UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT-INF 1100L — Programmering, modellering, og beregninger.

Eksamensdag: Mandag 7. Desember 2015.

Tid for eksamen: 9:00 – 13:00.

Oppgavesettet er på 5 sider.

Vedlegg: Formelark, svarark.

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Første del av eksamen består av 10 flervalgsoppgaver som teller 1.5 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen består av tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 5 poeng. Den totale poengsummen er altså maksimalt 50 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige! *Husk å levere arkene med flervalgssvarene!*

Del 1: Flervalgsoppgaver

Oppgave 1. Hva er Taylor-polynomet av grad 2 om $a = 0$ for funksjonen $f(x) = 1/(1 + x^2)$?

A: $1 - x^2$

B: $1 + x^2$

C: $x - x^2/2$

D: $x + x^2/2$

E: $1 + x$

Oppgave 2. Hva er Taylor-polynomet av grad 3 om $a = 1$ for funksjonen $f(x) = 1 + x^4$?

A: $2 + 2(x - 1) + 3(x - 1)^2 + 4(x - 1)^3$

B: $2 + 4(x - 1) - 4(x - 1)^2 - 4(x - 1)^3$

C: $2 + 5(x - 1) + 13(x - 1)^2 + 25(x - 1)^3$

D: $2 - 4x - 6x^2 - 4x^3$

E: $2 + 4(x - 1) + 6(x - 1)^2 + 4(x - 1)^3$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. Hva er Taylor-polynomet av grad 2 om $a = \pi$ for funksjonen $f(x) = 1/(2 + \sin x)$?

A: $1/3 + (x - \pi)/2 + (x - \pi)^2/8$.

B: $1/2 + (x - \pi)/4 + (x - \pi)^2/8$.

C: $1/2 - (x - \pi)/4 + (x - \pi)^2/8$.

D: $1/2 + (x - \pi) + (x - \pi)^2$.

E: $1/2 + (x - \pi)^2/8$.

Oppgave 4. Løsningen av differensialligningen

$$y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

er gitt ved

A: $y(x) = e^x(\cos(2x) + \sin(2x))$

B: $y(x) = e^{2x} \cos x$

C: $y(x) = e^x \sin(2x)$

D: $y(x) = e^x \cos(2x)$

E: $y(x) = e^x \cos x$

Oppgave 5. En løsning av differensialligningen $x^2y' - y = 0$ er

A: $y(x) = e^{-1/x}$

B: $y(x) = e^{1/x}$

C: $y(x) = xe^{-1/x}$

D: $y(x) = e^{-2/x}$

E: $y(x) = e^{2/x}$

Oppgave 6. Newton-formen til andregradspolynomet som interpolerer funksjonen $f(x) = 1/(1 + x)$ i punktene $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ og $x_2 = 2$ er

A: $p_2(x) = 1 + x(x - 1)/6$

B: $p_2(x) = 1 - x/2 - x(x - 1)/6$

C: $p_2(x) = 1 + x/2 + x(x - 1)/6$

D: $p_2(x) = 1 - (x - 1)/2 + (x - 1)x/6$

E: $p_2(x) = 1 - x/2 + x(x - 1)/6$

Oppgave 7. Vi bruker halveringsmetoden til å bestemme ett av nullpunktene til funksjonen $f(x) = (x - 1)(x - 1/2)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$ på intervallet $[0, 5]$. Midtpunktene i de beregnede intervallene vil da konvergere mot

A: 2.25

B: 3

C: 1.5

D: 2.5

E: 2

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 8. Vi minner om at Newton-kvotienten til f i punktet a er definert som

$$(f(a+h)-f(a))/h.$$

Tilnærmingen til den deriverte av $f(x)=x^2$ i $a=1$ med denne metoden er da gitt ved

A: $2+h$

B: 2

C: $2-h$

D: h

E: $2+h^2$

Oppgave 9.
Vi minner om at midtpunktmetoden for integralet $I=\int_a^b f(x)\,dx$ med n delintervaller er gitt ved

$$I \approx h\sum_{i=1}^{n} f\big(a+(i-1/2)h\big), \quad h=(b-a)/n.$$

(det var her en trykkfeil i oppgaven: en ekstra h i formelen over hadde sneket seg inn)

Hvis vi bruker midtpunktmetoden med 4 intervaller til å regne ut

$$\int_0^2 x^3 dx$$

får vi tilnærmingen

A: $33/8$

B: $31/8$

C: $31/4$

D: 4

E: $9/2$

Oppgave 10. Differensialligningen $x''' + x^2 = t$, med initialbetingelser $x(0)=0$, $x'(0)=1$, $x''(0)=0$ skal skrives som et system av førsteordens differensialligninger. Hvilket system er riktig?

A: $x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \quad x_3' = t - x_2^2$, $x_1(0)=0$, $x_2(0)=1$, $x_3(0)=0$

B: $x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \quad x_3' = t - x_1^2$, $x_1(0)=1$, $x_2(0)=0$, $x_3(0)=1$

C: $x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \quad x_3' = t - x_1^2$, $x_1(0)=0$, $x_2(0)=1$, $x_3(0)=0$

D: $x_1' = x_2, \quad x_2' = t - x_1^2, \quad x_1(0)=0, x_2(0)=1$

E: $x_1' = x_2, \quad x_2' = t - x_1^2, \quad x_3' = x_2$, $x_1(0)=0$, $x_2(0)=1$, $x_3(0)=0$

(Fortsettes på side 4.)

Del 2

Husk at i denne delen må alle svar begrunnes! Og ikke glem å besvare alle delspørsmålene i hver deloppgave.

Oppgave 1. I denne oppgaven skal vi studere funksjonen $f(x) = 1/(x-1)$.

a) Vis ved induksjon at $f^{(k)}(x) = (-1)^k k!(x-1)^{-(k+1)}$ for alle $k \geq 0$.

b) Finn Taylor-polynomet $T_3(x)$ av grad 3 til f om $a = 3$ og restleddet $R_3(x)$. Finn en øvre grense $z \geq 3$ slik at for alle x i intervallet $[3, z]$ er feilen i $T_3(x)$ mindre enn 0.01.

Oppgave 2. Vi har gitt differensialligningen

$$x' + (1-t^2)x = 1-t^2, \quad x(0) = 0.$$

a) Finn en formel for løsningen av differensialligningen.

b) Finn to tilnærminger til løsningen i $t = 0.5$: En ved å ta ett steg med Eulers metode, og en annen ved å ta ett steg med Eulers midtpunktmetode. Hva er avvikene fra løsningen du fant i (a)?
Er dette rimelige verdier, ut fra hva du vet om nøyaktigheten for disse metodene?

Vi minner om at Eulers midtpunktmetode for ligningen $x' = f(t, x)$ med $x(t_0) = x_0$ og steglengde h er gitt ved

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_{k+1/2}, x_{k+1/2})$$

(det var her en trykkfeil i eksamensoppgaven, formelen over er den riktige) der

$$x_{k+1/2} = x_k + hf(t_k, x_k)/2, \qquad t_{k+1/2} = t_k + h/2.$$

c) Skriv en funksjon `euler(f, a, b, x0, n)` som finner en tilnærming til $x(b)$ ved å ta n steg med Eulers metode for differensialligningen $x'(t) = f(t, x)$. Intialbetingelsen er $x(a) =$`x0`. Funksjonen `euler` skal altså anta at `f` er en funksjon som tar to parametre, svarerende til høyresiden i differensiallikningen.

d) Skriv en testfunksjon som sjekker om din implementasjon av Eulers metode er riktig. Du kan for eksempel kalle `euler` med en veldig stor n (for eksempel 1000), bruke $a = 0$, $b = 0.5$ som i (b), og la differensiallikningen være $x' + (1-t^2)x = 1-t^2$ med $x(0) = x_0 = 0$, med løsningen du fant i (a). Vi antar at implementasjonen er riktig hvis avviket mellom den eksakte løsningen og resultatet fra Eulers metode er mindre enn 0.001. Testfunksjonen skal følge standard konvensjon for slike funksjoner (spesielt skal den ha navn på formen `test_*()`, og gjøre testen ved hjelp av en `assert`).

Oppgave 3.
I denne oppgaven skal vi beregne tilnærminger til integralet

$$I = \int_0^1 \operatorname{sinc} x \, dx \tag{1}$$

(Fortsettes på side 5.)

der funksjonen $\operatorname{sinc} x$ er definert ved

$$\operatorname{sinc} x = \begin{cases} 1, & \text{for } x = 0; \\ \sin x/x, & \text{for } x \neq 0. \end{cases}$$

Beregn to tilnærminger til integralet (1): den første ved hjelp av midtpunktmetoden og den andre ved å erstatte $\sin x$ i definisjonen av $\operatorname{sinc} x$, med tilnærmingen gitt ved Taylor-polynomet av grad 3 om $a = 0$,

$$\sin x \approx x - x^3/6.$$

Sammenlign tilnærmingene med den eksakte verdien $I = 0.946083$ (med 6 desimaler). Hvilken av de to tilnærmingene er mest nøyaktig? Forklar kort hvorfor du mener dette er rimelig eller urimelig.

Vi minner om at midtpunktmetoden for å beregne en tilnærming til integralet av funksjonen $f(x)$ på intervallet $[a, b]$ er gitt ved

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)f\big((a+b)/2\big).$$

Lykke til!