UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT-IN 1105 — Programmering, modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Fredag 3. Desember 2021.
Tid for eksamen:	15:00 – 19:00.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Alle.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamenen består av to deler: flervalgsoppgaver (totalt 30 poeng) og tradisjonelle oppgaver (totalt 70 poeng).

Del 1: Flervalgsoppgaver

Denne delen består av 5 flervalgsoppgaver som teller 6 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Du vil få to poeng for å markere riktig svaralternativ, og inntil fire poeng for begrunnelse ved regning av hvordan du kommer fram til svaret.

Oppgave 1. Løsningen av differensialligningen

$$y'' - 6y' + 9y = 18x + 15, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 3$$

er gitt ved

A: $y(x) = xe^{3x} + 2x + 3$
B: $y(x) = e^{3x} + 2$
C: $y(x) = 2x + 3$
D: $y(x) = xe^{3x} + 18x + 15$
E: $y(x) = 2xe^{3x} - e^{3x}$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2. Vi vil finne en tilnærming til et nullpunkt for funksjonen $f(x) = x^3 - 2$. Hvis vi starter med $x_0 = 3$ og $x_1 = 2$ og tar ett steg med sekantmetoden får vi at tilnærmingen x_2 er:

A: 2

B: 31/19

C: 32/19

D: 32/21

E: 33/21

Oppgave 3. Hvis vi bruker trapesmetoden med to delintervaller for å regne ut en tilnærming til

$$\int_0^{1/2} \frac{\sin^2(\pi x)}{4x+1}\,dx$$

får vi

A: $\frac{1}{4}$

B: $\frac{7}{24}$

C: $\frac{1}{8}$

D: $\frac{5}{48}$

E: $\frac{7}{48}$

Oppgave 4. Newtonformen til andregradspolynomet $p(x)$ som tilfredsstiller interpolasjonsbetingelsene $p(0) = 2$, $p(1) = 3$, og $p(3) = 1$ er

A: $p(x) = 2 + x - x(x-1)$

B: $p(x) = 2 + x - \frac{2}{3}x(x-1)$

C: $p(x) = 1 + 2x - x(x-1)$

D: $p(x) = 1 + \frac{2}{3}x - x^2$

E: $p(x) = 2 + \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}x^2$

Oppgave 5. Vi approksimerer funksjonen $f(x) = e^{-4x}$ for x i intervallet $[0, 1/2]$ ved å bruke Taylorpolynomet til f av orden n om punktet $a = 0$. For hvilken verdi av n kan du garantere at feilen er mindre enn 0.01?

A: $n = 3$

B: $n = 4$

C: $n = 5$

D: $n = 6$

E: $n = 7$

(Fortsettes på side 3.)

Del 2

Denne delen består av 7 delspørsmål. Hvert delspørsmål teller 10 poeng. Du må begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige.

Oppgave 1. Vis ved induksjon at

$$\binom{2n}{n} < 2^{2n-2}, \text{ for alle } n \geq 5.$$

Vi minner om at binomialkoeffisientene er definert ved $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Oppgave 2. Man kan vise at funksjonen $f(x) = xe^x$ har Taylorrekke av orden n om 0 som er

$$T_n f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} x^k.$$

a) Skriv en funksjon `T(x,n)` i Python som regner ut og returnerer $T_n f(x)$. Du kan bruke funksjonen `math.factorial(k)` til å regne ut $k!$.

b) Skriv en testfunksjon som kaller funksjonen `T(x,n)` med $x = 1$, og $n = 7$ som parametre. Testfunksjonen skal feile hvis
`abs(val - f(1))>0.01`
der `val` er estimatet som ble returnert fra `T(x,n)`, og `f` er funksjonen i oppgaven. Med andre ord, testfunksjonen skal verifisere at Taylorpolynomet av orden $n = 7$ er en rimelig tilnærming til f i $x = 1$. Testfunksjonen skal følge standard konvensjon for slike funksjoner (spesielt skal den ha navn på formen `test_*()`, og gjøre testen ved hjelp av et `assert`-statement).

Oppgave 3. I denne oppgaven skal vi teste to numeriske metoder for å approksimere integralet

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x}\, dx. \tag{1}$$

Den eksakte verdien av integralet, med 5 sifres presisjon, er 1.3179.

a) Regn ut en tilnærmet verdi av integralet (1) ved hjelp av midtpunktsmetoden med to delintervaller.

b) Finn en tilnærming til integralet (1) ved å erstatte e^x med sitt Taylorpolynom av orden 3 om $a = 0$, det vil si bruk tilnærmingen

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x}\, dx \approx \int_0^1 \frac{T_3 e^x - 1}{x}\, dx.$$

Hvilken av de to metodene i **a)** og **b)** gir den beste tilnærming?

Oppgave 4. Vi skal se på differensialligningen

$$x' = \frac{t^2}{x^2} e^{-x^3}, \quad x(0) = 1.$$

a) Finn løsningen av differensialligningen.

(Fortsettes på side 4.)

b) Finn en tilnærming til løsningen i $t = 1$ ved å ta ett steg med Eulers metode med steglengde $h = 1$. Finn også en tilnærming til løsningen i $t = 1$ ved å ta ett steg med Eulers midtpunktsmetode, igjen med $h = 1$. Finn også avvikene fra den eksakte løsningen du fant i **a)**.

Lykke til!