i Viktig informasjon

MAT-IN1105 - Modellering og beregninger
Mandag 10. desember 2018
Kl.09:00-13:00 (4 timer)
Tillatte hjelpemiddel: Formelsamling (deles ut på eksamen), Gyldig kalkulator.

I dette oppgavesettet har du mulighet til å svare med digital håndtegning (oppgave 2.1, 2.2 og 2.5). Du bruker skisseark du får utdelt. Det er anledning til å bruke flere ark per oppgave. Se instruksjon for utfylling av skisseark på pult. Det er IKKE anledning til å bruke digital håndtegning på andre oppgaver enn oppgave 2.1, 2.2 og 2.5. Det blir IKKE gitt ekstratid for å fylle ut informasjonsboksene på skisseark (engangskoder, kand.nr. o.l.).

Den første delen av eksamen består av 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen består av tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. Den totale poengsummen er altså maksimalt 100 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige!

1.1 Taylorrekker

Hva er Taylor-polynomet av grad 2 om $a = 3$ for funksjonen $f(x) = 3$?
Velg ett alternativ

- $3(x-2)$
- Taylorpolynomet eksisterer ikke for denne funksjonen
- $3 + 3(x-3) + 6(x-3)^2$
- $3 + 3(x-3)$
- 3

Maks poeng: 3

1.2 Taylorrekker

Hva er Taylor-polynomet av grad 3 om $a = 0$ for funksjonen $f(x) = \sin(2x + \pi/2)$?
Velg ett alternativ

- $1 - x + 2x^2 - 4x^3/3$
- $2x - 4x^3/3$
- $1 - 2x^2$
- $2x$
- $1 - x^2/2$

Maks poeng: 3

1.3 Taylorrekker

Hva er Taylor-polynomet av grad 2 om $a = 0$ for funksjonen $f(x) = 1/(1+x)$?

Velg ett alternativ

- $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2$
- $1 + x + x^2$
- $1 + \frac{1}{2}x$
- $1 - x + x^2$
- $1 + x^2$

Maks poeng: 3

1.4 Differensialligninger

Løsningen av differensialligningen

$y'' - 4y' + 4y = t, \quad y(0) = \frac{1}{4}, \quad y'(0) = \frac{1}{2}$

er gitt ved

Velg ett alternativ

- $y(t) = \frac{1}{4}(te^{2t} - t - 1)$
- $y(t) = \frac{1}{4}(te^{2t} + t + 1)$
- $y(t) = \frac{1}{2}(te^{2t} + e^{2t} + 1)$
- $y(t) = \frac{1}{4}e^{2t}$
- $y(t) = \frac{1}{4}(te^{2t} + e^{2t})$

Maks poeng: 3

1.5 Differensialligninger

En løsning av differensialligningen $t^2 y'(t) + 2ty(t) = \sin(t)$ er

Velg ett alternativ

- $y(t) = \frac{1-\cos(t)}{t}$
- $y(t) = \frac{1-2\cos(t)}{t^2}$
- $y(t) = \frac{1-\sin(t)}{t^2}$
- $y(t) = \frac{3-4\sin(t)}{t^2}$
- $y(t) = \frac{1-\cos(t)}{t^2}$

Maks poeng: 3

1.6 Interpolasjon

Newtonformen til tredjegradspolynomet som interpolerer funksjonen $f(x) = x^4$ i punktene $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$ og $x_3 = 2$, er

Velg ett alternativ

- $p_3(x) = 1 + (x+1) + (x+1)x + (x+1)x(x-1)$
- $p_3(x) = 1 - (x+1) + (x+1)x + 2(x+1)x(x-1)$
- $p_3(x) = (x+1) + (x+1)x - (x+1)x(x-1)$
- $p_3(x) = 1$
- $p_3(x) = 1 + (x+1) + (x+1)x$

Maks poeng: 3

1.7 Nullpunktsmetoder

Vi bruker Newtons metode med startverdien $x_0 = 0$ for å finne et tall x slik at $e^x = 2 - x$. Da vil den andre iterasjonen x_2 være omtrent lik

Velg ett alternativ

- 1
- $1/2$
- 0.3877
- 0.5414
- 0.4439

Maks poeng: 3

1.8 Numerisk derivasjon

Tilnærmingen til den deriverte til f i punktet a gitt ved
$$f'(a) \approx \big(f(a+h) - f(a)\big)/h$$
er eksakt for

Velg ett alternativ

- Alle polynomer av grad ≤ 3, men ikkje for alle polynom av grad ≤ 4
- Alle lineære funksjonar, men ikkje for alle polynom av grad ≤ 2.
- Alle polynomer av grad ≤ 2, men ikkje for alle polynom av grad ≤ 3
- Alle konstante funksjonar, men ikkje for alle lineære funksjonar
- Alle polynomer av grad ≤ 4, men ikkje for alle polynom av grad ≤ 5

Maks poeng: 3

1.9 Numerisk integrasjon

Hvis vi bruker midtpunktsmetoden med fire delintervaller til å regne ut en tilnærming til integralet $\int_0^4 x^2 dx$ får vi

Velg ett alternativ

- 20
- $64/3$
- 21
- 30
- $45/2$

Maks poeng: 3

1.10 Numerisk løsning av diffensialligninger

Vi løser differensialligningen $x'(t) = 2x(t)$ med startverdi $x(0) = 1$ ved hjelp av Eulers metode med steglengde $h = 1/10$. Da er den absolutte feilen ved tiden $t = 2h$ omtrent lik

Velg ett alternativ

- 1.24
- 0
- 0.0518
- 0.0317
- 0.6527

Maks poeng: 3

i Viktig informasjon

Husk at i denne delen må alle svar begrunnes! Og ikke glem å besvare alle delspørsmålene i hver deloppgave.

2.1 Induksjon og Taylorutvikling

I denne oppgaven skal du svare med digital håndtegning. Bruk eget skisseark (utdelt). Se instruksjon for utfylling av skisseark på pult.

a) La $f(x) = \frac{1}{x}$. Vis ved induksjon at den $k$te deriverte av f er
$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$.

b) Anta at vi har funnet $T_n f(x)$, Taylorpolynomet til f av grad n om punktet $a = 2$. Hvor stor må n være for at

$|T_n f(x) - f(x)| \leq 10^{-3}$

for alle $x \in [2, 3]$?

Maks poeng: 20

2.2 Interpolering

I denne oppgaven skal du svare med digital håndtegning. Bruk eget skisseark (utdelt). Se instruksjon for utfylling av skisseark på pult.

a) En funksjon f er bare kjent i de tre punktene $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ og $x_2 = 3$ der den har verdiene $f(0) = -1$, $f(1) = -2$ og $f(3) = 2$. Finn interpolasjonspolynomet $p(x)$ som interpolerer f i disse punktene.

b) Det er kjent at f er kontinuerlig. Forklar hvorfor f da må ha et nullpunkt c i intervallet $(1, 3)$ og bruk interpolasjonspolynomet $p(x)$ til å finne en tilnærming til c.

Finn også en tilnærming til $\int_0^3 f(x)\,dx$ ved hjelp av interpolasjonspolynomet.

Hvis du ikke fant polynomet i a), så får du her lov til å velge deg et annet polynom.

Maks poeng: 20

2.3 Programmering

Skriv en funksjon **secant(f, x0, x1, N)** i Python som tar funksjonen $f(x)$, startpunkter x_0 og x_1, og N som parametre, og som kjører N iterasjoner av sekantmetoden. Funksjonen skal returnere den siste verdien for x_n som ble regnet ut.

Vi minner om at sekantmetoden finner verdien for neste iterasjon fra de to foregående ved hjelp av formelen

$x_i = x_{i-1} - \frac{x_{i-1} - x_{i-2}}{f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})} f(x_{i-1})$.

Skriv ditt svar her...

Maks poeng: 10

2.4 Programmering

Skriv en testfunksjon som kjører **secant** (som du programmerte i forrige oppgave) på funksjonen $f(x) = x^2 - 2$, med startverdier $x_0 = 3$ og $x_1 = 2$, og med 10 iterajoner. Testfunksjonen skal feile hvis

abs(x - sqrt(2))>1E-8

der **x** er estimatet som ble returnert fra **secant**. Med andre ord, testfunksjonen sjekker om sekantmetoden finner verdier nær nullpunktet $x = \sqrt{2}$. Testfunksjonen skal følge standard konvensjon for slike funksjoner (spesielt skal den ha navn på formen **test_*()**, og gjøre testen ved hjelp av et **assert**-statement).

Skriv ditt svar her...

Maks poeng: 10

2.5 Differensialligninger

I denne oppgaven skal du svare med digital håndtegning. Bruk eget skisseark (utdelt). Se instruksjon for utfylling av skisseark på pult.

Vi betrakter den andreordens differensialligningen

$$x'' - 5\sin(x') + 2x^2 = \cos(t)$$

med startbetingelser $x(0) = 1$ og $x'(0) = 0$. Vi bruker Eulers metode med steglengde $h = \frac{1}{10}$ for å tilnærme løsningen $x(t)$. Beregn x_2, tilnærmingen ved tiden $t = 2h$.

Hint: Gjør om ligningen til et system av førsteordens differensialligninger.

Maks poeng: 10