i Viktig informasjon

MAT-IN1105 - Programmering, modellering og beregninger
Onsdag 27. november 2019
Kl.14:30-18:30 (4 timer)
Vedlegg: Formelsamling (lenke ligger under linjen med oppgavenumre).
Tillatte hjelpemiddel: Gyldig kalkulator (lenke ligger også under linjen med oppgavenumre).

I dette oppgavesettet har du mulighet til å svare med digital håndtegning (oppgave 2.1 og 2.4). Du bruker skisseark du får utdelt. Det er anledning til å bruke flere ark per oppgave. Se instruksjon for utfylling av skisseark i lenken under oppgavelinjen.

Det er IKKE anledning til å bruke digital håndtegning på andre oppgaver enn oppgave 2.1 og 2.4. Det blir IKKE gitt ekstratid for å fylle ut informasjonsboksene på skisseark (engangskoder, kand.nr. o.l.).

Den første delen av eksamen består av 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen består av tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. Den totale poengsummen er altså maksimalt 100 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige!

1.1 Taylorrekker

Hva er Taylor-polynomet av grad 2 om $a = 1$ for funksjonen $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$?

Velg ett alternativ

- $5 + 5(x-1) + 8(x-1)^2$
- $3 + 8(x-1) + 10(x-1)^2$
- $5 + 8(x-1) + 5(x-1)^2$
- $x^3 + 2x^2 + x + 1$
- $2x^2 + x + 1$

Maks poeng: 3

1.2 Taylorrekker

Hva er Taylor-polynomet av grad 2 om $a = 0$ for funksjonen $f(x) = \cos(x^2)$?

Velg ett alternativ

- $1 + x$
- 1
- $1 + x^2/2$
- $1 - x^2$
- 0

Maks poeng: 3

1.3 Taylorrekker

Hva er Taylor-polynomet av grad 3 om $a = 0$ for funksjonen $f(x) = \ln(1 + x)$?

Velg ett alternativ

- $x - x^3$
- $1 - x + x^2/2 + x^3/4$
- $x - x^2 + x^3$
- $x - x^2/2 + x^3/3$
- $x + x^2$

Maks poeng: 3

1.4 Differensialligninger

Løsningen av differensialligningen

$$y'' - 5y' + 6y = 6t + 1, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 14$$

er gitt ved

Velg ett alternativ

- $y(t) = t - 1 + 3e^{2t} + 2e^{3t}$
- $y(t) = t + 6$
- $y(t) = 4e^{-2t} + 3e^{3t}$
- $y(t) = t - 1 + 2e^{-2t} + 3e^{-3t}$
- $y(t) = t + 1 + 2e^{2t} + 3e^{3t}$

Maks poeng: 3

1.5 Differensialligninger

En løsning av differensialligningen $y' = \frac{t^2}{y^2}$, $y(0) = 2$ er

Velg ett alternativ

- $y(t) = t + 2$
- $y(t) = \sqrt{t^2 + 4}$
- $y(t) = \sqrt[3]{t^3 + 8}$
- Ligningen har ingen løsning
- $y(t) = \sqrt{t} + 2$

Maks poeng: 3

1.6 Interpolasjon

Newtonformen til andregradspolynomet som interpolerer funksjonen $f(x) = x^3$ i punktene $x_0 = -2$, $x_1 = 0$, og $x_2 = 2$, er

Velg ett alternativ

- $p_2(x) = -8 + 4(x+2) + 2(x+2)x$
- $p_2(x) = x^3$
- $p_2(x) = -8 + 4(x+2)$
- $p_2(x) = 8 + 4(x-2)$
- $p_2(x) = 8 + 4(x-2) - 2(x-2)(x+2)$

Maks poeng: 3

1.7 Nullpunktsmetoder

Vi bruker Newtons metode med startverdien $x_0 = 0$ for å finne et tall x slik at $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = x$. Da blir den andre iterasjonen x_2

Velg ett alternativ

- $1 - 2/(\pi + 2)$
- $1 + \pi$
- $1 - 1/\pi$
- 2π
- 0

Maks poeng: 3

1.8 Numerisk derivasjon

Tilnærmingen til den deriverte til f i punktet a gitt ved

$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$

har en feil når man ser bort fra avrundingsfeil (også kalt trunkeringsfeil/matematisk feil) som er begrenset av

Velg ett alternativ

- $Ch^2 \max_{x\in[a-h,a+h]} |f'''(x)|$
- $Ch^3 \max_{x\in[a-h,a+h]} \left|f^{(iv)}(x)\right|$ (der $f^{(iv)}$ betyr den fjerdederiverte)
- $Ch \max_{x\in[a-h,a+h]} |f''(x)|$
- $C \max_{x\in[a-h,a+h]} |f'(x)|$
- $Ch^2 \max_{x\in[a,a+h]} |f'''(x)|$

der $C > 0$ er en konstant.

Hint: Du skal ikke her trenge å huske feilestimatene slik de er oppgitt i boka.

Maks poeng: 3

1.9 Numerisk integrasjon

Hvis vi bruker trapesmetoden med fire delintervaller til å regne ut en tilnærming til integralet $\int_0^\pi \sin x dx$ får vi omtrent

Velg ett alternativ

- 2
- 1.8961
- 2.4142
- 1.8154
- 1.4142

Maks poeng: 3

1.10 Numerisk løsning av diffensialligninger

Vi løser differensialligningen $x' = x + 2t$ med startverdi $x(0) = 1$ ved hjelp av Eulers metode med steglengde $h = 1$. Da blir tilnærmingen ved tiden $t = 2$ omtrent lik

Velg ett alternativ

- 5.5
- 4
- 6.25
- 6
- 6.5

Vi minner om at Eulers metode med steglengde h for differensialligningen $x' = f(t, x)$ er gitt ved

$x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k)$

Maks poeng: 3

i Viktig informasjon

Husk at i denne delen må alle svar begrunnes! Og ikke glem å besvare alle delspørsmålene i hver deloppgave.

2.1 Induksjon, Taylorrekker, og interpolasjon

I denne oppgaven skal du svare med digital håndtegning. Bruk eget skisseark (utdelt). Se instruksjon for utfylling av skisseark i lenken under oppgavelinjen.

La $f(x) = \ln(1-x)$, der $x < 1$.
a) Vis ved induksjon at $f^{(k)}(x) = -(k-1)!(1-x)^{-k}$ for $k \geq 1$.

b) Skriv ned Taylorpolynomet av grad n om 0 for f. Hvor mange ledd må du ta med i Taylorpolynomet for at feilen skal bli mindre enn 10^{-2} for alle x i intervallet $[-1/2, 0]$?

c) Finn interpolasjonspolynomet $p_2(x)$ som interpolerer f i punktene $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, og $x_2 = 1/2$. Bruk polynomet $p_2(x)$ til å beregne en tilnærming til f' i punktet x_1. Hva blir feilen?

Maks poeng: 30

2.2 Programmering

I denne oppgaven skal vi lage et program som bruker Newtons metode til å finne et nullpunkt til en funksjon f. Newtons metode er oppgitt i formelsamlingen.

Skriv en funksjon **newton(f, df, x0, N)** i Python som tar funksjonen **f**, dens deriverte **df**, en startverdi **x0**, og **N** som parametre, og kjører **N** iterasjoner av Newtons metode på **f**. Funksjonen skal returnere verdien fra siste iterasjon (det vil si x_N).
Skriv ditt svar her...

```
1
```

Maks poeng: 10

2.3 Programmering

Skriv en testfunksjon som bruker funksjonen **newton(f,df,x0,N)** fra forrige oppgave til å kjøre 10 iterasjoner av Newtons metode for å finne et nullpunkt til $f(x) = x^2 - 4$, og med startverdi $x_0 = 1$.

Testfunksjonen skal feile hvis $|x - 2| > 10^{-8}$, der x er verdien som ble returnert fra Newtons metode. Med andre ord, testfunksjonen sjekker om Newtons metode med start i
$x_0 = 1$ ender opp i nærheten av nullpunktet $x = 2$.

Testfunksjonen skal følge standard konvensjon for slike funksjoner (spesielt skal den ha navn på formen **test_*()**, og gjøre testen ved hjelp av et **assert**-statement).

Skriv ditt svar her...

```
1
```

Maks poeng: 10

2.4 Differensialligninger

I denne oppgaven skal du svare med digital håndtegning. Bruk eget skisseark (utdelt). Se instruksjon for utfylling av skisseark i lenken under oppgavelinjen.

Vi betrakter den førsteordens differensialligningen

$$x' = \frac{1}{10}x^2 + \cos(t)$$

med startbetingelse $x(0) = 1$.

a) Vi bruker Eulers midtpunktmetode med steglengde $h = \frac{\pi}{2}$ for å tilnærme løsningen $x(t)$. Beregn x_1, tilnærmingen ved tiden $t = \frac{\pi}{2}$.

Vi minner om at Eulers midpunktmetode for $x' = f(t, x)$ er gitt ved

$$x_{k+1/2} = x_k + \frac{h}{2} f(t_k, x_k)$$

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_k + h/2, x_{k+1/2})$$

b) Et alternativ til Eulers metode er *baklengs Euler*, der x_{k+1} regnes ut ved å løse

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_{k+1}, x_{k+1}),$$

der $t_k = kh$ er definert som i Eulers metode, og systemet $x' = f(t, x)$ er definert som tidligere i oppgaven, og med samme startbetingelse.

Beregn x_1, tilnærmingen ved tiden $t = \frac{\pi}{2}$ som du får med baklengs Euler. Er tilnærmingen entydig definert?

Hint: Du må løse en andregradsligning.

Maks poeng: 20