UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT-IN 1105 — Programmering, modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Tirsdag 12. Desember 2023.
Tid for eksamen:	15:00 – 19:00.
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Formelark. Svarark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamenen består av to deler: flervalgsoppgaver (totalt 30 poeng) og tradisjonelle oppgaver (totalt 70 poeng).

Del 1: Flervalgsoppgaver

Denne delen består av 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Svarene dine føres på svararket.

Oppgave 1. Taylorpolynomet av grad 2 til funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{1 - x^3}$$

om punktet $a = -1$ er gitt ved

A: $\frac{1}{2} + 2(x+1) - \frac{3}{16}(x+1)^2$
B: $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}(x+1) - \frac{3}{8}(x+1)^2$
C: $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}(x+1) + \frac{3}{8}(x+1)^2$
D: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x+1) - \frac{3}{8}(x+1)^2$
E: $1 + \frac{3}{2}(x+1) - \frac{3}{8}(x+1)^2$

Oppgave 2. Taylorpolynomet av grad 3 av funksjonen

$$f(x) = e^{-x^3}$$

om punktet $a = 0$ er lik

A: $1 + x^3/2$

B: $1 + x^2/2$

C: $1 - x^3/2$

(Fortsettes på side 2.)

D: $1 - x^3$

E: $1 + x^3$

Oppgave 3. La $f(x) = x^3 - x - 1$, og la $p_2(x)$ være polynomet av grad ≤ 2 som interpolerer f i $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, og $x_2 = 3$. Da er $\int_1^3 p_2(x)\,dx$ lik

A: 10

B: 29/2

C: 14

D: 17

E: 3

Oppgave 4. Vi ønsker å finne en tilnærming til nullpunktet til funksjonen $f(x) = x^5 + x + 1$. Hvis vi starter med $x_0 = 0$ og tar to steg med Newtons metode, så får vi at x_2 blir

A: $-3/2$

B: $-5/6$

C: $1/4$

D: $-1/2$

E: -1

Oppgave 5. Tilnærmingen til

$$\int_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{8}\right)\,dx$$

vi får når vi bruker midtpunktsmetoden med fire delintervaller (steglendge $h = 1/2$) blir

A: $(\sqrt{2} + 1)/2$

B: $-1/2$

C: $\sqrt{2}$

D: 1

E: $\sqrt{2} + 1$

Oppgave 6. Løsningen av differensiallikningen

$$y' - 3y = 2xe^x, \quad y(0) = 0$$

er gitt ved

A: $y(x) = (x + 1/2)e^x - e^{3x}/2$

B: $y(x) = -e^x/2 + e^{3x}/2$

C: $y(x) = xe^x + e^{3x} - 1$

D: $y(x) = -(x + 1/2)e^x + e^{3x}/2$

E: $y(x) = -(x + 1/2)e^x + e^{3x}$

Oppgave 7. Løsningen til differensiallikningen

$$y'' - 6y' = -12x - 16, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = -3$$

(Fortsettes på side 3.)

er lik

A: $y(x) = x^2 + 3x + 1 - e^{6x}$

B: $y(x) = x^2 + 3x - 1 + e^{6x}$

C: $y(x) = x^2 + 3x - e^{6x}$

D: $y(x) = e^{-6x} - 1$

E: $y(x) = 3x - 1 + e^{-6x}$

Oppgave 8. Den numeriske løsningen av

$$x^2 x' = t^3 \quad x(1) = 1$$

ved tiden $t = 2$ som vi får ved å ta to steg med Eulers metode med steglengde $h = 1/2$ er lik

A: $x_2 = 3/2$

B: $x_2 = 9/4$

C: $x_2 = 11/4$

D: $x_2 = 1$

E: $x_2 = 5/2$

Oppgave 9. Omskriving av annenordens differensiallikningen

$$x'' + \sqrt{x'} - e^{tx} = \ln t$$

til et system av førsteordens differensiallikninger gir

A: $x' = y + \ln t$ og $y' = -\sqrt{y} e^{tx}$

B: $x' = y$ og $y' = -\sqrt{y} + e^{tx} + \ln t$

C: $x' = y$ og $y' = \sqrt{y} - e^{tx} + \ln t$

D: $x' = -\sqrt{y} + \ln t$ og $y' = e^{tx}$

E: $x' = y$ og $y' = -\sqrt{y} + e^{tx}$

Oppgave 10. Vi definerer $f(x) = \cos(x)e^x$, og lar $T_n f(x)$ være Taylorpolynomet til f av grad n om punktet $a = 0$.
Hva er minste $n \geq 0$ slik at vi kan være sikre på at

$$\max_{x \in [-1/2, 1/2]} |f(x) - T_n f(x)| \leq 0.02?$$

A: $n = 0$

B: $n = 1$

C: $n = 2$

D: $n = 3$

E: $n = 4$

(Fortsettes på side 4.)

Del 2

Denne delen består av 7 delspørsmål. Hvert delspørsmål teller 10 poeng. Du må begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige.

Oppgave 1. Vis ved induksjon at $n^3 + 2n$ er delelig med 3 for alle $n \geq 1$.

Oppgave 2. Vi minner om at den symmetriske Newton-kvotienten gir en tilnærming til $f'(a)$, og er definert ved

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}.$$

a) Skriv en funksjon `symm_newton()` som regner ut den symmetriske Newton-kvotienten for funksjonen $f(x) = \sin x$ og $a = 2$, og der h løper gjennom verdiene 10^{-1}, 10^{-2},...,10^{-15} i en for-løkke. Funksjonen skal returnere den verdien av den symmetriske Newton-kvotienten som gir minst avvik fra $f'(a)$.

b) Skriv en testfunksjon som kaller funksjonen `symm_newton()`, og sjekker om den returnerte verdien avviker fra $f'(a)$ med mindre enn 10^{-8}. Testfunksjonen skal følge standard konvensjon for slike funksjoner (spesielt skal den ha navn på formen `test_*()`, og gjøre testen ved hjelp av en assert).

Oppgave 3. Vi skal se på følgende tilnærming til den deriverte til en funksjon f i et punkt a:

$$f'(a) \approx \frac{-4f(a-h) + 3f(a) + f(a+2h)}{6h}$$

Vis at denne tilnærmingen er eksakt for alle andregradspolynomer.

Oppgave 4. Finn tilnærmingen til $\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\, dx$ som du får ved å erstatte $\sin x$ med sitt Taylorpolynom av grad 5 om origo, det vil si regn ut $\int_1^2 \frac{T_5 \sin(x)}{x}\, dx$.

Oppgave 5. Vi skal se på differensiallikningen

$$x' = \frac{t^2}{x} e^{t^3 - x^2} \qquad t \geq 1, \quad \text{med initialbetingelsen} \quad x(1) = 1.$$

a) Finn løsningen til differensiallikningen.

b) Det kan vises at $x(1.5) \approx 1.7364$ for den eksakte løsningen til differensiallikningen.

Finn en tilnærming til løsningen ved tiden $t = 1.5$ ved å ta ett steg med Eulers midtpunktsmetode. Hvor stor er approksimasjonsfeilen

$$|x_1 - x(1.5)| \; ?$$

(x_1 betegner den numeriske løsningen ved $t = 1.5$).

Vi minner om at Eulers midtpunktmetode for ligningen $x' = f(t, x)$ med $x(t_0) = x_0$ og steglengde h er gitt ved

$$x_{k+1} = x_k + h f(t_{k+1/2}, x_{k+1/2})$$

(Fortsettes på side 5.)

der

$$x_{k+1/2} = x_k + hf(t_k, x_k)/2, \qquad t_{k+1/2} = t_k + h/2.$$

Lykke til!