

KAPITTEL 8

Differensialligninger

Svært mange fenomener i våre omgivelser kan modelleres matematisk ved hjelp av differensialligninger. De vanligste og mest kjente eksemplene på dette finner vi i de tradisjonelle naturvitenskapene, og da særlig i fysikk. Men utbredelsen av datateknologi har gitt nye anvendelser, ofte i kombinasjon med naturvitenskapene. Anta for eksempel at du arbeider med et treningsprogram for kirurger der brukeren skal ‘operere’ på en ‘pasient’ som bare er representert grafisk (ved hjelp av matematikk) på skjermen. I de fleste kirurgiske inngrep er det behov for å sy med nål og tråd. En viktig del av et slikt program vil derfor være å gi brukeren tilgang til en virtuell (‘kunstig’) nål med tråd og muligheter for interaktiv bevegelse av nåla. Nåla styres altså av brukeren, og utfordringen er å vise hvordan sytråden beveger seg når nåla beveges. Fysikken bak dette er velkjent og kan beskrives med en passende differensialligning. Ved å la trådens bevegelse følge løsningen til denne ligningen vil vi få en oppførsel som brukeren oppfatter som naturlig. En viktig del av simuleringen av sytråden er derfor å løse differensialligningen som beskriver trådens bevegelse. Løsningen må være rimelig nøyaktig, men framfor alt rask å beregne, siden trådens bevegelse skal vises i sann tid på dataskjermen.

I eksempelet over er det viktig at tråden modelleres riktig rent fysisk, slik at oppførselen blir naturlig. Men en spennende mulighet når fenomener modelleres på en datamaskin er å endre naturlovene slik at vi ikke får helt naturlig oppførsel. Dette er som regel umulig i virkeligheten, men i en kunstig dataverden er det ingenting i veien for å gjøre slike eksperimenter.

Som ved integrasjon er det bare de færreste differensialligninger som kan løses eksakt ved at vi finner en enkel formel for løsningen. Og som for integraler er det slik at selv om vi kan finne en eksakt løsning er denne ofte så komplisert at den ikke er til særlig nytte. Det vanlige er derfor at differensialligninger løses numerisk på datamaskin ved å beregne en tilnærming til løsningen i en del punkter. Ut fra disse verdiene kan vi så beregne en tilnærming til løsningsfunksjonen ved å trekke en rett linje mellom de beregnede verdiene. Noen slike metoder er diskutert i seksjon 10.7 i *Kalkulus*, og i seksjon 8.1 skal vi se litt på hvordan de kan implementeres effektivt på en datamaskin. I tillegg skal vi i seksjon 8.2 studere fallskjermhopping ved hjelp av differensialligninger. I analysen av

fallskjermhopping får vi bruk for det å løse differensialligninger både eksakt (løsning ved formel) og numerisk.

8.1 Numerisk løsning av differensialligninger

Siden det er mange differensialligninger som ikke kan løses eksakt i den forstand at vi kan finne en enkel formel for løsningen, er det viktig med numeriske metoder som kan finne tilnærminger til løsningene. Disse metodene fungerer for et bredt spekter av differensialligninger og er den vanlige måten å løse differensialligninger på ved hjelp av datamaskiner. Flere metoder er nevnt i *Kalkulus*, men her skal vi bare se på to varianter av *Eulers metode*: Eulers metode for førsteordens ligninger (som også står i *Kalkulus*), og Eulers metode for andreordens ligninger (som ikke står i *Kalkulus*). Vi skal utlede Eulers metode på en litt annen måte enn i læreboka, og vi baserer oss på at Taylorutvikling av funksjoner er kjent.

8.1.1 Eulers metode for førsteordens differensialligninger

Standardversjonen av Eulers metode gir en algoritme for å løse førsteordens differensialligninger på formen

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = d, \quad (8.1)$$

der vi antar at f er en (stykkevis) kontinuerlig funksjon av de to variablene x og y . Løsningen av ligningen er en funksjon $y(x)$ som passer inn i ligningen for alle verdier av x . Legg merke til at denne ligningen er mer generell enn de ligningene vi kan løse eksakt ved hjelp av metodene i *Kalkulus*.

For å finne en tilnærmet løsning til ligningen (8.1) forsøker vi oss med en Taylorutvikling av løsningen. Taylorpolynomiet til y om x er gitt ved

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \dots,$$

der h er et gitt tall. Hvis y er en 'pen' funksjon betyr likheten her at høyre side vil konvergere mot venstre side når vi tar med stadig flere ledd i Taylorpolynomiet. For enkelhets skyld tar vi nå med to ledd. Da vil, i beste fall, høyre side bli en tilnærming til $y(x+h)$,

$$y(x+h) \approx y(x) + hy'(x).$$

Det fine med denne tilnærmingen er at differensialligningen (8.1) gir oss en formel for $y'(x)$. Bruker vi denne får vi

$$y(x+h) \approx y(x) + hf(x, y). \quad (8.2)$$

Hvis $y(x)$ er kjent gir dette oss derfor en metode for å finne en tilnærming til $y(x+h)$. Nå er ikke funksjonen $y(x)$ kjent, men legg merke til at initialbetingelsen $y(a) = d$ i (8.1) gir verdien av y i a . Vi kan derfor velge oss en h og bruke formelen (8.2) for $x = a$ til å regne ut en tilnærming $y^h(a+h)$ til $y(a+h)$,

$$y(a+h) \approx y^h(a+h) = y(a) + hf(a, y(a)) = d + hf(a, d).$$

Når vi nå har tilnærmingen $y^h(a+h)$ kan vi bruke denne til å beregne en tilnærming $y^h(a+2h)$ til $y(a+2h)$,

$$y(a+2h) \approx y^h(a+2h) = y^h(a+h) + hf(a+h, y^h(a+h)). \quad (8.3)$$

Nå begynner forhåpentligvis mønsteret å bli klart. Ved å bruke formelen (8.2) i punktet $x = a+2h$ kan vi beregne en tilnærming $y^h(a+3h)$ til $y(a+3h)$ siden vi nå har tilnærmingen $y^h(a+2h)$ til $y(a+2h)$, og slik kan vi fortsette. For å forenkle formlene setter vi $x_i = a+ih$ og $y_i^h = y^h(a+ih)$. Da kan prosessen oppsummeres ved

$$y_i^h = y_{i-1}^h + hf(x_{i-1}, y_{i-1}^h), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (8.4)$$

Hvis vi er interessert i løsningen på intervallet $[a, b]$ er det rimelig å velge et naturlig tall n og dele opp intervallet i n delintervaller med bredde $h = (b-a)/n$. Vi lar så i løpe opptil n i (8.4) siden $x_n = a+nh = b$. Dette gir følgende algoritme.

Algoritme 8.1 (Eulers metode for førsteordens ligninger). Anta at høyresiden i differensialligningen $y' = f(x, y)$ er gitt som en metode f sammen med konstantene a , d , b og n som angir initialbetingelsen $y(a) = d$, det høyre endepunktet i intervallet $[a, b]$, og antall beregningpunkter i intervallet. Følgende kode vil generere en tilnærming til løsningen av differensialligningen på intervallet $[a, b]$:

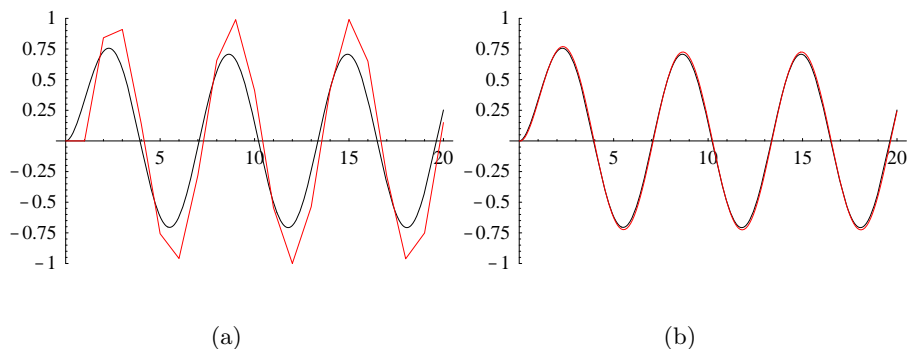
```
int i;
double h, x, yh[n];
h = (b-a)/n;
x = a; yh[0]=d;
for (i=1; i<n; i++) {
    yh[i] = yh[i-1] + h*f(x,yh[i-1]);
    x = a + i*h;
}
```

Tabellen `yh` vil etter dette inneholde en tilnærming til løsningen av $y' = f(x, y)$ i den forstand at `yh[i]` er tilnærmet lik $y(a+ih)$.

Her har vi lagret den tilnærmede løsningen i en tabell `yh`, og på den måten har vi tilgang til alle de beregnede verdiene etter at koden over er ferdig utført. I mange sammenhenger er dette ikke nødvendig, for eksempel hvis vi bare er interessert i verdien $y(b)$ eller hvis vi skal plote løsningen og har en ploteomgivelse som tillater oss å bygge opp plottet etterhvert som vi gjør beregningene. I så fall kan vi erstatte tabellen `yh` med en eller to `double`-variable.

To eksempler på bruk av Eulers metode er vist i figur 8.1. I begge tilfeller er det den samme ligningen som er løst, men verdien av h i (b) er $1/10$ av verdien i (a).

Eulers metode gir bare en tilnærming til løsningen av differensialligningen, og spørsmålet er om vi kan stole på de verdiene som algoritmen over beregner. Dette er det vanskelig å svare på generelt, men vi kan bruke den vanlige teknikken med å stadig halvere h inntil forskjellen på to tilnærminger blir mindre enn en gitt toleranse. Hvis vi har to tilnærminger $(y^h(i))_{i=0}^n$ og $(y^{h/2}(j))_{j=0}^{2n}$ så kan vi sammenligne $y^{h/2}(2i)$ med $y^h(i)$



Figur 8.1. Figuren viser numerisk løsning av differensialligningen $y' = \sin x - y$ med initialbetingelse $y(0) = 0$, på intervallet $[0, 20]$. I (a) er den eksakte løsningen vist sammen med den numeriske løsningen gitt ved Eulers metode med 20 steg. I (b) er Eulers metode med 200 steg brukt.

siden disse er tilnærminger til $y(x)$ i det samme punktet, nemlig $a + (2i)(h/2) = a + ih$. Hvis $|y^{h/2}(2i) - y^h(i)|$ er mindre enn en gitt toleranse ϵ for $i = 1, 2, \dots, n$ så er det rimelig å si at feilen vi gjør ved å bruke $y^{h/2}$ som tilnærming til y er omtrent ϵ (men vi har ingen garanti for at dette er riktig).

Det er verdt å merke seg at *feil akkumuleres* i Eulers metode. Vi gjør først en feil når vi tilnærmer $y(a + h)$ med $y^h(a + h)$ og så bruker vi denne feilaktige verdien til å beregne en tilnærming $y^h(a + 2h)$ til $y(a + 2h)$. Når vi fortsetter denne prosessen ser vi at feilen generelt vil bli større ettersom beregningene utvikler seg, og vanligvis blir feilen størst i den siste verdien $y^h(b)$. Hvis h velges for stor kan derfor mye rart skje. Det mest problematiske er om svaret blir rimelig, men galt, siden slikt kan være vanskelig å oppdage. For å gardere seg mot dette er det viktig å ha såpass innsikt i fenomenet som simuleres at en er i stand til å vurdere om løsningen er rimelig. For å få slik innsikt er det nyttig å løse forenklete varianter av ligningen og se hvordan disse løsningene oppfører seg. Enkelte ganger kan det gå riktig galt om h er for stor, i den forstand at beregningene kan gi såkalt 'overflow', altså at tallene som dukker opp i beregningene blir større enn det største tillatte tallet for datatypen som brukes (vanligvis `double`). Men dette er i og for seg en grei feilsituasjon siden den er så lett å oppdage. Og hvis h bare velges tilstrekkelig liten forsvinner problemet og vi vil kunne få tilnærmingen så god som vi måtte ønske.

8.1.2 Eulers metode for andreordens differensialligninger

Eulers metode, slik vi har beskrevet den over, fungerer bare for førsteordens differensialligninger, men hva kan vi gjøre hvis vi har en andreordens ligning

$$y'' = g(x, y, y'), \quad y(a) = d, \quad y'(a) = e? \quad (8.5)$$

Her tillater vi at g er en funksjon av de tre variablene x , y og y' som gir en mye større klasse av andreordens differensialligninger enn de inhomogene, lineære, med konstante koeffisienter som er behandlet i *Kalkulus*. Et par eksempler på slike ligninger er $y'' =$

$x + y + y'$ og $y'' = \sin(x + y + y')$. Den første er en inhomogen, lineær ligning med konstante koeffisienter mens den andre er et eksempel på en ikkelineær ligning.

Vi kan ikke godta helt vilkårlige funksjoner g i (8.5); for vårt formål er det greit å anta at g er (stykkevis) kontinuerlig.

La oss forsøke oss med Eulers metode for å beregne en tilnærmet løsning av (8.5) i $x = a + h$. Vi bruker to ledd i Taylorpolynomet og tilnærmer $y(a + h)$ med

$$y^h(a + h) = y(a) + hy'(a) = d + e.$$

Dette gikk jo riktig bra, så la oss nå forsøke å beregne en tilnærming til $y(a + 2h)$ på samme måte. En slik formel må ta utgangspunkt i tilnærmingen

$$y(a + 2h) \approx y(a + h) + hy'(a + h).$$

I denne formelen kan vi erstatte $y(a + h)$ med $y^h(a + h)$ som vi allerede har beregnet, men vi trenger også en tilnærming til $y'(a + h)$, og det har vi ikke. Løsningen er å også tilnærme $y'(a + h)$ med et lineært Taylorpolynom,

$$y'(a + h) \approx y'(a) + hy''(a) = e + hg(a, y(a), y'(a)) = e + hg(a, d, e).$$

Hvis vi betegner tilnærmingen til den deriverte med Dy^h så beregner vi altså $Dy^h(a + h)$ fra formelen

$$Dy^h(a + h) = e + hg(a, d, e).$$

Når vi har denne verdien kan vi beregne en tilnærming til $y(a + 2h)$ med

$$y^h(a + 2h) = y^h(a + h) + hDy^h(a + h).$$

For å være i stand til å beregne $y^h(a + 3h)$ trenger vi også å beregne

$$Dy^h(a + 2h) = Dy^h(a + h) + hg(a + h, y^h(a + h), Dy^h(a + h))$$

(legg merke til at alle størrelsene på høyre side i den siste formelen er kjent). Hvis vi skal beregne en tilnærming på intervallet $[a, b]$ velger vi et naturlig tall n og beregner $h = (b - a)/n$. Vi bruker forkortelsene $y_i^h = y^h(a + ih)$ og $Dy_i^h = Dy^h(a + ih)$ og utfører beregningene

$$\left. \begin{aligned} Dy_i^h &= Dy_{i-1}^h + hg(x_{i-1}, y_{i-1}^h, Dy_{i-1}^h), \\ y_i^h &= y_{i-1}^h + hDy_{i-1}^h, \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (8.6)$$

Disse formlene leder til følgende algoritme.

Algoritme 8.2 (Eulers metode for andreordens ligninger). Anta at høyresiden i differensialligningen $y'' = g(x, y, y')$ er gitt som en metode g sammen med konstantene a, d, e, b og n som angir initialbetingelsene $y(a) = d$ og $y'(a) = e$, det høyre endepunktet i intervallet $[a, b]$, og antall beregningspunkter i intervallet. Følgende kode vil generere en tilnærming til løsningen av differensialligningen på intervallet $[a, b]$:

```

int i;
double h, x, yh[n], Dyh[n];
h = (b-a)/n;
x = a;
yh[0] = d;
Dyh[0] = e;
for (i=1; i<=n; i++) {
    Dyh[i] = Dyh[i-1] + h*g(x,yh[i-1],Dyh[i-1]);
    yh[i] = yh[i-1] + h*Dyh[i-1];
    x = a + i*h;
}

```

Tabellen yh vil etter dette inneholde en tilnærming til løsningen av differensialligningen $y'' = g(x, y, y')$ i den forstand at $yh[i]$ vil være tilnærmet lik $y(a + ih)$, mens $Dyh[i]$ vil være tilnærmet lik $y'(a + ih)$.

Legg merke til at om vi regner ut y_i^h før Dy_i^h i (8.6) så har vi mulighet for å erstatte y_{i-1}^h med y_i^h som andre argument til funksjonen g . Dette svarer ikke til hva vi brukte i utledningen, men det er ikke urimelig å tro at det vil kunne gi en bedre metode. Det å vise noe slikt går langt utover det vi skal befatte oss med her, så vi holder oss til Algoritme 8.2.

8.2 Simulering av fallskjermhopping

For en fallskjermhopper er det livsviktig å ha god kjennskap til hva som egentlig skjer når hun faller gjennom luften og åpner fallskjermen for å bremse fallet — i denne aktiviteten er det ikke rom for å eksperimentere med noe en ikke på forhånd vet utfallet av! Matematiske modeller kan på en enkel måte gi innsikt i fallforløpet og mulighet for å se i hvert fall den kvalitative effekten av ulike eksperimenter en hopper kan foreta seg under fallet. Mest av alt bidrar en matematisk modell til å øke *forståelsen* av hva som skjer i fallet. Denne forståelsen er av generisk natur; den kan overføres på en lang rekke andre problemstillinger der legemer faller i væsker og gasser.

Ordet dynamikk brukes gjerne om samspillet mellom krefter og bevegelse. At bevegelse må skyldes en kraft ble først presist etablert av Galileo og Newton for nesten 400 år siden. Før det hadde menneskene bare en løs forståelse av hvorfor ting beveget seg.

Newtons andre lov er et grunnleggende prinsipp i fysikk som relaterer summen av kreftene som virker på et legeme og legemets bevegelse. Kaller vi summen av kreftene F og legemets akselerasjon a (måles vanligvis i m/s^2), sier Newtons andre lov at

$$F = ma, \tag{8.7}$$

der m er legemets masse (måles vanligvis i kg (kilogram)). I en typisk situasjon har vi et gitt legeme som påvirkes av krefter som setter det i bevegelse; utfordringen består i å beskrive legemets bevegelse. Det kan vi altså gjøre ved å finne fram til alle kreftene som virker på legemet. Summerer vi opp kreftene i F er da akselerasjonen gitt ved Newtons lov (8.7).

8.2.1 Utledning av ligningen for fallskjermhopp

La oss anvende Newtons andre lov på en fallskjermhopper. Vi kjenner hopperens masse m , men ikke akselerasjonen a . Kreftene som virker på en hopper faller i to kategorier:

1. Tyngdekraften F_g , som er lik mg , der $g = 9.81\text{m/s}^2$ er tyngdens akselerasjon.
2. Krefter som virker fra luften på hopperen langs overflaten av hopperen.

Kreftene i kategori 2 er svært kompliserte å beskrive og regne ut. Vi skal derfor gjøre betydelige forenklinger. Kreftene fra luften på hopperen består av en motstandskraft F_m , som skyldes en slags friksjon mellom hopperen og luften, og en oppdriftskraft F_o , som er det samme fenomenet som hindrer legemer med liten tetthet å synke i vann. Oppdriftskraften er så liten at den kan neglisjeres for en fallskjermhopper, men vi skal ta den med likevel for å illustrere hvordan vi mer presist kan begrunne hvorfor den kan neglisjeres.

Fysiske eksperimenter med legemer som beveger seg i luft eller i andre gasser og væsker viser at motstandskraften F_m er relatert til legemets fart. Hvis legemet beveger seg sakte, er F_m proporsjonal med farten v . Hvis legemet derimot beveger seg med høy fart, er F_m proporsjonal med v^2 . Hva "sakte" og "høy fart" betyr må selvfølgelig presiseres nærmere før man kan vite hvilken variant av F_m som er relevant i et problem. Her nøyer vi oss med å si at en fallskjermhopper faller i kategorien "høy fart". Vi kan da skrive

$$F_m = -C_D v^2.$$

Her er C_D en *motstandskoeffisient* som avhenger av legemets form og lufttettheten, og som har benevnning kg/m. For eksempel vil størrelsen på C_D være avhengig av om fallskjermen er utløst eller ikke, og i tilfellet fritt fall, vil hopperens kroppsform påvirke C_D . I et typisk hopp vil derfor C_D variere med tiden. Det knytter seg stor usikkerhet til verdien av C_D , og det er derfor akseptabelt at vi gjør en del forenklinger i andre deler av den matematiske modellen. Minustegnet foran $C_D v^2$ indikerer at *motstandskraften virker mot fartsretningen*, og at positiv bevegelsesretning er rettet nedover mot jorda i vår matematiske beskrivelse.

Oppdriftskraften er gitt av Arkimedes lov og har formen

$$F_o = -\rho_L g V,$$

der ρ_L er tettheten av mediet legemet er i (her luften), og V er volumet av legemet (her hopperen). Minustegnet i F_o indikerer at oppdriften virker oppover (når positiv retning er valgt nedover).

Setter vi inn alle tre kraftbidragene i Newtons andre lov, får vi

$$F_o + F_m + F_g = ma$$

eller

$$\rho_L g V - C_D v^2 + mg = ma. \quad (8.8)$$

Hvilke størrelser er kjente og hvilke er ukjente i denne formelen? Akselerasjonen a og farten v har med bevegelsen å gjøre og er derfor ukjente, konstantene ρ_L , g , og m er definitivt kjente størrelser, mens C_D er mer uklar. I utgangspunktet kjenner vi ikke C_D ; den avhenger detaljert av strømningsforholdene rundt hopperen, som igjen avhenger av bevegelsen og hopperens geometri. Vi burde derfor introdusere en matematisk modell som kan beskrive C_D . Dette er prinsipielt mulig, men modellen er svært komplisert og vil for en enkelt beregning av C_D antakelig kreve mange dagers regning på de største datamaskinene i verden. Vi trenger dessuten mange forskjellige verdier av C_D for ulike fallformer, fallskjermere osv. I stedet må vi forsøke å finne mer kvalitativ informasjon om C_D , og ut fra dette estimere noen fornuftige verdier til bruk i modellen vår.

Om vi antar at vi kan finne egnede verdier for C_D , er likning (8.8) nå én likning med to ukjente, akselerasjonen a og farten v . Vi trenger derfor en likning til for å få like mange likninger som ukjente. Denne ekstra likningen kommer fra sammenhengen mellom fart og akselerasjon. Både farten og akselerasjonen er funksjoner av tiden, og akselerasjon er definert som fartsendring pr. tidsenhet. Matematisk betyr dette at akselerasjon er den tidsderiverte av farten,

$$a = v' = \frac{dv}{dt}.$$

Dermed har vi to likninger med to ukjente. Som vanlig er det en fordel om vi kan redusere dette til én likning med én ukjent. Det er enkelt i dette tilfellet ettersom vi bare erstatter a i (8.8) med dv/dt ,

$$\rho_L g V - C_D v^2 + mg = mv'. \quad (8.9)$$

Vi har altså fått en førsteordens differensialligning for den ukjente funksjonen $v(t)$.

Det er verdt å merke seg at det ikke er noe i ligning (8.9) som direkte har med en fallskjermhopper å gjøre. Ligningen er gyldig for alle fysiske fenomener der legemer beveger seg rettlinjet i en væske eller gass, og der det er relevant å gjøre de samme forutsetningene som vi har gjort over (blant annet formen på motstandskraften).

Vi nevnte at oppdriftskraften F_o kan neglisjeres for en fallskjermhopper. La oss se hvordan vi kan argumentere mer presist for det. Vi ser at

$$F_o + F_g = -\rho_L g V + mg.$$

Hopperens masse m er produktet av hopperens tetthet ρ_h og volum V , altså er $m = \rho_h V$. Dermed kan vi skrive

$$F_o + F_g = -\rho_L g V + \rho_h V g = gV(\rho_h - \rho_L).$$

Hvis ρ_L er mye mindre enn ρ_h , kan vi neglisjere oppdriftskraften fordi den vil være fullstendig dominert av tyngdekraften. Dette er tilfellet her. Hopperens tetthet er av samme størrelsesorden som vann (kroppen består for det meste av vann!) som har tetthet omtrent 1g/cm^3 , mens luftens tetthet er av størrelsesorden $\rho_L \sim 10^{-4}\text{g/cm}^3$. Som nevnt over er ligning (8.9) også en modell for legemer som beveger seg i vann. Siden en dykker har omtrent samme tetthet som vann vil oppdriftskraften gi viktige bidrag til bevegelsen i en slik sammenheng.

I det videre skal vi arbeide med en matematisk modell for fallskjermhopping der oppdriftskraften er neglisjert,

$$-C_D v^2 + mg = mv' \quad (8.10)$$

Løsningen av denne differensialligningen er en funksjon $v(t)$, og ved hvert tidspunkt skal (8.10) være tilfredstilt. Men for at løsningen skal være entydig bestemt må vi kjenne farten i det fallet starter. Her er det naturlig å anta at bevegelsen starter fra ro slik at initialbetingelsen er $v(0) = 0$. Av estetiske årsaker velger vi å skrive om likning (8.10) slik at det er færre parametre. Ved å sette $c = C_D/m$ får vi

$$v' = -cv^2 + g, \quad v(0) = 0. \quad (8.11)$$

8.2.2 Enkle metoder for å lære om modellen

Det er mange måter å skaffe seg informasjon om løsningen av en differensialligning på, selv om det i mange tilfeller kan være vanskelig å finne en enkel formel for løsningen. Vanligvis har vi iallefall følgende muligheter til å skaffe informasjon:

1. Ved analytisk løsning. Dette er svært fordelaktig om funksjonsuttrykket for $v(t)$ er enkelt, men det er som oftest vanskelig å finne analytiske løsninger av alt annet enn de enkleste differensiallikningene. For ligning (8.11) har en analytisk løsning den fordelen at den gjør $v(t)$'s avhengighet av c tydelig.
2. Ved numerisk løsning. De aller fleste differensialligninger kan løses numerisk, men da må alle parametre spesifiseres. For ligning (8.11) betyr det at når c er gitt (tyngdekraften $g = 9.81$ er konstant og derfor uaktuell å eksperimentere med) kan ligningen løses numerisk. På denne måten får vi ikke ekspisitt informasjon om hvordan $v(t)$ avhenger av c , men kan bare finne numeriske tilnærminger til løsningen for forskjellige verdier av c . Ut fra dette må vi så forsøke å si noe om hvordan den generelle løsningen, der c er en parameter, avhenger av c .
3. Løse forenklete varianter av differensialligningen. Når ligningen forenkles er det ofte mulig å finne enkle løsninger som gir forståelse for dynamikken i modellen. Kunnskap om løsninger i spesialtilfeller er også nyttig for å teste dataprogrammer for numerisk løsning av den fullstendige likningen.

Analytisk og numerisk løsning av ligningen utsetter vi til oppgavene, men la oss se på noen forenklinger som vi kan gjøre.

Neglisjering av motstandskraften. La oss utelate motstandskraften $F_m = -cv^2$ i (8.11), noe som svarer til å sette konstanten $C_D = 0$ (husk at $c = C_D/m$). Da forenkles differensialligningen til

$$v' = g, \quad v(0) = 0.$$

Denne likningen er enkel å løse siden det er snakk om å finne den antideriverte til konstanten g . Vi får

$$v = \int g dt = gt + C,$$

der C er en integrasjonskonstant som vi kan bestemme fra initialbetingelsen $v(0) = 0$. Vi ser lett at denne betingelsen gir $C = 0$, så når $c = 0$ er løsningen altså $v(t) = gt$. Dette betyr at farten øker lineært med tiden, slik at hopperen faller fortere og fortere, uten noen begrensninger. Dette er ikke en fysisk løsning; både med og uten fallskjerm vil motstandskraften påvirke bevegelsen betydelig. Men løsningen $v = gt$ når $c = 0$ er nyttig som en test på et dataprogram for numerisk løsning av (8.11).

Neglisjering av tyngdekraften. Tyngdekraften $F_g = mg$ gjenfinnes som leddet g i (8.11). Neglisjerer vi dette leddet (setter tyngdekraften g til 0) får vi den forenklete ligningen

$$v' = -cv^2, \quad v(0) = 0. \quad (8.12)$$

Denne ligningen kan vi løse analytisk siden den er en enkel separabel differensiallikning. Ved å dividere med v^2 på begge sider (vi antar at v er ulik 0) får vi ligningen $v'/v^2 = -c$, og den vanlige løsningsmetoden for separable ligninger gir da

$$\int \frac{dv}{v^2} = \int -c dt.$$

Regner vi ut integralene får vi

$$-v^{-1} = -ct + C$$

slik at den generelle løsningen blir

$$v(t) = 1/(ct - C), \quad (8.13)$$

der integrasjonskonstanten C er et vilkårlig reelt tall.

Initialbetingelsen $v(0) = 0$ er problematisk i dette tilfellet siden vi måtte anta at $v \neq 0$ da vi løste ligningen ved separasjon av variable. Vi bruker derfor en generell initialverdi $v(0) = v_0$ i stedet, der vi antar at $v_0 \neq 0$. Hvis vi setter dette inn i løsningen finner vi $C = -1/v_0$ slik at løsningen er

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + v_0 ct}. \quad (8.14)$$

Men i dette uttrykket er ikke $v_0 = 0$ noe problem, og siden $v(t) = 0$ er en løsning av (8.12) ser vi at (8.14) gir løsningen av (8.12) for alle mulige initialbetingelser $v(0) = v_0$.

Hvis $v_0 \neq 0$ så ser vi at $v(t)$ til avta mot null ettersom tiden går. Dette er naturlig siden motstandskraften er den eneste kraften som virker, og den virker mot bevegelsen. Vi får derfor en oppbremsing av bevegelsen.

Konstant fart. Tyngdekraften vil akselerere hopperen mot jorda mens motstandskraften vil bremse bevegelsen, og oppbremsingen blir kraftigere etterhvert som farten øker. Når de to kreftene blir like store i absoluttverdi, er summen av kreftene null, og dermed akselerasjonen null. Farten forblir da konstant. Når farten ikke endrer seg er $v' = 0$, så ved å sette dette inn i (8.11) kan vi finne denne konstante farten. Dette gir ligningen

$$0 = -cv^2 + g$$

som har løsningen

$$v_c = \sqrt{g/c} \quad (8.15)$$

Farten gitt ved v_c er en øvre grense for hvor fort hopperen kan falle. Som vi ser, avhenger maksimalfarten av c , som igjen avhenger av hopperens geometri, for eksempel om fallskjermen er utløst eller ikke, kroppens form og lignende.

8.2.3 Varierende motstandskoeffisient

I praksis vil ikke motstandskoeffisienten være konstant. Under fallet beveger hopperen seg, og dette betyr at c varierer. Den største forandringen kommer i det fallskjermen utløses. Da vil c , i løpet av et svært kort tidsrom, endres fra en forholdsvis liten verdi til en stor verdi. I tillegg øker lufttettheten, og dermed c , ettersom hopperen nærmer seg jordoverflaten. Alt dette taler for at c må avhenge av t for å få en realistisk modell.

Spørsmålet er derfor hvordan vi kan finne c ? Som nevnt tidligere er dette et svært komplisert problem, men vi kan gjøre noen eksperimenter for å finne omtrentlige verdier. Ved 'normale' fall vil farten før fallskjermen utløses stabilisere seg på omtrent 180 km/t. Vi finner da fra (8.15) at $c = g/v_c^2 = 0.003924\text{m}^{-1}$. På samme måte kan vi finne en passende verdi for c etter at fallskjermen er utløst hvis vi vet hva den asymptotiske farten med fallskjerm er.

8.2.4 Beregning av hopperens posisjon

Så langt har vi konsentrert oss om å bestemme farten til fallskjermhopperen, men en viktig forutsetning for et vellykket hopp er at hopperen ikke treffer bakken før fallskjermen er utløst. I tillegg til å kjenne hastigheten er det derfor også viktig å vite hvor langt hopperen har falt ved tidspunktet t . Hvis vi kaller denne avstanden $z(t)$ vet vi fra fysikk at farten er den deriverte av $z(t)$. Vi måler fallhøyden ut fra hvor langt hopperen har falt fra uthoppsstedet slik at $z(0) = 0$. Fallhøyden er derfor gitt ved differensialligningen

$$z' = v, \quad z(0) = 0. \quad (8.16)$$

Når hastigheten er kjent som funksjon av t kan vi derfor bestemme z ved å løse denne enkle differensialligningen. Vi ser at z er integralet av v slik at

$$z(t) = \int_0^t v(s) ds. \quad (8.17)$$

I praksis er det sjelden mulig å regne ut dette integralet eksakt så vi må finne en numerisk tilnærming. Dette kan vi gjøre ved å bruke numerisk integrasjon i (8.17) eller løse differensialligningen (8.16) numerisk. I begge tilfeller er alt vi trenger verdien til v (eller en tilnærming) i noen isolerte punkter, noe vi kan få både fra en eksakt løsning og en numerisk løsning av den opprinnelige ligningen (8.11).

En annen måte å finne z på er å sette inn z i (8.16). Da kan differensialligningen (8.11) omskrives som

$$z''(t) = -cz'(t)^2 + g, \quad z(0) = 0, \quad z'(0) = v(0) = 0. \quad (8.18)$$

Ved å løse denne ligningen finner vi z direkte, og når z er kjent kan vi finne v ved derivasjon. Bruker vi Eulers metode for andreordens ligninger må både z og $z' = v$ beregnes underveis slik at vi automatisk får tilgang til både høyde og fart.

Opgaver

- 8.1 Programmer Eulers metode for førsteordens differensialligninger (algoritme 8.1) på formen

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = d,$$

der funksjonen f og tallene a og d er gitt. Bruk $h = (b-a)/n$ der n er et gitt naturlig tall, og finn en tilnærmet løsning på intervallet $[a, b]$ der b også er et gitt tall. Test programmet på ligningen $y' = y$ med $y(0) = 1$ som har løsningen $y(x) = e^x$. Bruk $b = 1$ og eksperimenter med forskjellige verdier av n .

- 8.2 Programmer Eulers metode for andreordens differensialligninger (algoritme 8.2) på formen

$$y'' = g(x, y, y'), \quad y(a) = d, \quad y'(a) = e,$$

der funksjonen f og tallene a , d og e er gitt. Bruk $h = (b-a)/n$ der n er et gitt naturlig tall, og finn en tilnærmet løsning på intervallet $[a, b]$ der b også er et gitt tall. Test programmet på ligningen $y'' = -y$ med $y(0) = 0$ og $y'(0) = 1$ som har løsningen $y(x) = \sin x$. Bruk $b = 1$ og eksperimenter med forskjellige verdier av n .

- 8.3 I denne oppgaven skal vi studere fallskjermhopping ved hjelp av den matematiske modellen i seksjon 8.2. Husk at $g = 9.81\text{m/s}^2$, mens hastighetene under er gitt i km/t. Dette betyr at enten må g omregnes til km/t² eller hastighetene til m/s.

- a) Ved normale hopp regner vi med at farten kommer opp i omtrent 180–200 km/t før fallskjermen utløses. Bestem ved hjelp av ligning (8.15) en verdi c_1 for motstandskoeffisienten slik at 200 km/t blir den asymptotiske farten til hopperen.

- b) Løs ligningen

$$y' = -cv^2 + g, \quad v(0) = 0 \tag{8.19}$$

med $g = 9.81$ og c lik verdien c_1 som du fant i (a), og plott hastigheten som funksjon av t . Hvor lang tid tar det før hopperen oppnår en hastighet på 180 km/t?

- c) En vanlig landingshastighet er omtrent 30 km/t. Finn hvilken verdi c_2 av motstandskoeffisienten som gir en asymptotisk hastighet på 28 km/t, og gjør en simulering for å finne ut hvor lang tid det tar å redusere hastigheten fra 180 km/t til 30 km/t med denne verdien av c . Lag et plott som viser hvordan farten avtar.

Hint: Løs (8.19), men med initialbetingelse $v(0) = 180$ km/t.

- d) Så langt har vi bare sett på hastigheten som hopperen faller med. Men det er åpenbart også viktig å vite hvor mange meter hopperen faller slik at hun kan være sikker på at hun hopper ut høyt nok oppe til at farten er dempet tilstrekkelig før landing. Utvid beregningene i (b) og (c) med å beregne fallhøyden ved å løse differensialligningen (8.16) ved hjelp av Eulers metode. Lag et plott som viser hvordan høyden avtar.

Legg merke til at når en numerisk tilnærming til v er beregnet ved hjelp av Eulers metode med steglengde h så er dette akkurat de verdiene du trenger for å løse (8.16) ved hjelp av Eulers metode med den samme steglengden h .

- e) Vi skal nå gjøre en simulering av et fullstendig hopp ved å bruke variabel c . Definer $c(t)$ ved

$$c(t) = \begin{cases} c_1, & \text{når } 0 \leq t \leq t_1, \\ c_2, & \text{når } t_1 < t \leq t_2, \end{cases} \quad (8.20)$$

der c_1 og c_2 er verdiene du fant i (a) og (c). Verdiene t_1 og t_2 må du selv bestemme slik at du får et 'pent' hopp med et 'passende' innslag av fritt fall og fall med åpen skjerm.

Gjør en simulering og lag plott som viser hvordan hastigheten og høyden varierer.

- 8.4 Tidligere i høst (2000) stod det å lese i avisene om en fransk fallskjermhopper som ønsker å sette hastighetsrekord ved å oppnå en hastighet på oppimot 1800 km/t i fritt fall før fallskjermen løses ut. For å få til dette må han hoppe ut fra stor høyde slik at lufta er tynn (gir lite friksjon) og han har stor fallhøyde. I tillegg må han stupe med hodet først for å redusere luftmotstanden til et minimum. I denne oppgaven skal vi gjøre en forenklet simulering av et slikt hopp.

Gjenta oppgave 3, men erstatt farten 200 km/t med 2000 km/t. I den endelige simuleringen antar vi at hoppet har tre faser: først fritt fall der målet er å oppnå en hastighet på 1800 km/t, så en fase med 'vanlig' fritt fall (bruk den verdien av c som du fant i oppgave 3 (a)) og til slutt en fase med åpen skjerm (bruk verdien av c fra oppgave 3 (c)). Lag en stykkevis konstant c slik som i (8.20), men med tre grener svarende til de tre forskjellige verdiene av c . Bestem selv hvor lange de ulike fasene av hoppet skal være og lag plott som viser hvordan hastigheten og høyden utvikler seg. Hvor høyt må hopperen starte for å få oppnå 1800 km/t og lande forsvarlig?

- 8.5 Gjenta oppgave (3), men ta utgangspunkt i den andreordens ligningen (8.18), og bruk Eulers metode for andreordens ligninger til å beregne den numeriske løsningen.

- 8.6 En populær sport i enkelte kretser er såkalt 'basehopping'. Dette går ut på å gjøre fallskjermhopp fra kjente bygninger og tårn, helst så lave som mulig, men ikke lavere enn at hoppet er forsvarlig. Gjør simuleringer for å undersøke hva som er det laveste punktet det går an å hoppe fra og allikevel oppnå en landingshastighet på omtrent 30 km/t. Vi er ikke interessert i hopp der fallskjermen kan utelates fordi høyden er lav. Vurder selv hvor lenge hopperen minst bør vente før skjermen utløses (for

å være sikker på at skjermen fyller seg skikkelig og kjapt med luft). Bruk verdiene av c fra oppgave 3. Lag plott av hastighets- og høydeforløpet og finn en omtrentlig minimumshøyde.

- 8.7 Ligningen $y' = -cy^2 + g$ er separabel, og integralene som dukker opp ved den vanlige løsningsmetoden for slike ligninger er løsbare. Finn den eksakte løsningen.

