UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT-IN 1105 — Programmering, modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Mandag 5. Desember 2022.
Tid for eksamen:	15:00 – 19:00.
Oppgavesettet er på 6 sider.	
Vedlegg:	Formelark. Svarark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamenen består av to deler: flervalgsoppgaver (totalt 30 poeng) og tradisjonelle oppgaver (totalt 70 poeng).

Del 1: Flervalgsoppgaver

Denne delen består av 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Svarene dine føres på svararket.

Oppgave 1. Løsningen av differensialligningen

$$y' + 5y = e^{3x}, \quad y(0) = \frac{1}{4}$$

er gitt ved

A: $y(x) = x^5 + 1/4$
B: $y(x) = e^{3x} - 3/4$
C: $y(x) = \cos(5x)/4$
D: $y(x) = \arctan(x + \pi/4)/4$
E: $y(x) = (e^{3x} + e^{-5x})/8$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2. Vi ønsker å finne en tilnærming til nullpunktet til funksjonen $f(x) = e^{2x} - 2$. Hvis vi starter med $a_0 = 0$ og $b_0 = 1$ og itererer to steg med halveringsmetoden, så er midtpunktet $m_2 = (a_2 + b_2)/2$ lik

A: $1/8$

B: $1/3$

C: $5/8$

D: 1

E: $3/8$

Oppgave 3. Taylorpolynomet av grad 2 til funksjonen

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$$

om punktet $a = 1$ er gitt ved

A: $1 + 2x + 3x^2$

B: $1 + x + x^2/2$

C: $1 - (x-1) + (x-1)^2/2$

D: $10 + 20(x-1) + 15(x-1)^2$

E: $1 - x^2$

Oppgave 4. For andregradspolynomet $p(x)$ som tilfredsstiller interpolasjonsbetingelsene $p(0) = 1$, $p(2) = 4$, og $p(3) = 1$ er verdien til $p'(1)$ lik

A: $p'(1) = 3/2$

B: $p'(1) = 1$

C: $p'(1) = -1/2$

D: $p'(1) = -1$

E: $p'(1) = 1/3$

Oppgave 5. Vi lager en tilnærming til integralet

$$\int_0^3 \frac{1}{1+x^2} dx$$

ved å bruke trapesmetoden med tre delintervaller (steglendge $h = 1$). Dette gir verdien

A: $7/3$

B: $13/5$

C: $5/4$

D: $11/5$

E: $3/2$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 6. Taylorpolynomet av grad 3 av funksjonen

$$f(x) = e^{\sin(x)-x}$$

om punktet $a = 0$ er lik

A: $1 + (\sin(x) - x) + \frac{1}{2}(\sin(x) - x)^2 + \frac{1}{6}(\sin(x) - x)^3$

B: $1 + x + x^2/2 + x^3/6$

C: $1 + x^2 - x^3/6$

D: $1 - x^3/6$

E: 1

Oppgave 7. Løsningen til differensiallikningen

$$y'' - y' - 6y = 3x - \frac{3}{2}, \qquad y(0) = 1/3, \quad y'(0) = 2$$

er lik

A: $y(x) = (e^{3x} - e^{-2x})/2 + 1/3 - x/2$

B: $y(x) = 2x + 1/3$

C: $y(x) = e^{3x} - e^{-2x} + 1/3 + x$

D: $y(x) = e^{-2x} - 2/3 + 4x$

E: $y(x) = \cos(x) - e^{-2x} + 1/3$

Oppgave 8. Omskriving av annenordens differensiallikningen

$$x'' + (t + x^2)x' - e^{2t}x = \sin(t)$$

til et system av førsteordens differensiallikninger gir

A: $x' = y + \sin(t)$ og $y' = -(t + x^2)y + e^{2t}x$

B: $x' = y$ og $y' = -(t + x^2)y + e^{2t}x + \sin(t)$

C: $x' = y$ og $y' = y$

D: $x' = y - ty + e^{2t}x$ og $y' = x^2y + \sin(t)$

E: $x' = y$ og $y' = (t + x^2)y - e^{2t}x$

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 9. Den numeriske løsningen av

$$(1+t)x' = xe^t \quad x(0) = 1$$

ved tiden $t = 1$ som vi får ved å ta ett steg med Eulers midtpunktmetode med steglengde $h = 1$ er lik

A: $x_1 = 2$

B: $x_1 = 1 + h + h^2/2$

C: $x_1 = 1 + e^{1/2}$

D: $x_1 = (1 + e)/2$

E: $x_1 = 1 + e$

Vi minner om at Eulers midtpunktmetode for ligningen $x' = f(t, x)$ med $x(t_0) = x_0$ og steglengde h er gitt ved

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_{k+1/2}, x_{k+1/2})$$

der

$$x_{k+1/2} = x_k + hf(t_k, x_k)/2, \qquad t_{k+1/2} = t_k + h/2.$$

Oppgave 10. La funksjonen $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ være slik at dens deriverte tilfredsstiller

$$\max_{x\in[-1,1]} |f^{(n)}(x)| \leq n^2 \qquad \text{for alle} \qquad n \geq 1.$$

La $T_n f(x)$ være Taylorpolynomet til f av grad n om punktet $a = 0$.
Vi søker minste $n \geq 0$ slik at vi kan være sikre på at

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - T_n f(x)| < 10^{-3}.$$

Svaret er

A: $n = 2$

B: $n = 4$

C: $n = 6$

D: $n = 8$

E: $n = 10$

(Fortsettes på side 5.)

Del 2

Denne delen består av 7 delspørsmål. Hvert delspørsmål teller 10 poeng. Du må begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige.

Oppgave 1. Vis ved induksjon at

$$2^{n+1} > n^2, \text{ for alle } n \geq 3.$$

Oppgave 2. I denne oppgaven skal vi programmere sekantmetoden. Vi minner om at denne finner verdien for neste iterasjon fra de to foregående ved hjelp av formelen

$$x_i = x_{i-1} - \frac{x_{i-1} - x_{i-2}}{f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})} f(x_{i-1}).$$

a) Skriv en funksjon `secant(f, x0, x1, N)` i Python som tar funksjonen f, startpunkter x_0 og x_1, og N som parametre, og som kjører N iterasjoner av sekantmetoden. Funksjonen skal returnere den siste verdien for x_n som ble regnet ut.

b) Skriv en testfunksjon som kjører `secant` (som du programmerte i forrige oppgave) på funksjonen $f(x) = x^3 - 8$, med startverdier $x_0 = 3$ og $x_1 = 2.5$, og med 8 iterasjoner. Testfunksjonen skal feile hvis `abs(x - 2)>1E-8`, der `x` er estimatet som ble returnert fra `secant`. Med andre ord, testfunksjonen sjekker om sekantmetoden finner verdier nær nullpunktet $x = 2$. Testfunksjonen skal følge standard konvensjon for slike funksjoner (spesielt skal den ha navn på formen `test_*()`, og gjøre testen ved hjelp av et `assert`-statement).

Oppgave 3. I denne oppgaven skal vi se på en ny metode for numerisk derivasjon. Vi ser bort fra avrundingsfeil. Vi er gitt et generelt tredjegradspolynom $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Vis at, for alle $h > 0$, så er

$$f'(0) - \frac{-3f(0) + 4f(h) - f(2h)}{2h} = 2a_3h^2,$$

Hva kan du si om denne tilnærmingen til $f'(0)$ når f er et andregradspolynom?

Oppgave 4. Vi skal se på funksjonen $f(x) = 3 + 2x - x^2 + x^3$. Bestem det unike interpolasjonspolynomet av grad ≤ 2 som tilfredsstiller

$$p(-1) = f(-1), \quad p(0) = f(0) \quad \text{og} \quad p(2) = f(2),$$

Oppgave 5. Vi skal se på differensiallikningen

$$x' = \frac{x}{1 + 4t^2} \qquad t \geq 0, \quad \text{med initialbetingelsen} \quad x(0) = 1.$$

a) Finn løsningen til differensiallikningen.

(Fortsettes på side 6.)

b) Det kan vises at $x(1/2) = e^{\pi/8} \approx 1.48097$ for den eksakte løsningen til differensiallikningen.

Finn en tilnærming til løsningen ved tiden $t = 1/2$ ved å ta to steg med Eulers metode med steglengden $h = 1/4$. Hvor stor er approksimasjonsfeilen

$$|x_2 - x(1/2)| \ ?$$

(x_2 betegner den numeriske løsningen ved $t = 1/2$).

Lykke til!