UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT-IN 1105 — Programmering, modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Fredag 11. Desember 2020.
Tid for eksamen:	15:00 – 19:30.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Alle.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamenen består av to deler: flervalgsoppgaver (totalt 30 poeng) og tradisjonelle oppgaver (totalt 70 poeng).

Del 1: Flervalgsoppgaver

Denne delen består av 5 flervalgsoppgaver som teller 6 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Du vil få to poeng for å markere riktig svaralternativ, og inntil fire poeng for begrunnelse ved regning av hvordan du kommer fram til svaret.

Oppgave 1. Løsningen av differensialligningen

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

er gitt ved

A: $y(x) = 3e^{x} - 2e^{2x}$
B: $y(x) = 2e^{-x} - e^{-2x}$
C: $y(x) = 4e^{x} - 3e^{2x}$
D: $y(x) = e^{x}\cos(2x)$
E: $y(x) = 2e^{x} - e^{2x}$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2. Vi vil finne en tilnærming til et nullpunkt for funksjonen $f(x) = x^2 - 1$. Hvis vi starter med $x_0 = 3$ og tar ett steg med Newtons metode får vi tilnærmingen

A: 2.25

B: 2

C: 5/3

D: 4/3

E: 1

Oppgave 3. Vi minner om at en tilnærming til den andrederiverte til f i punktet a er definert som

$$\big(f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)\big)/h^2.$$

Tilnærmingen til den andrederiverte av $f(x) = x^3$ i $a = 1$ med denne metoden er da gitt ved

A: $3 - h$

B: $6 - h$

C: 6

D: $6 + h$

E: $3 + h^2$

Oppgave 4. Newton-formen til andregradspolynomet som interpolerer funksjonen $f(x) = x^2$ i punktene $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ og $x_2 = 2$ er

A: $p_2(x) = x - x(x-1)$

B: $p_2(x) = x + x(x-1)$

C: $p_2(x) = 1 + x + x(x-1)$

D: $p_2(x) = x(x-1)$

E: $p_2(x) = 1 - x/2 + x(x-1)/6$

Oppgave 5. Anta at vi beregner Taylor-polynomet av grad n om punktet $a = 0$ for funksjonen $f(x) = \sin x$. Den minste verdien av n vi kan velge slik at restleddet $\big|R_n f(x)\big| \leq 0.01$ for alle $x \in [0, 1/3]$ blir da

A: $n = 2$.

B: $n = 3$.

C: $n = 4$.

D: $n = 5$.

E: $n = 6$.

(Fortsettes på side 3.)

Del 2

Denne delen består av 7 delspørsmål. Hvert delspørsmål teller 10 poeng. Du må begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige.

Oppgave 1. Vis ved induksjon at

$$\sum_{k=1}^{n}(3k^2 + k) = n(n+1)^2$$

for alle $n \geq 1$.

Oppgave 2. I denne oppgaven skal vi teste ulike numeriske metoder for å beregne integralet

$$\int_0^{\pi} x^{1/2} \sin x \, dx \tag{1}$$

a) Regn ut den tilnærmede verdien til integralet ved hjelp av trapesmetoden med tre delintervaller.

b) Finn en tilnærming til integralet (1) ved å erstatte $\sin x$ med sitt Taylor-polynom av grad 5 om $a = 0$, det vil si bruk tilnærmingen

$$\int_0^{\pi} x^{1/2} \sin x \, dx \approx \int_0^{\pi} x^{1/2} T_5 \sin x \, dx.$$

c) Bruk restleddet i Taylors formel til å finne en øvre grense for feilen i tilnærmingen i b), det vil si

$$\left| \int_0^{\pi} x^{1/2} \sin x \, dx - \int_0^{\pi} x^{1/2} T_5 \sin x \, dx \right|.$$

Anta at vi erstatter T_5 med et Taylor-polynom av grad n. Hvor stor må n være for at feilen skal bli mindre enn 0.01?

Oppgave 3. Finn løsningen av differensialligningen

$$x' = e^{-x} \cos t, \quad x(0) = 0.$$

Finn også en tilnærming til løsningen i $t = \pi/4$ ved å ta ett steg med Eulers metode, og en annen tilnærming ved å ta ett steg med Eulers midtpunktsmetode. Hvilken av de to metodene gir minst avvik fra den eksakte løsningen du fant? Forklar hvorfor dette er som forventet, eventuelt ikke som forventet.

Oppgave 4.

a) Skriv en funksjon `euler(f, a, b, x0, N)` som finner en tilnærming til $x(b)$ ved å ta N steg med Eulers metode for differensialligningen $x'(t) = f(t, x)$. Initialbetingelsen er $x(a)$ =`x0`. Funksjonen `euler` skal altså anta at `f` er en funksjon som tar to parametre, svarende til høyresiden i differensialligningen.

(Fortsettes på side 4.)

b) Skriv en testfunksjon som sjekker om din implementasjon av Eulers metode er riktig ved å kalle `euler` med $f(t,x) = e^{-x}\cos t$, $N = 100$, $a = 0$, og $b = \pi/4$. Vi antar at implementasjonen er riktig hvis avviket mellom den eksakte løsningen du fant i Oppgave 3 og resultatet fra Eulers metode er mindre enn 0.01 (hvis du ikke fant den eksakte løsningen i oppgave 3, bruk en annen funksjon du selv velger). Testfunksjonen skal følge standard konvensjon for slike funksjoner (spesielt skal den ha navn på formen `test_*()`, og gjøre testen ved hjelp av en `assert`).

Lykke til!