UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT-IN 1105 — Programmering, modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Fredag 4. Desember 2020.
Tid for eksamen:	11:00 – 15:30.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Alle.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamenen består av to deler: flervalgsoppgaver (totalt 30 poeng) og tradisjonelle oppgaver (totalt 70 poeng).

Del 1: Flervalgsoppgaver

Denne delen består av 5 flervalgsoppgaver som teller 6 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Du vil få to poeng for å markere riktig svaralternativ, og inntil fire poeng for begrunnelse ved regning av hvordan du kommer fram til svaret.

Oppgave 1. Hva er Taylor-polynomet av grad 1 om $a = 0$ for funksjonen $f(x) = \sin(\sin x)$?

A: x.

B: $\cos(1)x$.

C: $\sin(1)x$.

D: 0.

E: $\sin(1)\cos(1)x$.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2. Løsningen av differensialligningen

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

er gitt ved

A: $y(x) = e^{2x}$

B: $y(x) = e^{2x} - xe^{2x}$

C: $y(x) = e^{2x} + xe^{2x}$

D: $y(x) = xe^{2x}$

E: $y(x) = 2e^{2x} - 2xe^{2x}$

Oppgave 3. En løsning av differensialligningen $x^2 y' y^2 = 2x$ er

A: $y(x) = (6 \ln x)^{1/3}$

B: $y(x) = \ln x$

C: $y(x) = (6 \ln x)^{1/2}$

D: $y(x) = 3x^{1/3}$

E: $y(x) = (\ln x)^{1/3}$

Oppgave 4. Vi bruker sekantmetoden med startverdier $x_1 = 1$ og $x_2 = 2$ til å finne ett av nullpunktene til funksjonen $f(x) = x^2 - 2$. I første iterasjon får vi da at x_3 blir

A: $\sqrt{2}$

B: 1.9

C: 1.5

D: 4/3

E: 5/4

Oppgave 5. Hvis vi bruker trapesmetoden med 4 intervaller til å regne ut

$$\int_0^2 e^{x^2} dx$$

får vi tilnærmingen

A: 19.5401

B: 19.5623

C: 19.7365

D: 20.3088

E: 20.6446

(Fortsettes på side 3.)

Del 2

Denne delen består av 7 delspørsmål. Hvert delspørsmål teller 10 poeng. Du må begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige.

Oppgave 1. I denne oppgaven skal vi studere funksjonen $f(x) = xe^x$.

a) Vis ved induksjon at $f^{(k)}(x) = (x + k)e^x$ for alle $k \geq 0$.

b) Finn Taylor-polynomet $T_n(x)$ av grad n til f om $a = 0$ og restleddet $R_n(x)$. Finn en N slik at for alle $n \geq N$, og for alle x i intervallet $[0, 1]$, så vil feilen i $T_n(x)$ bli mindre enn 0.001.

c) Skriv en funksjon `T(x, n)` i Python som regner ut og returnerer $T_n(x)$ definert i b). Du kan bruke funksjonen `math.factorial(k)` til å regne ut $k!$.

d) Skriv en testfunksjon som sjekker om din implementasjon av T_n er riktig. Du kan for eksempel kalle `T` med en n større enn N som du fant i b), og sjekke at avviket fra den eksakte verdien $f(1) = e$ er mindre enn 0.001. Testfunksjonen skal følge standard konvensjon for slike funksjoner (spesielt skal den ha navn på formen `test_*()`, og gjøre testen ved hjelp av en `assert`).

Oppgave 2. Vi har gitt differensialligningen

$$x' = \sin(t + x), \quad x(0) = \pi/2.$$

a) Finn to tilnærmede løsninger til ligningen i $t = 0.1$ ved å ta et steg med Eulers metode og et steg med Eulers midtpunktmetode.

b) Finn et uttrykk for $x''(t)$ ved å derivere begge sider av differensialligningen og regn fra dette ut $x''(0)$. Bruk dette til å finne en tilnærming til løsningen i $t = 0.1$ ved hjelp av det kvadratiske Taylor-polynomet. Finn også en verdi for h som garanterer at feilen i Eulers metode er mindre enn 0.0001.

Oppgave 3. Vi har datasettet

x	0	1	3
$f(x)$	1	0	2

Finn det kvadratiske interpolasjonspolynomet p som interpolerer disse verdiene og regn ut en tilnærming til den deriverte til f i $x = 1$ ved hjelp av tilnærmingen $f'(1) \approx p'(1)$.

Lykke til!