

Kompendium
med oppgaver for
MAT-INF 1100

Høsten 2003

Knut Mørken

26. oktober 2003

Innhold

1	Innledning	1
2	Tall og datamaskiner	5
2.1	Naturlige, hele, rasjonale, reelle og komplekse tall	5
2.2	Datamaskiner og heltall	7
2.2.1	Representasjon av heltall	7
2.2.2	Heltallsaritmetikk	9
2.2.3	Vilkårlig store heltall	9
2.3	Datamaskiner og reelle tall	11
2.3.1	Reelle tall på normalisert form, flyttall	12
2.3.2	Addisjon og subtraksjon av flyttall	14
2.3.3	Multiplikasjon og divisjon med flyttall	16
2.3.4	Binær representasjon av flyttall	17
2.3.5	Programmering med flyttall	18
2.3.6	Flyttall med vilkårlig presisjon	20
2.3.7	Regnehastighet	20
2.3.8	Valg av variabelnavn	21
2.4	Absolutt og relativ feil	21
2.4.1	Relativ feil angir antall riktige siffer	23
2.5	Noen ord om objektorientert programmering og matematikk	24
3	Litt logikk og noen andre småting	29
3.1	Logikk	29
3.1.1	Logiske variable og sammenligninger	30
3.1.2	Grunnleggende logiske operatører	31
3.1.3	Logisk aritmetikk	33
3.1.4	Logikk og mengdelære	35
3.2	Induksjonsbevis og rekursjon	36
4	Følger og differensligninger	41
4.1	Noen forskjellige typer følger	41
4.1.1	Matematiske følger	41

4.1.2	Anvendelser av følger	43
4.1.3	Egenskaper ved følger	44
4.2	Simulering av differensligninger	44
4.3	Generering av pseudotilfeldige tall	50
4.4	Digital lyd	52
4.4.1	Lyd på datamaskin	54
4.4.2	Filtrering av lyd	56
4.4.3	Signalbehandling.	60
5	Funksjoner og kontinuitet	63
5.1	Kontinuitet og beregninger med flyttall	63
5.2	Kontinuitet og plotting av funksjoner	67
5.2.1	Litt om grafikk	67
5.2.2	Plotting av funksjoner	68
5.3	Numerisk løsning av ligninger med halveringsmetoden	70
5.4	Lyd fra funksjoner	73
5.4.1	Modulasjon	76
5.4.2	Musikkskalaer og matematikk	79
6	Derivasjon	83
6.1	Avrundingsfeil og den deriverte	84
6.1.1	Absolutt feil	84
6.1.2	Relativ feil	86
6.2	Numerisk derivasjon	90
6.3	Frekvens som derivert	92
6.4	Newtons metode	93
6.5	Diskret og kontinuerlig kapitalvekst	95
6.5.1	Diskret kapitalvekst	97
6.5.2	Kontinuerlig kapitalvekst	98
7	Integrasjon	101
7.1	Symbolisk integrasjon	101
7.2	Numerisk integrasjon	102
7.2.1	Implementasjon av trapesmetoden	102
7.2.2	Implementasjon av Simpsons metode	105
7.2.3	Valg av metode	107
7.3	Integrasjon og sannsynlighet	108
7.3.1	Hva er sannsynlighet?	108
7.3.2	Stokastiske variable	110
7.3.3	Sannsynlighetstetthet – et motiverende eksempel	111
7.3.4	Sannsynlighetstettheter og kumulative fordelinger	114
7.3.5	Stokastisk simulering	119

8	Differensialligninger	123
8.1	Numerisk løsning av differensialligninger	124
8.1.1	Eulers metode for førsteordens differensialligninger	124
8.1.2	Eulers metode for andreordens differensialligninger	127
8.2	Simulering av fallskjermhopping	128
8.2.1	Utledning av ligningen for fallskjermhopp	129
8.2.2	Enkle metoder for å lære om modellen	132
8.2.3	Variierende motstandskoeffisient	134
8.2.4	Beregning av hopperens posisjon	134
9	Approksimasjon	139
9.1	Taylor polynomer	140
9.1.1	Konstruksjon av Taylor-polynomer	140
9.1.2	Feilledet	142
9.2	Interpolasjon og andre approksimasjonsmetoder	144
9.2.1	Interpolasjon med polynomer	144
9.2.2	Andre metoder	148
9.3	Valg av basis er viktig, Bernstein-basisen	150
9.3.1	Et problematisk polynom	150
9.3.2	Noen egenskaper ved Bernstein-basisen	153
9.4	Parametriske kurver og Beziér-kurver	154
9.5	Stykkevis polynomer og flerskalaoppløsning	154
9.6	Kompresjon av lyd	154

Forord

Sammen med *Kalkulus* av Tom Lindstrøm utgjør dette kompendiet læremidlene i kurset MAT-INF 1100, *Modellering og beregninger*, ved Universitetet i Oslo. Målet med kompendiet er å gi et perspektiv på kalkulus som er fokusert mot beregninger ved hjelp av datamaskin, og dessuten vise litt av hvordan matematikken som gjennomgås i MAT 1100 og MAT-INF 1100 har anvendelser i ulike fagfelt. Både dette kompendiet og undervisningen i MAT 1100 er basert på at studentene kan programmere fra før eller samtidig følger undervisningen i INF 1000 (grunnkurset i programmering ved Institutt for informatikk).

Deler av dette kompendiet har tidligere vært brukt i kurset MAT 100B, og i planleggingen av den første versjonen både av MAT 100B og dette kompendiet høsten 2000 hadde jeg nyttig hjelp av en referansegruppe bestående av Ørnulf Borgan, Sverre Holm, Hans-Petter Langtangen, Ole Christian Lingjærde og Harald Osnes. I tillegg til å være nyttige diskusjonspartnere bidro flere av disse også direkte til kompendiet. Sverre Holm bidro med ideer til deler av stoffet om lyd, og til dette fikk jeg også tips fra Hermann Lia. Seksjonen om stokastisk modellering og sammenhengen mellom integrasjon og sannsynlighetsregning i kapittel 7 ble skrevet av Ørnulf Borgan, og han er også opphavsmann til seksjon 4.3 om generering av tilfeldige tall. Hans Petter Langtangen leverte kjernematerialet til delen om fallskjermhopping i kapittel 8. I tillegg skrev Erik Bølviken hoveddelen av seksjonen om kapitalvekst i kapittel 6.

I MAT-INF 1100 er det plass til mer stoff om beregninger enn i det tidligere MAT 100B, og i høstens versjon av kompendiet kommer det et nytt kapittel om Taylorpolynomer og approksimasjoner med anvendelser innen kompresjon av lyd og representasjon av geometri.

Pål Hermunn Johansen har bidratt med utstrakt og meget kompetent programmeringshjelp, finansiert av Matematisk institutt. Mine nærmeste kolleger Geir Dahl, Tom Lyche og Ragnar Winther har lest de fleste kapitlene og gitt nyttige kommentarer og tips. Geir Ellingsrud, Arne B. Sletsjøe og særlig Tom Lindstrøm, som har undervist de andre MAT 100 variantene, har vært gode støttespillere sammen med administrasjonen ved Matematisk institutt. I administrasjonen vil jeg særlig berømme Helge Galdal som med imponerende iver dro i gang de nye kursvariantene høsten 2000 og Heidi Raude som tålmodig og velvil-

lig har vært støtfanger mot studentene og organisator for våre stadig nye påfunn omkring evalueringsformer. Jeg vil berømme instituttet for satsingen på begynnerundervisningen, og takke for at jeg som utenforstående har fått være med på dette. Takk også til mitt eget institutt, Institutt for informatikk, som alltid har vært et godt hjem, og som meget velvillig har sluppet meg utenfor husets vegger.

Studentene som har fulgt undervisningen i MAT 100B har vært tolerante og overbærende med våre eksperimenter med undervisningsform og innhold. Selv om det sikkert er mange trykkfeil igjen ville det vært enda flere om ikke mange årvåkne studentøyne hadde saumfart teksten og rapportert feil til meg. Framfor alt har mange av dem vært entusiastiske og gitt positive tilbakemeldinger og derved gjort en stor utfordring til en morsom og trivelig oppgave.

Blindern, August 2003