

# KAPITTEL 6

## Derivasjon

Derivasjon er et av de sentrale begrepene i reell analyse, og den deriverte har en mengde anvendelser i ulike sammenhenger. Vi husker at den deriverte av funksjonen  $f$  i et punkt  $x$  er definert ved

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Hvis vi i første omgang overser at vi skal ta en grense så ser vi at den deriverte er den gjennomsnittlige endringen av funksjonen  $f$  på intervallet  $[x, x+h]$ . Som et eksempel kan vi tenke oss at vi er ute og kjører bil og at  $f(x)$  måler hvor langt vi har kjørt ved tidspunktet  $x$  (her ville det vært mer naturlig å bruke  $t$  som variabel). Mellom de to tidspunktene  $x$  og  $x+h$  tilbakelegger vi da en avstand  $f(x+h) - f(x)$  slik at gjennomsnittshastigheten i tidsrommet fra  $x$  til  $x+h$  blir  $(f(x+h) - f(x))/h$ . Hvis vi måler gjennomsnittshastigheten over stadig mindre tidsintervaller så ser vi at i grensen når  $h$  går mot null går gjennomsnittshastigheten mot den deriverte  $f'(x)$ .

Som et annet eksempel tenker vi oss at vi har en lang tynn metallstav som vi stikker inn i en flamme. Den delen som er i nærheten av flammen vil da bli oppvarmet slik at temperaturen vil variere langs staven. Hvis  $f(x)$  nå angir temperaturen i punktet  $x$  på staven så ser vi at uttrykket  $(f(x+h) - f(x))/h$  angir gjennomsnittlig endring i temperatur fra posisjon  $x$  til posisjon  $x+h$ . Den deriverte er grensen for dette uttrykket når  $h$  går mot 0 og gir dermed temperaturendringen langs staven akkurat i punktet  $x$ .

Den deriverte representerer endringen av en underliggende størrelse slik at begreper som angir vekst typisk kan angis som deriverte, for eksempel befolkningsvekst og kapitalvekst. I dette kapitlet skal vi se på et eksempel på kapitalvekst, men vi skal også se helt andre anvendelser av den deriverte, nemlig som mål på avrundingsfeil og som en måte å angi frekvensen til et lydsignal. Dessuten skal vi se at den deriverte kan utnyttes for å finne nullpunkter for funksjoner.

## 6.1 Avrundingsfeil og den deriverte

I kapittel 5 så vi litt på sammenhengen mellom kontinuitet av en funksjon i et punkt  $a$  og størrelsen på avrundingsfeilen når vi forsøker å beregne  $f(a)$ . Vi konkluderte med at når vi beregner  $f(a)$  blir en feil i  $a$  forstørret opp etter hvor bratt grafen til  $f$  er. Ved hjelp av den deriverte til  $f$  er vi i stand til å gjøre denne observasjonen mer presis. Vi husker fra kapittel 2 at feil kan måles på to måter, som absolutt feil og relativ feil. Vi begynner med å se på den absolutte feilen.

### 6.1.1 Absolutt feil

Utgangspunktet er at vi har en funksjon  $f$  som vi antar er deriverbar med kontinuerlig derivert, samt et tall  $a$  i definisjonsområdet til  $f$ ; vi ønsker å beregne verdien  $f(a)$ . På grunn av avrundingsfeil (og kanskje andre feilkilder) blir  $a$  tilnærmet med et tall  $z$  slik at vi beregner  $f(z)$  i stedet for  $f(a)$ , og nå lurer vi på om det er noen sammenheng mellom feilen  $z - a$  i  $a$  og feilen  $f(z) - f(a)$  i  $f(a)$ . La oss se på forholdet mellom de to feilene. Dette forholdet er gitt ved uttrykket  $(f(z) - f(a))/(z - a)$ , og fra middelverdisetningen vet vi at dette er lik den deriverte i et punkt  $c$  som ligger mellom  $a$  og  $z$ ,

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(c).$$

Dette kan vi omskrive til

$$f(z) - f(a) = f'(c)(z - a). \quad (6.1)$$

Vi ser derfor at feilen  $f(z) - f(a)$  i  $f(a)$  er lik feilen  $z - a$  i  $a$  multiplisert med en proporsjonalitetsfaktor som er  $f'(c)$ . I grensen når  $z$  nærmer seg  $a$ , vil også  $c$  nærme seg  $a$  slik at  $f'(c)$  nærmer seg  $f'(a)$  (husk at vi antar at  $f'$  er kontinuerlig). For de 'vanlige' funksjonene som vi møter er det derfor vanligvis akseptabelt å si at  $f'(c) \approx f'(a)$ , i allefall så lenge forskjellen mellom  $a$  og  $z$  er av størrelsesorden med avrundingsfeilen på maskinen.

Ved å være litt mer presise kan vi finne en øvre grense for feilen  $f(z) - f(a)$  ved å finne den største verdien av  $f'(c)$  på intervallet  $[a, z]$  (egentlig på intervallet  $(a, z)$ , men det er ikke sikkert vi kan finne et maksimum på et åpent intervall). For å slippe problemer med fortegn tar vi tallverdier i (6.1) og ender opp med at

$$|f(z) - f(a)| \leq \max_{c \in [a, z]} |f'(c)| |z - a|. \quad (6.2)$$

Husk at det godt kan hende at  $z$  er mindre enn  $a$ ; i så fall må intervallet  $[a, z]$  tolkes som  $[z, a]$ . Legg også merke til at det er greit å ta maksimum av  $|f'(c)|$  over det aktuelle intervallet siden vi vet fra ekstremalverdisetningen at dette maksimumet eksisterer når  $f'$  er kontinuerlig.

La oss teste dette på noen eksempler. Vi begynner enkelt med  $f(x) = 3x$  og  $a = 4$ . Det er ofte vanskelig å vite nøyaktig hva avrundingsfeilen på en datamaskin

eller lommeregner er, så for å ha godt kontrollerbare eksperimenter setter vi  $z = a + 10^{-10}$ . Ved hjelp av lommeregner kan vi nå regne ut at

$$f(z) - f(a) = f(4 + 10^{-10}) - f(4) = 3 \cdot 10^{-10}.$$

Siden  $f'(x) = 3$  for alle  $x$  stemmer dette eksakt med (6.1) i dette tilfellet, noe som ikke er så overraskende siden  $f$  er en lineær funksjon.

La oss gå over til et litt mer interessant eksempel. Vi prøver oss med  $f(x) = \sqrt{x}$  og  $a = 2$  og setter igjen  $z = a + 10^{-10}$ . Vi beregner så  $f(z)$  og  $f(a)$  og finner at  $f(z) - f(a) \approx 3.536 \cdot 10^{-11}$  slik at

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} \approx 0.3536$$

På den annen side vet vi at  $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ . Siden  $a$  og  $z$  ligger såpass nær hverandre og  $f$  er en glatt funksjon (alle dens deriverte er kontinuerlige i nærheten av  $x = 2$ ) bruker vi  $c = a$  og finner

$$f'(c) \approx f'(a) = f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0.3536.$$

Med andre ord ser vi at relasjonen (6.1) stemmer svært godt når vi regner med fire sifre i differansene.

La oss se på et tredje eksempel der  $f(x) = \tan(x^3/2 - 14)$  og  $a = \pi$ . Som før setter vi  $z = a + 10^{-10}$ . Denne gangen finner vi

$$f(z) - f(a) \approx 3.239 \cdot 10^{-7}.$$

Vi ser altså at feilen har blitt kraftig forstørret opp. I dette tilfellet er den deriverte av  $f$  i  $a$  gitt ved

$$f'(a) = \frac{3a^2}{2 \cos^2(a^3/2 - 14)} \approx 3239,$$

slik at feilen som (6.1) gir i  $f(a)$  er

$$f'(c)(z - a) \approx f'(a)(z - a) \approx 3239 \cdot 10^{-10} = 3.239 \cdot 10^{-7},$$

altså fullstendig overenstemmelse med den virkelige feilen når vi regner differansene med firesifret nøyaktighet.

La oss se på dette siste eksempelet en gang til og forsøke å estimere feilen vi får hvis vi beregner  $f(a) = f(\pi)$  med 64-bits flyttall. Hvis vi kjenner feilen  $|z - \pi|$  er dette enkelt siden vi da kan finne  $|f(z) - f(\pi)|$  ved å multiplisere med  $f'(\pi)$ . Vi vet at  $z$  er den beste tilnærmingen til  $\pi$  med 64-bits flyttall. Og siden 64-bits flyttall har en mantisse på 53 bits der et bit brukes til fortegn, kan vi regne med at de 52 første binære sifrene i  $z$  stemmer med  $\pi$ , mens det neste binære sifferet kan være feil. For tall nær 1 betyr dette at avrundingsfeilen vil være omtrent  $2^{-53}$ .

Men nå er  $\pi$  litt større enn 1 så vi må regne med at avrundingsfeilen multipliseres opp tilsvarende og er  $\pi$  ganger større enn dette,

$$|z - \pi| \leq \pi \cdot 2^{-53} \approx 3.488 \cdot 10^{-16}.$$

Som før har vi  $f'(\pi) \approx 3239$  slik at

$$|f(z) - f(\pi)| \leq 3239\pi \cdot 2^{-53} \approx 1.130 \cdot 10^{-12}.$$

Legg merke til at dette argumentet viser at en øvre grense for avrundingsfeilen  $|z - a|$  er  $|a|2^{-53}$  når vi bruker 64-bits flyttall, uansett hva  $|a|$  er. På denne måten kan vi derfor estimere avrundingsfeilen i alle funksjoner når vi kjenner den deriverte.

I de fleste tilfeller kan vi ved hjelp av denne teknikken holde god kontroll på avrundingsfeilen. Anta for eksempel at vi skal beregne verdier på funksjonen  $\sin x$ . Siden  $D[\sin x] = \cos x$  og  $|\cos x| \leq 1$  for alle  $x$  ser vi at

$$|f(z) - f(a)| = |\cos c||z - a| \leq |z - a|$$

uansett hva  $a$  og  $z$ . Når vi beregner verdier på  $\sin x$  bør altså aldri avrundingsfeilen i  $\sin a$  bli større enn avrundingsfeilen i  $a$ , og et lignende argument viser at det samme gjelder for  $\cos x$ . Men legg merke til at dette gjelder den absolutte feilen  $|f(z) - f(a)|$ . Denne feilen sier ikke noe om hvor mange riktige siffer vi har — for å uttale oss om dét må vi se på den relative feilen.<sup>1</sup>

### 6.1.2 Relativ feil

Vi husker fra kapittel 2 at den absolutte feilen er litt misvisende siden den ikke tar hensyn til størrelsen på tallene vi arbeider med. En absolutt feil på  $10^{-2}$  i et tall  $a$  som er nær 1 betyr at vi har 2–3 riktige siffer, mens hvis feilen er den samme og tallet er av størrelsesorden  $10^{10}$  så har vi 12–13 riktige siffer. Når vi dividerer den absolutte feilen med størrelsen på tallet vi arbeider med får vi relativ feil og denne angir omtrent hvor mange riktige siffer vi har. Hvis den relative feilen er  $10^{-10}$  regner vi at vi har omtrent 10 riktige siffer. I forbindelse med beregning av verdier for en funksjon  $f$  er det derfor ofte nyttigere å relatere de relative feilene enn de asbolutte feilene, slik vi gjorde i (6.1).

Hvis  $z$  er en tilnærming til  $a$  så er den relative feilen gitt ved

$$\frac{|z - a|}{|a|},$$

mens den relative feilen i  $f(z)$  er

$$\frac{|f(z) - f(a)|}{|f(a)|}.$$

<sup>1</sup>Selv om vi ikke *bør* få stor avrundingsfeil er det allikevel *mulig* at vi kan få en stor feil. Det er nemlig ikke sikkert at algoritmen som brukes er god nok til at avrundingsfeilen blir liten. Det kan særlig være et problem når  $x$  er svært stor.

Fra relasjonen (6.1) ser vi da at

$$\frac{|f(z) - f(a)|}{|f(a)|} = \frac{|af'(c)|}{|f(a)|} \cdot \frac{|z - a|}{|a|}, \quad (6.3)$$

der  $c$  ligger mellom  $a$  og  $z$ , som før. Som i (6.2) kan vi kvitte oss med  $c$  ved å bruke maksimumsverdien til  $f'$ ,

$$\begin{aligned} \frac{|f(z) - f(a)|}{|f(a)|} &\leq \frac{|a| \max_{c \in [a, z]} |f'(c)|}{|f(a)|} \cdot \frac{|z - a|}{|a|} \\ &\approx \frac{|af'(a)|}{|f(a)|} \cdot \frac{|z - a|}{|a|} \end{aligned} \quad (6.4)$$

(vi antar igjen at  $f'$  er kontinuert). Tallet

$$\kappa(f; a) = \frac{|af'(a)|}{|f(a)|} \quad (6.5)$$

kalles *kondisjonstallet* til  $f$  i  $a$  og forteller hvor mye den relative feilen i  $a$  forstørres opp når vi beregner  $f(a)$ . Hvis kondisjonstallet er 100 er altså den relative feilen i  $f(a)$  blitt 100 ganger større enn den relative feilen i  $a$ , så med andre ord er antall riktige siffer i  $f(a)$  to mindre enn antall riktige siffer i  $a$ .

La oss regne ut kondisjonstallet i de eksemplene vi så på tidligere. Når  $f(x) = 3x$  så får vi  $\kappa(f; a) = 1$  slik at den relative feilen i  $a$  og  $f(a)$  er den samme uansett hva  $a$  er, noe som stemmer godt med de numeriske verdiene vi regnet ut.

Det neste eksempelet var  $f(x) = \sqrt{x}$ . Vi finner da at  $\kappa(f; a) = 1/2$  for alle verdier av  $a$ . Hvis vi regner ut de to relative feilene med  $a = 2$  og  $z = 2 + 10^{-10}$  så får vi

$$\frac{|f(z) - f(a)|}{|f(a)|} = 2.500 \cdot 10^{-11} \quad \frac{|z - a|}{|a|} = 5 \cdot 10^{-11},$$

som vi ser stemmer med et kondisjonstall på 1/2.

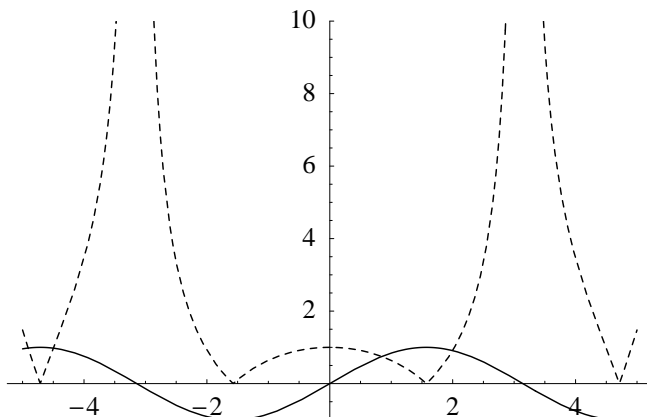
I det tredje eksempelet var  $f(x) = \tan(x^3/2 - 14)$  og vi finner da ved derivasjon at

$$\kappa(f; a) = \left| \frac{3a^3}{2 \sin(a^3/2 - 14) \cos(a^3/2 - 14)} \right|.$$

Med  $a = \pi$  får vi da  $\kappa(f; \pi) \approx 689.5$ , mens de to relative feilene er gitt ved

$$\frac{|f(z) - f(a)|}{|f(a)|} = 2.195 \cdot 10^{-8} \quad \frac{|z - a|}{|a|} = 3.183 \cdot 10^{-11}.$$

Beregner vi forholdet mellom de to relative feilene ser vi at dette stemmer godt overens med kondisjonstallet. Vi ser altså at den relative feilen i  $a$  blir multiplisert



**Figur 6.1.** Funksjonen  $\sin x$  og dens kondisjonstall (stiplet) på intervallet  $[-5, 5]$ .

med en faktor på nesten 1000 når vi beregner  $f(a)$  i dette tilfellet. Med andre ord mister vi nesten 3 desimale siffer i denne beregningen.

Det er viktig å være klar over at kondisjonstallet er uavhengig av antall siffer vi regner med, det sier bare noe om hvordan antall riktige siffer *endrer* seg når vi beregner  $f(a)$ . Et kondisjonstall på 100 er derfor katastrofalt hvis vi starter med 2 riktige siffer, mens det er helt uproblematisk hvis vi bruker 64-bits flyttall og dermed starter med 16 riktige siffer. Men dersom kondisjonstallet blir så stort som  $10^{10}$  begynner det også å bli dramatisk selv om vi bruker 64-bits flyttall, siden det betyr at antall riktige siffer blir redusert fra 16 til 6. I det siste eksempelet over var kondisjonstallet i underkant av 1000, slik at hvis vi regner med 64 bits flyttall vil verdien av  $f(\pi)$  i dette tilfellet bare inneholde omtrent  $16 - 3 = 13$  riktige desimale siffer.

Et annet vesentlig poeng med kondisjonstallet er at vi trenger ikke nødvendigvis å kjenne dets nøyaktige verdi. Vi bruker det til å få en indikasjon på hvor mange siffer vi kan risikere å miste når vi beregner  $f(a)$ , og da er det bare viktig å vite hvilken størrelsesorden kondisjonstallet har. Er kondisjonstallet omtrent  $10^n$  vil den relative feilen i  $a$  bli multiplisert med  $10^n$  slik at vi vil miste omtrent  $n$  desimale siffer. Vi trenger altså ikke kjenne det første sifferet i kondisjonstallet en gang, og litt grovt kan vi si at det holder om relativ feil i kondisjonstallet er mindre enn 500%! Dette betyr også at tilnærmingen vi gjorde i (6.4) da vi erstattet  $c$  med  $a$  vanligvis ikke vil være kritisk siden  $f'(c)$  og  $f'(a)$  i det minste vil være av samme størrelsesorden når  $c$  er nær  $a$ . I praksis vil som regel  $c$  være så nær  $a$  at den tilnærmede likheten i (6.4) kan regnes som likhet når vi diskuterer avrundingsfeil i en datamaskin. Med andre ord vil vi ut fra kondisjonstallet slik det er definert i (6.5) som regel kunne gi et svært godt estimat på hvor mange siffer vi vil miste når vi forsøker å beregne  $f(a)$ .

Kondisjonstallet ser altså ut til å gi et godt mål på hvor mye nøyaktigheten kan reduseres i numeriske beregninger. Men hvis vi ser litt nærmere på uttrykket (6.5) så inneholder det et faretruende element, nemlig divisjon med  $f(a)$ . Vi ser fra (6.4) at denne divisjonen arves direkte fra uttrykket for den relative feilen i  $f(a)$ , og når  $f(a) = 0$  er kondisjonstallet uendelig, akkurat som den relative feilen. Når  $f(a) = 0$  bryter altså hele konseptet 'relativ feil' sammen. Men da er det god grunn til å være på vakt når begrepet nesten bryter sammen, gir kondisjonstallet fornuftig informasjon om antall riktige siffer når  $f(a)$  er liten?

I figur 6.1 has vi plottet  $f(x) = \sin x$  sammen med kondisjonstallet på intervallet  $[-5, 5]$ . På dette intervallet har  $\sin x$  tre nullpunkter, nemlig i  $-\pi$ ,  $0$  og  $\pi$ . Dersom kondisjonstallet er til å stole på så ser vi at nullpunktet i  $x = 0$  er uproblematisk, mens nullpunktene i  $-\pi$  og  $\pi$  er problematiske i den forstand at antall riktige siffer i  $\sin x$  reduseres betraktelig når vi nærmer oss disse nullpunktene, inntil kondisjonstallet blir udefinert i  $x = \pm\pi$ . Dette står i skarp kontrast til det vi fant gjelder for den absolutte feilen. Når vi regner ut  $\sin a$  er den absolutte feilen i  $\sin a$  i verste fall like stor som den absolutte feilen i  $a$ .

For å se hva som skjer forsøker vi å beregne  $\sin a$  i  $a = \pi(1 - 10^{-15})$ , med 64-bits flyttall. Dette punktet er et irrasjonalt tall så maskinen vil erstatte  $a$  med det nærmeste flyttallet  $z$ . I følge Mathematica er forskjellen mellom  $z$  og  $a$  med 4 siffrers nøyaktighet

$$|z - a| \approx 4.031 \cdot 10^{-16}.$$

Siden den deriverte til  $\sin x$  er  $\cos x$  og  $\cos a \approx 1$  forteller (6.2) oss at den absolutte feilen i  $\sin a$  er

$$|\sin z - \sin a| \approx \cos a |z - a| \approx 4.031 \cdot 10^{-16}. \quad (6.6)$$

Beregner vi de to verdiene av sinus får vi<sup>2</sup>

$$\sin a = 3.142 \cdot 10^{-15}, \quad \sin z = 2.738 \cdot 10^{-15}.$$

Venstresiden i (6.6) er derfor  $4.031 \cdot 10^{-16}$ , så (6.2) stemmer bra i dette tilfellet.

De relative feilene i  $a$  og  $f(a)$  kan vi nå lett regne ut,

$$\frac{|z - a|}{|a|} \approx 1.283 \cdot 10^{-16}, \quad \frac{|f(z) - f(a)|}{|f(a)|} = 0.1283,$$

mens kondisjonstallet er gitt ved

$$\kappa(\sin; x) = a |\cot a| = 1.000 \cdot 10^{15}.$$

Dette ser vi stemmer svært bra med forholdet mellom de to relative feilene, slik at (6.4) holder med likhet hvis vi regner med 4 siffer.

<sup>2</sup>I disse beregningene har vi brukt Mathematica og regnet med 30 siffrers nøyaktighet — de verdiene som vi får på en lommeregner eller med 64-bits flyttall blir i dette tilfellet for unøyaktige.

Kondisjonstallet er  $10^{15}$  i dette tilfellet, så i følge vår analyse mister vi 15 desimale siffer når vi regner ut  $\sin a$ . Beregningene våre viser at denne dramatiske effekten faktisk er en realitet. Vi vet at  $a$  er kjent med en absolutt feil på omtrent  $10^{-16}$ , og den absolutte feilen i  $\sin a$  er omtrent like stor. Men når  $\sin a$  er av størrelsesorden  $10^{-15}$  betyr dette at avrundingsfeilen nesten er av samme størrelsesorden som  $\sin a$ . Følgen av dette er at av de 16 desimale sifrene i  $\sin a$  som maskinen serverer oss er bare det første til å stole på. Hvis vi forsøker å beregne  $\sin x$  i et punkt  $x$  som ligger enda nærmere  $\pi$  vil kondisjonstallet bli enda større og svaret meningsløst siden det ikke vil inneholde noen riktige siffer.

Konklusjonen er at vi ut fra kondisjonstallet kan si nokså presist hvor mange riktige siffer vi har i en beregnet funksjonsverdi. Spesielt bør vi være skeptiske til nøyaktigheten i svært små funksjonsverdier (bortsett fra når argumentet  $a$  også er lite) og funksjonsverdier i nærheten av områder der den deriverte nærmer seg uendelig siden kondisjonstallet i begge tilfeller vil kunne bli svært stort.

Det er viktig å understreke at funksjonsberegninger for det aller meste er uproblematisk. Hvis vi går tilbake til figur 6.1 er det bare svært små områder rundt nullpunktene som skaper problemer, og det er sjelden vi trenger å beregne akkurat disse verdiene med ekstrem nøyaktighet. På samme måte vil en ved å plote en del kondisjonstall se at stort sett så kan funksjoner beregnes med god nøyaktighet. Det gjelder bare å kjenne til problemene som kan oppstå slik at en forstår hva som foregår de få gangene det er nødvendig å beregne problematiske funksjonsverdier. Ellers kan en lett bli sittende å lete etter det en tror er feil i programkoden, men som faktisk har sin årsak i problematiske flyttallsberegninger.

## 6.2 Numerisk derivasjon

For en funksjon gitt ved en eksplisitt formel er det i prinsippet enkelt å finne en formel for den deriverte også. Dermed kan vi på en grei måte beregne verdien av den deriverte i forskjellige punkter etter behov. Men i mange sammenhenger har vi ingen enkel formel for funksjonen vi arbeider med. For eksempel er det ofte slik at verdien av en funksjon bare er kjent i noen isolerte punkter. Dette skjer når funksjonen framkommer ved måling av en eller annen størrelse, eller når funksjonen er resultatet av numeriske beregninger der vi bare produserer funksjonsverdier i noen utvalgte punkter. Når vi arbeider med digital lyd, for eksempel, er funksjonen som beskriver hvordan lufttrykket varierer bare kjent i samplingspunktene. Vi skal også se senere at mange differensialligninger (en differensialligning er en ligning som involverer en ukjent funksjon (som skal bestemmes) og enkelte av funksjonens deriverte) bare kan løses med numeriske metoder som produserer en tilnærming til løsningen i et endelig antall punkter.

Funksjoner som bare er kjent i isolerte punkter kan åpenbart ikke deriveres på vanlig måte, men det fins et rikt utvalg av numeriske metoder for å finne numeriske tilnærminger til den deriverte i slike situasjoner. Her skal vi bare se på



den enkleste av disse metodene. Den deriverte er definert ved grenseprosessen

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Hvis vi bare kjenner verdien til funksjonen  $f$  i punktene  $x_1$  og  $x_2$  er det derfor naturlig å bruke brøken

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (6.7)$$

som en tilnærming til  $f'(x)$  når  $x$  er nær  $x_1$  og  $x_2$ . Hvor god denne tilnærmingen er avhenger både av  $f$  og av avstanden mellom de tre punktene  $x$ ,  $x_1$  og  $x_2$ .

For å se hvor godt dette fungerer i praksis tester vi med en kjent funksjon, nemlig  $f(x) = x^2$ . Utfordringen er å beregne  $f'(1/2)$  bare ved hjelp av funksjonsverdier i nærheten av  $x = 1/2$  — vi har altså ikke lov til å bruke formelen  $f'(x) = 2x$ . La oss anta at vi kjenner verdiene  $f(0.5) = 0.25$  og  $f(0.6) = 0.36$ . Vi kan da bruke formelen (6.7) som gir

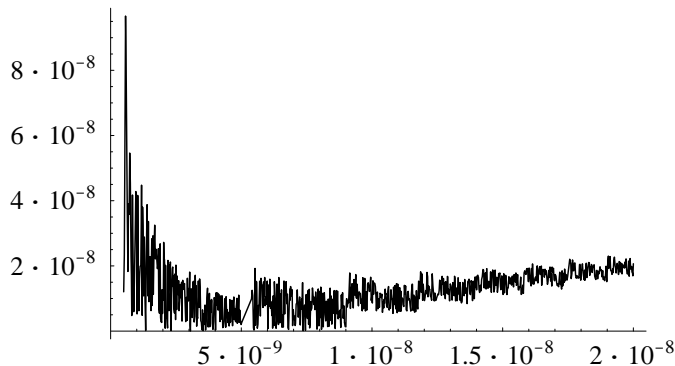
$$f'(0.5) \approx \frac{f(0.6) - f(0.5)}{0.1} = \frac{0.36 - 0.25}{0.1} = 1.1.$$

Nå vet vi at i dette tilfellet er  $f'(x) = 2x$  slik at den riktige verdien er  $f'(0.5) = 1$ . Som vi ser er ikke 1.1 'helt på jordet', men feilen er ganske stor.

Siden den deriverte er grenseverdien for  $(f(0.5+h) - f(0.5))/h$  når  $h$  går mot 0 er det rimelig å anta at vi kan få feilen mindre ved å kombinere  $f(0.5)$  med et punkt som ligger nærmere 0.5. Prøver vi med  $h = 10^{-5}$ ,  $10^{-10}$ ,  $10^{-13}$ ,  $10^{-16}$  og  $10^{-17}$  får vi med 64 bits flytttall

$$\begin{aligned} f'(0.5) &\approx \frac{f(0.5 + 10^{-5}) - f(0.5)}{10^{-10}} \approx 1.00001, \\ f'(0.5) &\approx \frac{f(0.5 + 10^{-10}) - f(0.5)}{10^{-10}} \approx 1.000000083, \\ f'(0.5) &\approx \frac{f(0.5 + 10^{-13}) - f(0.5)}{10^{-13}} \approx 1.000310945, \\ f'(0.5) &\approx \frac{f(0.5 + 10^{-16}) - f(0.5)}{10^{-16}} \approx 1.110223025, \\ f'(0.5) &\approx \frac{f(0.5 + 10^{-17}) - f(0.5)}{10^{-17}} \approx 0.0 \end{aligned}$$

Vi ser at feilen først avtar, men så øker igjen når  $h$  avtar. Årsaken er, ikke uventet, avrundingsfeil. Hvis vi husker tilbake til kapittel 2 så er den mest kritiske flyttallsoperasjonen vi kan gjøre å trekke fra hverandre to tall som er omtrent like store, og det er nettopp det vi må gjøre for å utføre numerisk derivasjon. Jo mindre  $h$  er, dess nærmere vil  $f(0.5+h)$  være  $f(0.5)$ , og når  $h = 10^{-17}$  blir de to



**Figur 6.2.** Den totale feilen ved numerisk derivasjon for verdier av  $h$  i intervallet  $[10^{-9}, 2 \cdot 10^{-8}]$ .

funksjonsverdiene like når vi regner med 64-bits flyttall slik at vi får tilnærmingen 0.0 til  $f'(0.5)$ .

Vi ser altså ut til å ha to feilkilder som trekker i hver sin retning. Den matematiske feilen som kommer av at vi erstatter  $f'(0.5)$  med uttrykket  $(f(0.5 + h) - f(0.5))/h$  blir mindre når  $h$  blir liten, mens avrundingsfeilen øker når  $h$  avtar siden de to tallene som skal subtraheres i telleren da blir stadig likere. Dette tyder på at det må finnes en 'beste' verdi av  $h$  som gjør den totale feilen minst mulig. Noen numeriske eksperimenter viser at den beste  $h$ -verdien er nær  $10^{-8}$ . I figur 6.2 har vi plottet ut absoluttverdien av forskjellen mellom  $f'(0.5)$  og den numeriske tilnærmingen, for verdier av  $h$  mellom  $10^{-9}$  og  $2 \cdot 10^{-8}$ . Vi ser at feilen varierer forholdsvis mye, men det er tydelig at den har et minimum for  $h \approx 5 \cdot 10^{-9}$ . For denne verdien av  $h$  får vi  $f'(0.5) \approx 0.999999994$  som vi ser er litt bedre enn tilnærmingen vi hadde for  $h = 10^{-10}$ .

Fenomenet som vi har observert over er et generelt problem som gjelder ved numerisk derivasjon av de fleste funksjoner. Det er lett å tenke som så at vi bør la  $h$  bli så liten som mulig slik at vi kan få en nøyaktig verdi for den deriverte, men det er altså ikke så lurt. Det bør også nevnes at det fins andre metoder der den matematiske feilen er mindre slik at vi kan få bedre nøyaktighet med samme verdi av  $h$  (og mindre avrundingsfeil). Endelig må vi også huske på at beregningene vi gjorde her var et numerisk eksperiment. I en praktisk situasjon er det ikke sikkert vi har særlige valgmuligheter når det gjelder størrelsen på  $h$ .

### 6.3 Frekvens som derivert

I kapittel 5 så vi at en funksjon som  $\sin 2\pi 440t$  svarer til en lyd med frekvens 440 Hz. Ved å bytte ut sinus med en annen funksjon som ossilerer regelmessig fikk vi fram andre lyder med samme frekvens, og vi så også hvordan vi kunne generere

mer spennende lyder ved modulasjon. Ved FM-modulasjon brukte vi funksjoner på formen

$$\sin \theta(t), \quad (6.8)$$

og det viste seg at slike funksjoner gir opphav til lydsignaler med varierende frekvens. Spørsmålet vi stiller oss nå er om det går an å gi en enkel matematisk formel for hvilken frekvens  $f(t)$  vi hører ved tidspunktet  $t$  når vi avspiller funksjonen (6.8). En slik formel fins og det viser seg at frekvensen vi hører er gitt ved funksjonen

$$f(t) = \frac{\theta'(t)}{2\pi}.$$

Vi ser at dette stemmer godt med tilfellet der  $\theta(t) = 2\pi 440t$  siden vi da får konstant frekvens 440. Hvorfor denne formelen gjelder skal vi komme tilbake til senere. Ved å kombinere denne frekvensformelen med integrasjon kan vi foreskrive hvordan frekvensen skal variere og deretter beregne lydsignalet ved integrasjon.

## 6.4 Newtons metode

Som vi nevnte i forbindelse med halveringsmetoden i kapittel 5 er det bare unntaksvis at vi kan finne en eksakt formel for nullpunktet i en ligning, mens tilnærminger ved hjelp av numeriske metoder kan beregnes i de aller fleste tilfeller. Halveringsmetoden er en robust metode for å finne slike tilnærminger, men den konvergerer ikke så raskt. Newtons metode, som er beskrevet i seksjon 7.3 i *Kalkulus*, er ikke så robust og konvergerer ikke alltid, men når den konvergerer går det som regel meget raskt. Metoden kan dessuten generaliseres og brukes i mange ulike sammenhenger. Her skal vi se på noen viktige egenskaper og begrensninger ved denne metoden.

Utgangspunktet for Newtons metode er at vi har en funksjon  $f$  som er deriverbar og som vi vet har et nullpunkt som vi kaller  $r$ . På en eller annen måte (for eksempel ved å se på et plott) gjetter vi på at et tall  $x_0$  er en god tilnærming til nullpunktet. For å finne en bedre tilnærming konstruerer vi tangenten  $l(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$  til  $f$  i  $x_0$ , finner nullpunktet  $x_1$  til  $l(x)$  og satser på at det er en bedre tilnærming til  $r$ . Enkel regning viser at  $x_1$  er gitt ved

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Denne prosessen kan vi åpenbart fortsette, og på den måten genererer vi stadig nye tilnærminger til nullpunktet.

Det er ikke på noen måte sikkert at denne prosessen vil konvergere, og det er ikke så enkelt å gi gode kriterier for hvordan vi kan avgjøre om vi har konvergens eller ikke. Det beste er å først forsikre seg om at det er et nullpunkt i nærheten av  $x_0$  ved hjelp av for eksempel skjæringssetningen eller et plott. Det er da gode muligheter for at metoden vil konvergere, og en vanlig måte å teste dette på er

ved å se om avstanden mellom  $x_{n+1}$  og  $x_n$  blir liten når  $n$  vokser. Hvis forskjellen mellom  $x_n$  og  $x_{n+1}$  for en  $n$  er mindre enn for eksempel  $10^{-10}$  (eller et annet passende, lite tall), stopper vi iterasjonene og sier at  $x_{n+1}$  er et godt estimat for nullpunktet  $r$  (eventuelt kan vi bruke et relativt feilestimat som  $|x_{n+1} - x_n|/|x_{n+1}|$ , men dette vil skape problemer hvis  $\lim x_n = 0$ ). Det er viktig å være klar over at dette ikke er idiotsikkert, men det er vanskelig å finne noe bedre konvergenzkriterium.

Som sagt kan det godt hende at Newtons metode ikke konvergerer, så det er ingenting i veien for at forskjellen mellom  $x_n$  og  $x_{n+1}$  aldri blir liten, uansett hvor stor  $n$  blir. For å hindre at vi ender opp med en evig løkke bør vi derfor ikke tillate at antall iterasjoner overstiger en forhåndsbestemt øvre grense. Ut fra disse betraktningene kan vi formulere Newtons metode som en algoritme.

**Algoritme 6.1 (Newtons metode).** *La  $f$  være en funksjon som er deriverbar med derivert  $f'$ , la  $x_0$  være en initiell tilnærming til et nullpunkt for  $f$ , la  $\text{eps}$  være en gitt toleranse og la  $\text{nmax}$  være et heltall som angir det maksimale antall iterasjoner som tillates. Koden under vil enten konvergere mot et av  $f$ 's nullpunkter eller stoppe etter  $\text{nmax}$  iterasjoner.*

```
double x0, xp, x, e;
int n;
x = x0; e = maxint; n = 1;
while (e>eps & n<=nmax) {
    xp = x;
    x = xp - f(xp)/Df(xp);
    e = abs(x-xp);
    n = n + 1;
}
```

Her er det antatt at  $f$  og  $f'$  er tilgjengelig som to metoder  $f$  og  $DF$ . Hvis  $e \leq \text{eps}$  ved utgangen av koden antar vi at  $x$  er en tilnærming til nullpunktet med feil mindre enn  $\text{eps}$ . Hvis ikke konvergerer ikke Newtons metode etter  $\text{nmax}$  iterasjoner.

Det mest hensiktsmessige er som regel å implementere en kodebit som dette som en metode, for eksempel `newton(f, Df, x0, eps, nmax)`.

Det er viktig å huske på at selv om koden i algoritmen stopper ved at feilen  $e$  har blitt mindre enn (eller lik)  $\text{eps}$  er det ikke helt sikkert at  $x$  er nær et nullpunkt. Det kan for eksempel være lurt å sjekke på et plott om  $x$  virkelig ligger nær et nullpunkt. Eventuelt kan vi i tillegg til  $e \leq \text{eps}$  også kreve  $f(x) \leq \text{delta}$ , der  $\text{delta}$  er en passende toleranse, før vi stopper iterasjonene.

For at Newtons metode skal konvergere er det visse betingelser som bør være tilfredstilt. De viktigste er:

- Hvis nullpunktet vi skal finne er  $r$  bør vi ha  $f'(r) \neq 0$  (ikke strengt nødvendig).

- Den andrederiverte til  $f$  bør være kontinuerlig i en omegn om nullpunktet  $r$ .
- Startverdien  $x_0$  må være tilstrekkelig nær nullpunktet  $r$ .

Den første betingelsen er faktisk ikke essensiell, men hvis  $f'(r) = 0$  vil dette redusere konvergensthastigheten og når vi nærmer oss nullpunktet vil vi få divisjon med stadig mindre tall som kan skape problemer. Det tryggeste er derfor å anta at  $f'(r) \neq 0$ .

Den andre betingelsen er nødvendig for å garantere konvergens når vi starter nær nullpunktet. Et eksempel som illustrerer dette er funksjonen definert ved

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{når } x \geq 0, \\ -\sqrt{-x}, & \text{når } x < 0, \end{cases}$$

slik som vist i *Kalkulus*. Uansett hvilken verdi  $x_0$  vi starter med vil Newtons metode bare hoppe mellom de to verdiene  $x_0$  og  $-x_0$ , se figur 6.3 (c).

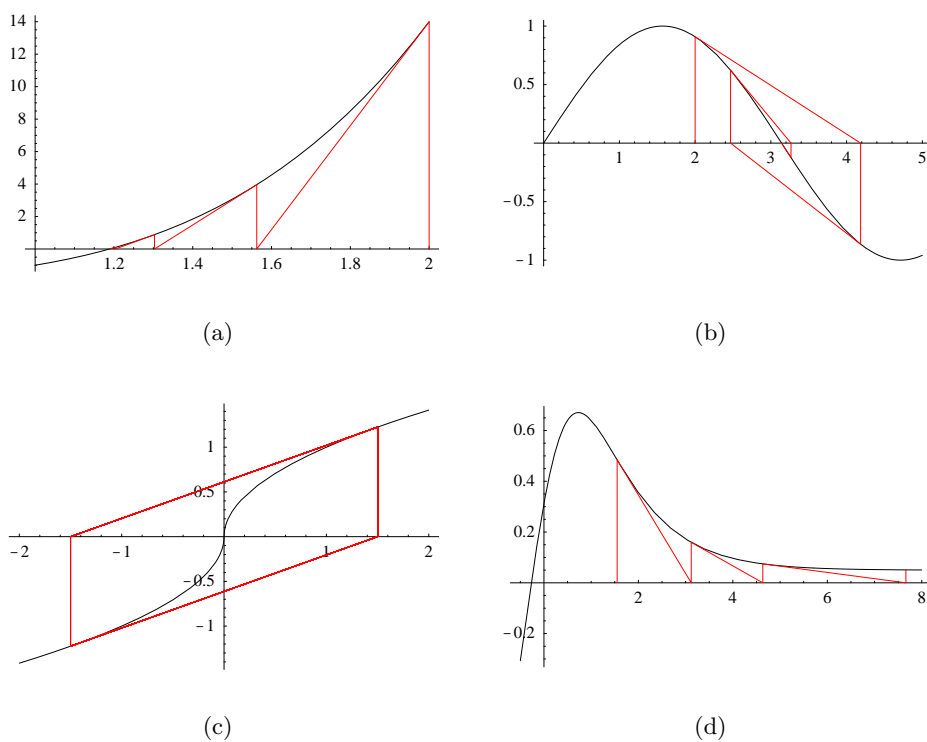
Den tredje betingelsen er vanskelig å håndtere siden den ikke sier noe presist om hvor nær et nullpunkt vi må starte, bare at vi må starte 'tilstrekkelig nær'. Det er mulig å gjøre betingelsen mer presis og gi en verdi for  $\delta$ , men som regel vil denne verdien være mye mindre enn det som er nødvendig. Et eksempel på hva som kan skje hvis vi ikke starter nær nok et nullpunkt er vist i figur 6.3 (d).

Kanskje det mest karakteristiske med Newtons metode er konvergensthastigheten når den først konvergerer. Det er mulig å vise at når metoden konvergerer mot et nullpunkt så vil antall riktige siffer i  $x_{n+1}$  være det dobbelte av antall riktige siffer i  $x_n$  når vi kommer nær nullpunktet. Med 64-bits flyttall har vi totalt omtrent 16 desimale siffer, så hvis vi klarer å finne en  $x_0$  som ligger nær nullpunktet trenger vi ikke mange iterasjoner for å få 16 riktige siffer — ofte vil det være nok med 3 eller 4 iterasjoner.

Newtons metode og halveringsmetoden komplementerer hverandre på en god måte. En mulig strategi er å bruke halveringsmetoden til å begynne med for å forsikre seg om at en er rimelig nær et nullpunkt og så skifte til Newtons metode for å finne nullpunktet med god nøyaktighet.

## 6.5 Diskret og kontinuerlig kapitalvekst

I kapittel 4 i *Kalkulus* så vi et par eksempler på hvordan kapitalvekst kan modelleres ved hjelp av differensligninger. I denne seksjonen skal vi se litt nærmere på slike modeller. Modellering med differensligninger i denne sammenhengen betyr at vi bare måler kapitalen ved isolerte tidspunkter, for eksempel en gang i året, men vi skal også se at vi kan få en kontinuerlig modell ved å foreta en passende grenseovergang i differensligningen. Framstillingen her er noe knapp i og med at stoffet suppleres med oppgaver.



**Figur 6.3.** Fire eksempler på iterasjoner med Newtons metode. I (a) konvergerer  $\{x_n\}$  pent mot nullpunktet fra høyre, mens verdiene i (b) ligger til høyre og venstre for nullpunktet annenhver gang. I eksempelet i (c) har vi ikke konvergens, metoden vil bare hoppe mellom de to verdiene  $x_0$  og  $-x_0$ . Vi har heller ikke konvergens i (d); her vil  $\{x_n\}$  divergere mot uendelig.

### 6.5.1 Diskret kapitalvekst

Den enkleste modellen for kapitalvekst har vi når vi setter en sum penger  $K_0$  i banken som betaler oss en rente  $r$  pr. tidsenhet. Etter  $n$  tidsenheter har da kapitalen vokst til  $K_n$ , der  $K_n$  er gitt ved

$$K_n = (1 + r)K_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.9)$$

Det er lett å vise at løsningen av denne differensligningen er gitt ved

$$K_n = (1 + r)^n K_0. \quad (6.10)$$

Tidsenheten er her ikke spesifisert direkte og kan være dager, uker, år eller et annet fast tidsintervall. Men uansett hva tidsenheten er så er det viktig at renten  $r$  gis i forhold til riktig tidsenhet. Hvis renta er 10% pr. år og vi oppgir  $r$  som  $r = 0.1$  betyr det implisitt at  $n$  teller antall år.

I virkeligheten vet vi at renta varierer og dette kan vi modellere ved å endre differensligningen til

$$K_n = (1 + r_n)K_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.11)$$

Som før antar vi at startkapitalen er gitt som  $K_0$ . I denne ligningen kan vi angi renta for hver  $n$ , og en mulig modell for variabel rente er gitt ved formelen

$$r_n = r + \frac{r}{2} \cos(2\pi n/T) \quad (6.12)$$

der  $T$  er et helt tall. I dette tilfellet vil renta variere regelmessig mellom  $3r/2$  og  $r/2$ , noe som kan virke nokså kunstig, men denne modellen fanger likevel opp vesentlige trekk ved et svingende rentenivå.

I kapittel 4 i *Kalkulus* så vi også hvordan vi kan inkludere inn- eller utbetalinger i modellen. Hvis vi endrer differensligningen til

$$K_n = (1 + r)K_{n-1} - b, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.13)$$

har vi en modell der vi i tillegg til å opparbeide renter tar ut et beløp  $b$  i hver tidsperiode. Vi kan også angi innbetalinger ved å la  $b$  være negativ. Ved induksjon kan vi vise at løsningen av denne inhomogene differensligningen er gitt ved

$$K_n = (1 + r)^n K_0 - \frac{b}{r} ((1 + r)^n - 1), \quad (6.14)$$

(eller vi kan løse ligningen ved hjelp av metodene i seksjon 4.2 i *Kalkulus*).

Med ligningen (6.13) kan vi også modellere tilbakebetaling av lån. Anta at vi tar opp et lån på  $K_0$  kroner ved tid  $n = 0$  med rente  $r$  og at vi betaler tilbake et beløp  $b$  pr. tidsenhet som dekker både renter og avdrag. Når det tilbakebetalte beløpet pr. tidsenhet er konstant slik som her kalles lånet et *annuitetslån*. Fra

formelen (6.14) kan vi regne ut hvor stor  $b$  må være for at hele lånet skal være nedbetalt etter for eksempel 10 eller 20 år, eller mer generelt etter  $N$  år, se oppgave 4.

Ligningen (6.13) kan også brukes til å modellere pensjonssparing. Da er  $K_0$  oppspart kapital når pensjonsutbetalingene begynner, mens  $r$  er renta og  $b$  det fast utbetalte pensjonsbeløpet.

### 6.5.2 Kontinuerlig kapitalvekst

I forbindelse med banksparing er vi vant til at renter beregnes og legges til kapitalen ved slutten av hvert år. Ved renteberegninger på lån derimot er det vanlig med flere renteberegninger pr. år, og i aksjemarkedet og andre mer avanserte finansmarkeder er det vanlig å regne med kontinuerlig rente. La oss se hva dette innebærer.

Hvis vi starter med et beløp  $K_0$  og har en rente  $r$  så vil kapitalen øke til  $(1+r)K_0$  etter én tidsperiode. Alternativt kan vi tenke oss at vi har to renteutbetalinger, men at renta da er redusert til  $r/2$  ved hver utbetaling. Da vil vi etter en hel tidsperiode ha beløpet

$$(1+r/2)(1+r/2)K_0 = (1+r/2)^2 K_0.$$

Hvis vi fordeler renta med  $r/3$  over tre utbetalinger får vi på samme måte at beløpet etter en hel tidsperiode har vokst til  $(1+r/3)^3 K_0$ . Generelt kan vi fordele renta med  $r/n$  over  $n$  utbetalinger. Kapitalen etter en hel tidsperiode vil da være

$$(1+r/n)^n K_0. \quad (6.15)$$

Et naturlig spørsmål er nå hva som skjer hvis vi stadig øker antall renteutbetalinger og bruker en tilsvarende liten rente hver gang. Med andre ord, hva skjer når vi lar  $n$  vokse over alle grenser i (6.15)? Ved hjelp av l'Hopitals regel er det ikke vanskelig å vise at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1+r/n)^n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln(1+r/n)} = e^r.$$

Hvis vi tenker oss at antall renteutbetalinger går mot uendelig blir derfor beløpet etter én tidsperiode  $e^r K_0$ .

Hvis vi fordeler renta over mange små tidsperioder på denne måten bør vi også studere kapitalveksten over mindre tidsperioder. Anta at vi deler året inn i  $m$  like lange tidsperioder, hver av lengde  $h$  slik at  $mh = 1$ . Tida vil altså løpe i steg på  $h$  og etter  $m$  tidssteg har det gått ett år. Vi antar fremdeles at renta er  $r$  pr. år. Med fast rente blir renta da  $r/m = rh$  pr. tidsperiode av lengde  $h$ . La oss betegne tida etter  $j$  tidssteg med  $t = jh$  og kapitalen ved dette tidspunktet med  $K^h(t)$ . Fra hva vi vet om diskret kapitalvekst har vi da at

$$K^h(t) = (1+rh)^j K_0 = (1+rh)^{t/h} K_0. \quad (6.16)$$



Lar vi nå  $h$  gå mot 0 får vi

$$K(t) = K_0 e^{rt}. \quad (6.17)$$

Dette kan vi også vise på en annen måte. Differensligningen (6.13) kan skrives

$$K^h(t) - K^h(t-h) = \frac{r}{m} K^h(t) = rhK^h(t).$$

Altså har vi

$$\frac{K^h(t) - K^h(t-h)}{h} = rK^h(t).$$

Lar vi  $h$  gå mot null i denne ligningen og setter  $K(t) = K^0(t)$  ser vi at

$$K'(t) = rK(t). \quad (6.18)$$

Det er lett å sjekke at alle funksjoner på formen  $K(t) = Ce^{rt}$  passer i denne ligningen og hvis vi velger  $C = K_0$  får vi en løsning som tilfredstiller initialbetingelsen  $K(0) = K_0$ , nemlig  $K(t) = K_0 e^{rt}$  som vi ser stemmer med (6.17).

### Oppgaver

- 6.1 Beregn kondisjonstallet til følgende funksjoner og lokaliser problematiske områder.
- $f(x) = x^p$  der  $p$  er et reelt tall, og  $x \geq 0$ .
  - $f(x) = x^2 - 2$  på intervallet  $[0, 2]$ .
  - $f(x) = e^x$  på hele tallinjen.
  - $f(x) = \ln x$  på intervallet  $(0, \infty)$ .
  - $f(x) = \tan x$  på intervallet  $(-\pi/2, \pi/2)$ .
- 6.2 Gjenta oppgave 5.1, men bruk Newtons metode i stedet for halveringsmetoden. Lag plott som gir et visuelt bilde av iterasjonene, slik som i figur 6.3.
- 6.3 I denne oppgaven skal vi se litt nærmere på modellen for diskret kapitalvekst.
- Anta at renta er konstant 8 % i modellen (6.9) og at tiden regnes i år. Hvor lang tid tar det da før kapitalen er fordoblet?
  - La oss nå se hva som skjer hvis vi bruker rentemodellen (6.12). Hvilken tolkning har parameteren  $T$  i (6.12)? Lag et plott av  $r_n$  som funksjon av  $n$  når  $T = 6$  og  $r = 0.08$  (la  $n$  variere fra 0 til 30).
  - Gjør en numerisk simulering av kapitalveksten for  $n = 0, 1, \dots, 30$  når startkapitalen  $K_0$  er 1 (vi måler i millioner), renta er gitt ved (6.12) med  $r = 0.08$  og  $T = 6$ . Lag et plott av resultatet. Plott ut kapitalveksten ved konstant rente  $r = 0.08$  i samme plott. Prøv å forklare det du ser.

d) En annen mulig rentemodell er gitt ved

$$r_n = r + \frac{r}{2} \cos(2\pi n/T + \pi).$$

Hvordan vil kapitalutviklingen bli med en slik modell i forhold til de to andre modellene vi har sett på? Legg inn denne modellen også i det tidligere plottet og se om dine betraktninger stemmer.

6.4 Denne oppgaven er en fortsettelse av oppgave 3 der vi inkluderer inn- og utbetalinger i modellen. Utgangspunktet er modellen gitt ved differensligningen (6.13) som har løsningen (6.14).

- Hvor lang tid tar det før kapitalen fordobler seg hvis  $b = 0.1K_0$  og  $r = 0.08$ ?
- Hvis vi tenker oss (6.13) som en modell for tilbakebetaling av lån (annuitetslån), hvor stor må da  $b$  være for at lånet skal være nedbetalt etter  $N$  år?
- Anta at det opprinnelige lånebeløpet er 1 million kroner, at renten er 8 % og at lånet skal være nedbetalt etter 20 år. Hvor stort blir da det årlige avdraget  $b$ ? Lag et plott av lånesaldoen  $K_n$ .

6.5 I oppgave 3 studerte vi en enkel form for diskret kapitalvekst; i denne oppgaven skal vi se på kontinuerlig kapitalvekst.

- Forklar hvordan uttrykket for  $K^h(t)$  gitt ved (6.16) framkommer.
- Vis at  $K^h(t)$  vokser for en gitt  $t$  når  $h$  blir mindre. Hvorfor er dette rimelig?
- Anta at  $r = 0.08$  og at vi har 12 tidssteg pr. år slik at  $h = 1/12$ . Lag et plott av kapitalveksten gitt ved (6.16) over 10 år sammen med et plott av kapitalveksten gitt ved (6.10) (bruk  $K_0 = 1$ ).
- Verifiser at funksjonen  $K(t) = K_0 e^{rt}$  er en løsning av differensligningen (6.18) med initialverdi  $K(0) = K_0$  og legg denne funksjonen inn i plottet i deloppgave (c). (For å plote denne funksjonen kan du beregne 10 funksjonsverdier pr. år og plote ut ved å trekke en rett linje mellom verdiene  $((t_i, K(t_i)))$ .)

6.6 Vis at kondisjonstallet tilfredstiller likheten

$$\kappa(f \circ g; a) = \kappa(g; a)\kappa(f; g(a))$$

og gi en tolkning av denne relasjonen (notasjonen  $f \circ g$  angir den sammensatte funksjonen som har verdien  $f(g(x))$  i  $x$ ).