"Prøveunderveiseksamen" i MAT-INF 1100, H-03

Denne prøveeksamenen har samme format som den "virkelige" underveiseksamenen, og inneholder oppgaver av samme type og vanskelighetsgrad. De 15 første oppgavene teller 2 poeng hver, de siste 5 teller 4 poeng hver. Den totale poengsummen er altså 50. Det er 5 svaralternativer for hvert spørsmål, men det er bare ett av disse som er riktig. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på et spørsmål, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å svare feil.

Oppgave- og svarark

1) Det binære tallet 1010101 er det samme som det desimale tallet

- [ ] 12
- [ ] 67
- [ ] 54
- [x] 85
- [ ] 91

2) Skrevet i totallssystemet blir tallet 183

- [x] 10110111
- [ ] -1010101
- [ ] 11100
- [ ] 10110011
- [ ] 11001111

3) Det reelle tallet $1 + \sqrt{2}$ er

- [ ] $1 - \sqrt{2}$
- [ ] et rasjonalt tall
- [ ] et naturlig tall
- [ ] ikke definert
- [x] et irrasjonalt tall

4) Det reelle tallet $\dfrac{6}{7\sqrt{7} - 7} - \dfrac{1}{\sqrt{7}}$ er

- [ ] et irrasjonalt tall
- [ ] et negativt tall

- [ ] 7
- [ ] 0
- [x] et rasjonalt tall

5) Den minste øvre skranken til mengden $\{x : |x-2| < 2\}$ er

- [ ] 0
- [ ] 2
- [ ] $\sqrt{2}$
- [x] 4
- [ ] -2

6) Den minste øvre skranken til mengden $\{x : x^2 + 2 < 3x\}$ er

- [ ] 3
- [ ] 0
- [x] 2
- [ ] $\sqrt{3}$
- [ ] 1

7) Anta at vi multipliserer ut parentesene i uttrykket $(a+1)^{19}$ der a er ulik 0, hva blir da koeffisienten foran a^{17}?

- [ ] 17
- [ ] 136
- [ ] 153
- [x] 171
- [ ] 19

8) Hvilket av følgende uttrykk vil kunne gi stor relativ feil for spesielle verdier av a og b når det regnes med flyttall?

- [x] $a + b$
- [ ] a/b
- [ ] $a * b$
- [ ] $2a/b$
- [ ] $\sqrt{ab}$

9) Hvilket av følgende utsagn er sanne?

- [ ] Det fins et reelt tall som er større enn alle naturlige tall
- [x] Ethvert reelt tall kan tilnærmes vilkårlig godt med et rasjonalt tall
- [ ] Avrundingsfeil kan aldri bli et problem på en lommeregner
- [ ] Det er bare et endelig antall irrasjonale tall
- [ ] Det er et uendelig antall 64-bits flyttall

10) Funksjonen f er definert på intervallet $[1, 2]$, er kontinuerlig og tilfredstiller betingelsen $f(1) \cdot f(2) < 0$. Etter 9 iterasjoner med halveringsmetoden vil vi ha et estimat for et av nullpunktene til f med absolutt feil mindre enn

- [ ] -0.3
- [x] 0.002
- [ ] 0.0001
- [ ] 10^{-5}
- [ ] e^{-15}

11) Hvilken av følgende differensligninger er lineær?

- [ ] $x_n - \sin(x_{n-1}) + x_{n-2} = 0$
- [ ] $e^{x_n} + x_{n-1} = 0$
- [ ] $x_n + x_{n-1}x_{n-2} = 0$
- [x] $x_n + n\,x_{n-1} + x_{n-2} = 0$
- [ ] $\sqrt{x_n} - x_{n-1} = 0$

12) Løsningen av differensligningen

$$x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n = 0, \qquad x_0 = 1, \quad x_1 = 1$$

er gitt ved

- [ ] $x_n = (3 \cdot 2^n - 4^n)/2$
- [ ] $x_n = 0$
- [ ] $x_n = 2^{n+1} - 3^n$
- [ ] $x_n = 4n$
- [x] $x_n = 1$

13) En differensligning har karakterstisk ligning med røtter $r_1 = 1 + i$ og $r_2 = 1 - i$. Differensligningen er da gitt ved

- [x] $x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0$
- [ ] $x_{n+2} - x_n = 0$

- [ ] $x_{n+2} + x_{n+1} - x_n = 0$
- [ ] $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$
- [ ] $x_{n+2} - 8x_{n+1} + x_n = 0$

14) Løsningen av differensligningen

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 0, \qquad x_0 = 0, \quad x_1 = 3$$

er gitt ved

- [ ] $x_n = 4^n - 1$
- [x] $x_n = n\,3^n$
- [ ] $x_n = 3\,(3^n - 1)/2$
- [ ] $x_n = 3n$
- [ ] $x_n = 7n - 4$

15) Numerisk simulering av differensligningen $x_{n+2} - 4x_{n+1} + x_n = 0$ med startverdier $x_0 = 1$ og $x_1 = 4$ vil gi

- [ ] store problemer med avrundingsfeil
- [x] ingen problemer med avrundingsfeil
- [ ] $x_n = (n+1)^2$
- [ ] en løsning som alltid er 0
- [ ] $x_2 = 3$

16) Vi lar P_n betegne påstanden at formelen

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{8}(2n+1)^2$$

er sann. Et induksjonsbevis for dette kan være som følger:

1. Vi ser lett at P_1 er sann.
2. Anta nå at vi har bevist at P_1, ..., P_k er sann, for å fullføre induksjonsbeviset må vi vise at P_{k+1} også er sann. Siden P_k er sann har vi

$$\begin{aligned}1 + 2 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{1}{8}(2k+1)^2 + k + 1 = \frac{1}{2}k^2 + \frac{3}{2}k + \frac{9}{8} \\ &= \frac{1}{8}(4k^2 + 12k + 9) \\ &= \frac{1}{8}(2k+3)^2 = \frac{1}{8}\big(2(k+1)+1\big)^2.\end{aligned}$$

Vi ser dermed at om P_k er sann så må også P_{k+1} være sann.

Hvilket av følgende utsagn er sanne?

- [ ] Påstanden P_n er sann, men del 2 av induksjonsbeviset er feil
- [x] Påstanden P_n er feil, og del 1 av induksjonsbeviset er feil
- [ ] Påstanden P_n er feil, og både del og del 2 av induksjonsbeviset er feil
- [ ] Både påstanden P_n og induksjonsbeviset er riktige
- [ ] Beviset er riktig, men det er ikke noe induksjonsbevis

17) Differensligningen

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}^2, \qquad \text{der } x_0 = 0 \text{ og } x_1 = 1$$

er gitt. Vi har tro på at følgende påstand er sann:

P_n: For alle heltall $n \geq 0$ gjelder det at x_{3n} er et partall mens x_{3n+1} og x_{3n+2} begge er oddetall.

Vi forsøker å vise dette ved induksjon:

1. For $n = 0$ ser vi at $x_{3n} = x_0 = 0$ som er et partall, mens $x_{3n+1} = x_1 = 1$ som er et oddetall. Vi har dessuten at $x_{3n+2} = x_2 = x_1 + x_0^2 = 1$ også er et oddetall så P_n er sann for $n = 0$.

2. Anta at vi har vist at P_n er sann for $n = 0, \ldots, k-1$, vi må vise at da er også P_k sann. Vi har $x_{3k} = x_{3k-1} + x_{3k-2}^2$, og fra induksjonshypotesen vet vi at x_{3k-2} og x_{3k-1} begge er oddetall. Da er også x_{3k-2}^2 et oddetall og siden summen av to oddetall er et partall er x_{3k} et partall. På samme måte har vi $x_{3k+1} = x_{3k} + x_{3k-1}^2$. Vi vet nå at x_{3k} er et partall mens x_{3k-1}^2 er et oddetall. Dermed er x_{3k+1} et oddetall. Til slutt må vi sjekke x_{3k+2}. Vi har $x_{3k+2} = x_{3k+1} + x_{3k}^2$ og ut fra vi vi nettopp har vist er x_{3k+1} et oddetall mens x_{3k} er et partall. Da er også x_{3k}^2 et partall så x_{3k+2} er summen av et partall og et oddetall og dermed et oddetall.

Hvilket av følgende utsagn er sanne?

- [ ] Påstanden P_n er sann, men del 1 av induksjonsbeviset er feil
- [ ] Påstanden P_n er sann, men del 2 av induksjonsbeviset er feil
- [ ] Påstanden P_n er feil, men induksjonsbeviset er riktig
- [x] Både påstanden P_n og induksjonsbeviset er riktige
- [ ] Beviset er riktig, men det er ikke noe induksjonsbevis

18) Løsningen av den inhomogene differensligningen

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = n$$

der $x_0 = 1$ og $x_1 = 1$ er

- [ ] $x_n = 2^n - n$
- [ ] $x_n = n$

- [ ] $x_n = (n^2 + n)/2$
- [x] $x_n = n + 2 - 2^n$
- [ ] $x_n = n\,2^n - 2n + 1$

19) Løsningen av den inhomogene differensligningen

$$x_{n+2} + x_n = n^2$$

der $x_0 = 1$ og $x_1 = 0$ er gitt ved

- [ ] $x_n = n - 1$
- [ ] $x_n = n^2 - 1$
- [x] $x_n = \frac{1}{2}n(n-2) + \cos(n\pi/2) + \frac{1}{2}\sin(n\pi/2)$
- [ ] $x_n = n^2 + \sin(n\pi/2) + \cos(n\pi/2)$
- [ ] $x_n = \cos(n\pi/2)$

20) Vi bruker halveringsmetoden på en funksjon f definert på intervallet $[0, 1]$. Funksjonen er slik at når vi skal velge neste intervall vil vi annenhver gang havne i venstre og høyre delintervall. Hvis vi kaller følgen av midtpunkter (m_i) blir med andre ord $m_1 = 1/2$, deretter havner vi i venstre delintervall slik at $m_2 = 1/4$, neste gang havner vi i høyre delintervall slik at $m_3 = 3/8$, neste gang i venstre delintervall slik at $m_4 = 5/16$, neste gang i høyre delintervall osv.

Midtpunktene kan beskrives ved differensligningen

- [ ] $m_n = m_{n-1}/2, \qquad m_0 = 1$
- [ ] $m_n = \frac{1}{2}(m_{n-1} + m_{n-3}), \qquad m_{-1} = 0, \quad m_0 = 1$
- [x] $m_n = \frac{1}{2}(m_{n-1} + m_{n-2}), \qquad m_{-1} = 1, \quad m_0 = 0$
- [ ] $m_n = \frac{1}{2}(m_n + m_{n-1}), \qquad m_0 = 1$
- [ ] $m_n = \frac{1}{2}(1 + m_{n-1}), \qquad m_0 = 1$

Det var det!!