sjekke at formelen er riktig for $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, og $f(x) = x^3$, og forklare at den da også må stemme for alle tredjegradspolynomer på grunn av linearitet:

- Verdien for $(-3f(0)+4f(h)-f(2h))/2h$ for disse fire blir $0, 1, 0, -2h^2$, respektive.
- Verdien for $f'(0)$ for disse fire blir $0, 1, 0, 0$, respektive

Differensene mellom disse blir $0, 0, 0, 2h^2$, som blir $2a_3h^2$, siden her er verdiene for a_3 $0, 0, 0, 1$.

Man kan også løse oppgaven ved å bruke Taylorpolynomer. Taylorutviklingen av grad 2 til f om 0 med restledd gir (innsatt $x = h$ og $x = 2h$)

$$\begin{aligned}
f(h) &= f(0) + f'(0)h + f''(0)h^2/2 + R_2f(h) \\
f(2h) &= f(0) + 2f'(0)h + 2f''(0)h^2 + R_2f(2h)
\end{aligned}$$

(Fortsettes på side 11.)

Restleddformelen gir $R_2f(h) = \frac{f'''(c)}{3!}h^3$, der c er et tall mellom 0 og h. Siden $f'''(x) = 6a_3$ for alle x, så har vi at $R_2f(h) = a_3h^3$, og også $R_2f(2h) = 8a_3h^3$. Ligningene over kan derfor skrives

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + f''(0)h^2/2 + a_3h^3$$
$$f(2h) = f(0) + 2f'(0)h + 2f''(0)h^2 + 8a_3h^3$$

Vi kan her eliminere $f''(0)$ ved å gange den første ligningen med 4, og trekke ligningene fra hverandre:

$$4f(h) - f(2h) = 3f(0) + 2f'(0)h - 4a_3h^3.$$

Dette gir

$$f'(0) - \frac{-3f(0) + 4f(h) - f(2h)}{2h} = 2a_3h^2.$$

Resultatet følger nå ved å ta absoluttverdi.

Oppgave 4. Vi skal se på funksjonen $f(x) = 3 + 2x - x^2 + x^3$. Bestem det unike interpolasjonspolynomet av grad ≤ 2 som tilfredsstiller

$$p(-1) = f(-1), \quad p(0) = f(0) \quad \text{og} \quad p(2) = f(2),$$

Svar: Newtonformen til polynomet er

$$p(x) = c_0 + c_1(x+1) + c_2(x+1)x.$$

Rekursiv løsing gir

$$p(-1) = c_0 \quad \text{og} \quad p(-1) = f(-1) = -1 \implies c_0 = -1,$$
$$p(0) = c_0 + c_1 \quad \text{og} \quad p(0) = f(0) = 3 \implies c_0 + c_1 = 3 \implies c_1 = 4.$$
$$p(2) = c_0 + 3c_1 + 6c_2 \quad \text{og} \quad p(2) = f(2) = 11 \implies c_0 + 3c_1 + 6c_2 = 11 \implies c_2 = 0.$$

Løsningen er

$$p(x) = -1 + 4(x+1)$$

Oppgave 5. Vi skal se på differensiallikningen

$$x' = \frac{x}{1+4t^2} \qquad t \geq 0, \quad \text{med initialbetingelsen} \quad x(0) = 1.$$

a) Finn løsningen til differensiallikningen.

Svar: likningen er separabel og vi skriver den om til

$$\frac{1}{x}x' = \frac{1}{1+4t^2}.$$

Vi integrerer begge sider

$$\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{1}{1+4t^2}dt,$$

og får

$$\ln|x| = \frac{\arctan(2t)}{2} + C \implies |x| = e^{\arctan(2t)/2+C} \implies x(t) = De^{\arctan(2t)/2},$$

hvor konstanten $D = \pm e^C$ bestemmes fra initialbetingelsen

$$1 = x(0) = De^{\arctan(0)/2} = De^0 \implies D = 1.$$

Løsningen er

$$x(t) = e^{\arctan(2t)/2}.$$

(Fortsettes på side 12.)

b) Det kan vises at $x(1/2) = e^{\pi/8} \approx 1.48097$ for den eksakte løsningen til differensiallikningen.
Finn en tilnærming til løsningen ved tiden $t = 1/2$ ved å ta to steg med Eulers metode med steglengden $h = 1/4$. Hvor stor er approksimasjonsfeilen

$$|x_2 - x(1/2)| \text{ ?}$$

(x_2 betegner den numeriske løsningen ved $t = 1/2$).
Svar: Eulers metode er

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k),$$

hvor $f(t, x) = x/(1 + 4t^2)$, $t_k = kh$ og $x_0 = 1$. Det gir

$$x_1 = 1 + \frac{1}{4} \times \frac{x_0}{1+0} = 5/4,$$

og

$$x_2 = x_1 + \frac{1}{4} \times \frac{x_1}{1 + 4t_1^2} = \frac{5}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{5/4}{5/4} = \frac{3}{2}.$$

Approksimasjonsfeilen er

$$|x_2 - x(1/2)| \approx |1.5 - 1.480973| \approx 0.019$$

Lykke til!