i Viktig informasjon

MAT-IN1105 - Programmering, modellering og beregninger
Fredag 15. desember 2017
Kl.09:00-13:00 (4 timer)
Tillatte hjelpemiddel: Formelsamling (deles ut på eksamen), Gyldig kalkulator

I dette oppgavesettet har du mulighet til å svare med digital håndtegning (oppgave 2.1, 2.2 og 2.5). Du bruker skisseark du får utdelt. Det er anledning til å bruke flere ark per oppgave. Se instruksjon for utfylling av skisseark på pult. Det er IKKE anledning til å bruke digital håndtegning på andre oppgaver enn oppgave 2.1, 2.2 og 2.5. Det blir IKKE gitt ekstratid for å fylle ut informasjonsboksene på skisseark (engangskoder, kand.nr. o.l.).

Den første delen av eksamen består av 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen består av tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. Den totale poengsummen er altså maksimalt 100 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige!

1.1 Taylorrekker

Hva er Taylor-polynomet av grad 3 om $a = 1$ for funksjonen $f(x) = x^3$?
Velg ett alternativ

- $x - 1$
- $1 + 3(x-1)$
- $1 + 2(x-1)$
- $1 - (x-1)^2$
- 1

Maks poeng: 3

1.2 Taylorrekker

Hva er Taylor-polynomet av grad 3 om $a = 1$ for funksjonen $f(x) = \sin((2(x-1))$?
Velg ett alternativ

- $2(x-1) + \frac{1}{3}(x-1)^3$
- $(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3$
- $(x-1) - \frac{8}{3}(x-1)^3$
- $\frac{8}{3}(x-1)^3$
- $2(x-1) - \frac{4}{3}(x-1)^3$

Maks poeng: 3

1.3 Taylorrekker

Hva er Taylor-polynomet av grad 2 om $a = 0$ for funksjonen $f(x) = e^{\sin x}$?

Velg ett alternativ

- 1
- $1 + x + \frac{1}{2}x^2$
- $1 + x^2$
- $1 + \frac{1}{2}x$
- $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2$

Maks poeng: 3

1.4 Differensialligninger

Løsningen av differensialligningen

$$y'' + 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

er gitt ved

Velg ett alternativ

- $y(x) = e^{-3x} - e^{3x}$
- $y(x) = xe^{-3x}$
- $y(x) = e^{-3x} + \frac{1}{2}xe^{-3x}$
- $y(x) = xe^{3x}$
- $y(x) = -3xe^{-3x}$

Maks poeng: 3

1.5 Differensialligninger

En løsning av differensialligningen $y' - (1 + 2x)y = 1 + 2x$ er

Velg ett alternativ

- $e^{x+x^2} - 1$
- $\ln(1 + 2x)$
- e^{x+x^2}
- $e^{-x-x^2} + 1$
- $e^{x+x^2} + 1$

Maks poeng: 3

1.6 Interpolasjon

Tredjegradspolynomet $p_3(x)$ som interpolerer funksjonen $f(x) = x^2 + 3$ i punktene $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ og $x = 3$ har i $x = -1$ verdien

Velg ett alternativ

- $p_3(-1) = 4$
- $p_3(-1) = 2$
- $p_3(-1) = 1$
- $p_3(-1) = 0$
- $p_3(-1) = 3$

Maks poeng: 3

1.7 Nullpunktsmetoder

Vi bruker halveringsmetoden på intervallet $[-1, 6]$ til å finne et nullpunkt til funksjonen
$f(x) = (x + 1/2)(x - 1/2)(x - 1)(x - 3)(x - 4)$.
Metoden vil da konvergere mot

Velg ett alternativ

- $1/2$
- 4
- 3
- 1
- $-1/2$

Maks poeng: 3

1.8 Numerisk derivasjon

Tilnærmingen til den deriverte til f i punktet a gitt ved
$f'(a) \approx \big(f(a+h) - f(a-h)\big)/(2h)$
er eksakt for

Velg ett alternativ

- Alle lineære funksjoner, men ikke for alle polynomer av grad ≤ 2.
- Alle polynomer av grad ≤ 4, men ikke for alle polynomer av grad ≤ 5
- Alle polynomer av grad ≤ 2, men ikke for alle polynomer av grad ≤ 3
- Alle polynomer av grad ≤ 3, men ikke for alle polynomer av grad ≤ 4
- Alle konstante funksjoner, men ikke for alle lineære funksjoner

---

Maks poeng: 3

1.9 Numerisk integrasjon

Hvis vi bruker trapesmetoden med fire delintervaller til å regne ut en tilnærming til integralet $\int_0^2 x^3 dx$ får vi

Velg ett alternativ

- $15/4$
- 9/2
- $31/8$
- 4
- $17/4$

Maks poeng: 3

1.10 Systemer av diffensialligninger

Differensialligningen $x'' + te^{x'+t} = x$, med initialbetingelser $x(1) = 1$, $x'(1) = 0$ skal skrives som et system av førsteordens differensialligninger. Hvilket system er riktig?

Velg ett alternativ

- $x_1' = x_2, \quad x_2' = -te^{x_2+t} + x_1, \quad x_1(1) = 0, \quad x_2(1) = 1$
- $x_1' = x_2, \quad x_2' = -te^{x_2+t} + x_1, \quad x_1(1) = 1, \quad x_2(1) = 0$
- $x_1' = -te^{x_2+t} + x_1, \quad x_2' = x_1, \quad x_1(1) = 1, \quad x_2(1) = 0$
- $x_1' = x_2, \quad x_2' = -te^{x_1+t} + x_2, \quad x_1(1) = 1, \quad x_2(1) = 0$
- $x_1' = x_2, \quad x_2' = te^{x_2+t} + x_1, \quad x_1(1) = 1, \quad x_2(1) = 0$

Maks poeng: 3

i Viktig informasjon

Husk at i denne delen må alle svar begrunnes! Og ikke glem å besvare alle delspørsmålene i hver deloppgave.

2.1 Induksjon

I denne oppgaven skal du svare med digital håndtegning. Bruk eget skisseark (utdelt). Se instruksjon for utfylling av skisseark på pult.

Bruk induksjon på n til å vise at $1 + nx \leq (1+x)^n$ for alle $n \geq 0$ og $x \geq -1$.
Hint: Start med å skrive $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x)$.

Maks poeng: 10

2.2 Midtpunktsmetoden og Taylorrekker

I denne oppgaven skal du svare med digital håndtegning. Bruk eget skisseark (utdelt). Se instruksjon for utfylling av skisseark på pult.

I denne oppgaven skal vi tilnærme integralet
$\int_0^\pi \sin x \, dx$,
som enkelt kan beregnes eksakt til verdien 2.

a) Bruk midtpunktmetoden med fire delintervaller til å tilnærme integralet og skriv ned hvor stor feilen blir (sammenlignet med eksakt verdi). En øvre grense for absolutt-feilen i midtpunktsmetoden på intervallet $[a, b]$ er
$(b-a)\frac{h^2}{24} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.
Bruk dette uttrykket til å finne ut hvor mange delintervaller som er tilstrekkelig for å sikre at feilen blir mindre enn 10^{-2}.

b) Alternativt kan integralet tilnærmes ved å erstatte $\sin x$ med sitt Taylor-polynom av grad n om midtpunktet $a = \pi/2$, det vil si tilnærmingen
$\int_0^\pi \sin x \, dx \approx \int_0^\pi T_n \sin x \, dx$.
Bruk restleddet i Taylors formel til å vise at den absolutte feilen blir mindre enn 10^{-2} dersom $n \geq 5$. Regn ut integralet $\int_0^\pi T_5 \sin x \, dx$ analytisk, og finn den faktiske feilen du får med denne metoden.

Maks poeng: 20

2.3 Programmering

Vi minner om at den symmetriske Newton-kvotienten er definert ved
$\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$
og gir en tilnærming til $f'(a)$.
Skriv en funksjon **symm_newton()** som regner ut den symmetriske Newton-kvotienten for funksjonen $f(x) = e^x$ og $a = 1$, og der h løper gjennom verdiene 10^{-1}, 10^{-2},...,10^{-15} i en for-løkke. Funksjonen skal returnere den verdien av den symmetriske Newton-kvotienten som gir minst avvik fra $f'(a)$.
Skriv ditt svar her...

Maks poeng: 10

2.4 Programmering

Skriv en testfunksjon som kaller funksjonen **symm_newton()**, og sjekker om den returnerte verdien avviker fra $f'(a)$ med mindre enn 10^{-3}. Testfunksjonen skal følge standard konvensjon for slike funksjoner (spesielt skal den ha navn på formen **test_*(),** og gjøre testen ved hjelp av en assert).

Skriv ditt svar her...

```
1
```

Maks poeng: 10

2.5 Differensialligninger

I denne oppgaven skal du svare med digital håndtegning. Bruk eget skisseark (utdelt). Se instruksjon for utfylling av skisseark på pult.

a) En sylinderformet vanntank med tverrsnitt 1 kvadratmeter har ved tiden t en vannhøyde på $y(t)$ meter, slik at volumet vann i tanken ved tiden t kan skrives som $y(t)$ kubikkmeter. Vannhøyden ved tiden $t = 0$ er lik 1 meter. Tanken lekker vann ut av et hull med tverrsnitt a som sitter nederst. Vannets hastighet ut av hullet er på $\sqrt{2gy(t)}$ meter per sekund, der g er en konstant (gravitasjonskonstanten).

Forklar først at endring av volumet per tidsenhet kan skrives som $y'(t)$ og deretter at vannhøyden $y(t)$ tilfredstiller en differensialligning på formen

$$y'(t) = -K\sqrt{y(t)}, \quad y(0) = 1,$$

der $K = a\sqrt{2g}$.

Løs differensiallikningen analytisk og finn et uttrykk for hvor lang tid det tar før tanken er tom.

b) Anta at $K = 10^{-2}$. Bruk to steg med henholdsvis Eulers metode og Eulers midtpunktsmetode til å regne ut tilnærminger til $y(200)$.

Vi minner om at Eulers midtpunktmetode for ligningen $x' = f(t,x)$ med $x(t_0) = x_0$ og steglengde h er gitt ved

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_{k+1/2}, x_{k+1/2})$$

der

$$x_{k+1/2} = x_k + hf(t_k, x_k)/2, \qquad t_{k+1/2} = t_k + h/2.$$

Maks poeng: 20