

Oppgave 3. Anta at vi beregner Taylor-polynomet av grad n om punktet $a = 0$ for funksjonen $f(x) = \cos x$. Hva kan vi si om feilleddet $R_n(x)$?

- A:** Feilleddet vil for hver x gå mot uendelig når n går mot uendelig.
B: For alle reelle tall x vil feilleddet gå mot 0 når n går mot uendelig.
C: Feilleddet er 0 overalt.
D: Feilleddet vil gå mot 0 når n går mot uendelig for alle x i intervallet $[-\pi, \pi]$, men ikke for andre verdier av x .
E: For alle n og alle reelle tall x vil absoluttverdien til feilleddet være mindre enn 1.

Oppgave 4. Løsningen av differensialligningen

$$y'' - 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4$$

er gitt ved

- A:** $y(x) = e^{-x} + e^{-3x}$
B: $y(x) = e^x + e^{3x}$
C: $y(x) = e^x + 2e^{3x}$
D: $y(x) = 2e^x + e^{3x}$
E: $y(x) = 2e^x$

Oppgave 5. En løsning av differensialligningen $y' + y^2 x^2 = 0$ er

- A:** $y(x) = 1/(x^3/3 + 1)$
B: $y(x) = 1/(1 - x^3/3)$
C: $y(x) = 1/(x^3 + 1)$
D: $y(x) = 1/(x^2/3 - 1)$
E: $y(x) = e^{-x^3/3+1}$

Oppgave 6. Newton-formen til tredjegradspolynomet som interpolerer funksjonen $f(x) = (x - 1)^3$ i punktene $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, og $x_3 = 3$ er

- A:** $p_3(x) = -1 - x + x(x - 1)(x - 2)$
B: $p_3(x) = -1 + x + x(x - 1)(x - 2)$
C: $p_3(x) = -1 + x - x(x - 1)(x - 2)$
D: $p_3(x) = 1 + x + x(x - 1)(x - 2)$
E: $p_3(x) = -1 + 2x + 2x(x - 1)(x - 2)$

Oppgave 7. Vi tar to steg med Newtons metode for $f(x) = x^2 - 2$, og starter i $x_0 = 1$. Da får vi

- A:** $x_2 = 7/5$
B: $x_2 = 3/2$
C: $x_2 = 17/12$
D: $x_2 = 1$
E: $x_2 = 15/12$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 8. Vi minner om at Newton-kvotienten til f i punktet a er definert som

$$(f(a+h) - f(a))/h,$$

og at den symmetriske Newton-kvotienten til f i punktet a er definert som

$$(f(a+h) - f(a-h))/(2h).$$

Hvilken av følgende påstander om numerisk derivasjon er sann?

A: Den symmetriske Newton-kvotienten gir den deriverte eksakt for alle tredjegradspolynomer, hvis man ikke tar hensyn til avrundingsfeil.

B: Newton-kvotienten gir den deriverte eksakt for alle andregradspolynomer, hvis man ikke tar hensyn til avrundingsfeil.

C: Den symmetriske Newton-kvotienten gir den deriverte eksakt for alle andregradspolynomer, hvis man ikke tar hensyn til avrundingsfeil.

D: Vi trenger ikke ta hensyn til avrundingsfeil når vi gjør numerisk derivasjon.

E: Både Newton-kvotienten og den symmetriske Newton-kvotienten gir en feil av størrelse $h^2/6$, hvis man ikke tar hensyn til avrundingsfeil.

Oppgave 9. Hvis vi bruker trapesmetoden med 4 intervaller til å regne ut $\int_0^2 x^2 dx$ får vi

A: $5/2$

B: $8/3$

C: $11/2$

D: $11/4$

E: 3

Oppgave 10. Differensialligningen $x'' + (\sin t)x' + 5x = \tan t$, med initialbetingelser $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, skal skrives som et system av førsteordens differensialligninger. Hvilket system er riktig?

A: $x'_1 = x_2$, $x'_2 = -(\sin t)x_2 - 5x_1 + \tan t$, $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$

B: $x'_1 = -(\sin t)x_2 - 5x_1 + \tan t$, $x'_2 = x_1$, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$

C: $x'_1 = x_2$, $x'_2 = (\sin t)x_2 + 5x_1 + \tan t$, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$

D: $x'_1 = x_2$, $x'_2 = (\sin t)x_2 - 5x_1 + \tan t$, $x_1(1) = 0$, $x_2(1) = 1$

E: $x'_1 = x_2$, $x'_2 = -(\sin t)x_2 - 5x_1 + \tan t$, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$

Del 2

Husk at i denne delen må alle svar begrunnes! Og ikke glem å besvare alle delspørsmålene i hver deloppgave.

Oppgave 1. Vis ved induksjon at, for alle $n \geq 1$, så er

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 = (-1)^n n(n+1)/2.$$

Oppgave 2.

a) Skriv en funksjon `trapes(f, a, b, N)` som regner ut tilnærmingen til $\int_a^b f(x)dx$ vi får ved å bruke trapesmetoden med N like store delintervaller.

b) Skriv en testfunksjon som tar to parametre, `c` og `d`, og som bruker metoden `trapes` til å regne ut en tilnærming til $\int_0^2 (cx + d)dx$ ved hjelp av trapesmetoden med $N = 2^5$ delintervaller. Testfunksjonen skal teste om tilnærmingen avviker med mindre enn 10^{-8} fra den eksakte verdien for integralet. Hvis dette ikke er tilfelle skal du skrive en feilmelding på skjermen. Testfunksjonen skal følge standard konvensjon for slike funksjoner (spesielt skal den ha navn på formen `test_*`), og gjøre testen ved hjelp av en `assert`).

Oppgave 3.

a) Skriv opp Taylor-polynomet av grad n , $T_n(x)$, til funksjonen $f(x) = e^x$ om 0. Skriv også opp et uttrykk for restleddet $R_n(x)$.

b) Bruk Taylorrekka med restledd fra a) til å regne ut $\int_0^1 e^{-t^2} dt$ med en nøyaktighet på 0.01.

Oppgave 4. Vi har gitt differensialligningen

$$x' - (1+t)x = 1+t, \quad x(0) = 0.$$

a) Finn en formel for løsningen av differensialligningen.

b) Finn to tilnærminger til løsningen i $t = 0.25$: En ved å ta ett steg med Eulers metode, og en annen ved å ta ett steg med Eulers midtpunktmetode. Hva er avvikene fra løsningen du fant i a)? Er dette rimelige verdier, ut fra hva du vet om nøyaktigheten for disse metodene?

Lykke til!