Prøveeksamen i MAT-INF 1100, Høsten 2003

Denne prøveeksamenen har samme format som den "virkelige" eksamenen, og inneholder oppgaver av samme type og vanskelighetsgrad. Første del av eksamen består av 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er bare et riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen består av tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. Den totale poengsummen er altså maksimalt 100 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige!

Kalkulator er eneste tillatte hjelpemiddel på eksamen. Formelarket vil bli delt ut sammen med oppgavesettet.

Del 1: Flervalgsoppgaver

Oppgave 1. Taylorpolynomet av grad 3 til funksjonen $f(x) = e^{-x}$ om punktet $a = 0$ er gitt ved

☐ $1 + x + x^2/2 + x^3/6$ ☐ $1 + x + x^2/2 + x^3/3$ ☐ $1 - x - x^2/2 - x^3/6$
☐ $1 - x + x^2/2 - x^3/6$ ☐ $1 - x + x^2/2 - x^3/3$

Oppgave 2. Taylorpolynomet av grad 3 til funksjonen $f(x) = \arctan x$ om punktet $a = 0$ er gitt ved

☐ $1 + x^2/2$ ☐ $x - x^3/3$ ☐ $1 + x/2 + x^2/3 + x^3/4$ ☐ $x - x^3/6$
☐ $x + x^3/6$

Oppgave 3. Koeffisienten foran x^3 i Taylorpolynomet til funksjonen $f(x) = \int_0^x e^{\sin u}\, du$ om punktet $a = 0$ er

☐ 1 ☐ 0 ☐ 1/3 ☐ −1/3 ☐ 1/6

Oppgave 4. Bernsteinpolynomet $b_{i,n}(x) = \binom{n}{i}(1-x)^i x^{n-i}$, der $0 \leq i \leq n$ og $n \geq 0$ har egenskapen

☐ $b_{i,n}(x) \leq 1$ for alle $x \in [0,1]$ ☐ $b_{i,n}(0) = 1/2$
☐ $b_{i,n}(x) \leq 0.1$ for alle $x \in [0,1]$ ☐ $b_{i,n}(1) = 1/2$
☐ $b_{i,n}(x) \leq 2$ for alle $x \in \mathbb{R}$

Oppgave 5. Differensialligningen $y' + y = x$ har løsningen

☐ $y(x) = 1 + Cx$ ☐ $y(x) = -1 + x + Ce^{-x}$ ☐ $y(x) = x + Cx^2/2$
☐ $y(x) = x + Ce^{-x}$ ☐ $y(x) = x^2/2 + Ce^{x}$

der C er et vilkårlig, reelt tall.

Oppgave 6. Differensialligningen $y' + y/x = x^3$ med initialverdi $y(1) = 1$ har løsningen

☐ $y(x) = x^4/5 + 4/(5x)$ ☐ $y(x) = x^4$ ☐ $y(x) = x^2/2 + 1/(2x)$
☐ $y(x) = x$ ☐ $y(x) = 1/x$

Oppgave 7. Differensialligningen $y' - 2xy^{-1/2} = 0$ har den generelle løsningen

☐ $y(x) = \sqrt{x + C}$ ☐ $y(x) = x + C$ ☐ $y(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}(x^2 + C)^{2/3}$
☐ $y(x) = (x^3 + C)^{1/3}$ ☐ $y(x) = e^{x+C}$

der C er et vilkårlig, reelt tall.

Oppgave 8. Differensialligningen $y'' + 3y' + 2y = 0$ har den generelle løsningen

☐ $y(x) = \cos x$ ☐ $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ ☐ $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$
☐ $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}$ ☐ $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x}$

der C_1 og C_2 er vilkårlige, reelle tall.

Oppgave 9. Differensialligningen $y'' + 2y' + 10y = 0$ med initialverdier $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$ har løsningen

☐ $y(x) = 3x$ ☐ $y(x) = 3e^x - 3$ ☐ $y(x) = e^{-x}\sin(3x)$
☐ $y(x) = e^x \cos(3x)$ ☐ $y(x) = e^x$

Oppgave 10. Differensialligningen $y' = y \cos x$ med initialverdi $y(0) = 1$ har løsningen

☐ $y(x) = e^{\sin x}$ ☐ $y(x) = x$ ☐ $y(x) = \cos x$ ☐ $y(x) = e^x$
☐ $y(x) = e^{-x}$

Del 2

Husk at i denne delen må alle svar begrunnes!

Oppgave 1. I denne oppgaven skal vi studere Taylorpolynomene til logaritmefunksjonen om punktet $a = 1$.

a) Bestem Taylorpolynomet av grad 3 til funksjonen $f(x) = \ln x$ om punktet $a = 1$ og bruk dette til å regne ut en tilnærming til $\ln 1.1$.

b) La $T_n f(x)$ betegne Taylorpolynomet til f av grad n om $a = 1$, og la $R_n f(x) = f(x) - T_n f(x)$ betegne restleddet. Vis at restleddet kan skrives som

$$R_n f(x) = (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} c^{-n-1},$$

der c er et tall i intervallet $(1, x)$.

Vi ønsker å bruke $T_n f$ til å regne ut en tilnærmet verdi av $\ln 1.1$. Finn en verdi av n slik at feilen garantert er mindre enn 10^{-10} i tallverdi.
Hint: Her kan du få bruk for Lagranges versjon av restleddet som sier at om vi Taylorutvikler om a så kan feilleddet skrives som

$$R_n f(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Her er c er et tall i intervallet (a, x)

Oppgave 2. Finn den løsningen av differensialligningen

$$y'' + 2y' + 2y = x$$

som tilfredstiller inititialverdiene $y(0) = 1$ og $y'(0) = 0$.

Oppgave 3. I denne oppgaven skal vi studere en modell for sparing.

a) Du har bestemt deg for å spare og ønsker å ha kr. 300 000 tilgjengelig etter 10 år. Du begynner sparingen ved å sette et beløp b i banken ved utgangen av et år. Du får en årlig fastrente på 5 % som utebetales ved slutten av hvert år. I tillegg sparer du et årlig beløp på s kroner som settes inn på kontoen ved slutten av hvert år, første gang et år etter at sparingen begynte.
Forklar hvorfor beløpet x_n som du har i banken etter n år er gitt ved

$$x_n = 1.05\, x_{n-1} + s, \quad x_0 = b.$$

Hvis $s = 18\,000$ kroner, hvor stor må da b være for at du skal ha 300 000 kroner etter 10 år?

b) Du vurderer andre sparestrategier og ønsker at beløpet b som du begynner sparingen med skal være lik det årlige sparebeløpet s. Hvor mye må du nå spare hvert år for å ha 300 000 kroner etter 10 år?

c) Du regner med en prisstigning på 3 % pr. år og mener du bør ha råd til å la det årlige sparebeløpet øke på samme måte som prisstigningen. Forklar hvorfor beløpet y_n du nå har etter n år er gitt ved

$$y_n = 1.05\, y_{n-1} + 1.03^n s.$$

Hvis $s = 18\,000$ kroner som i (a), hvor mye må nå startkapitalen b være for at du skal ha 300 000 kroner etter 10 år?

Oppgave 4. En følge er gitt ved differensligningen $x_n = x_{n-1}/2 + (n+1)/n$ for $n \geq 1$, der $x_0 = 2$. Vis ved induksjon at $2 \leq x_n \leq 3$ for alle heltall $n \geq 0$.

Lykke til!