Inhomogene differensiallikninger av andre orden

Ubestemte koeffisienters metode og variasjon av parameterene. Oppsummering.

Forelesning uke 46, 2005

MAT-INF1100

Inhomogen differensiallikning av andre orden

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (INH2).$$

Klassifisering: lineær, inhomogen, variable koeffisienter, orden 2.

Oppdeling av løsning*(K. 10.5.1)*
Den generelle løsningen av (INH2) kan skrives

$y = y_p + y_h,$

der y_p er en valgt løsning av (INH2), mens y_h løser den homogene likningen $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.

Bevis *(K. 10.5.1)*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad\qquad (INH2).$$

Anta at y og y_p er løsninger av (INH2). Vi må da vise at $z = y - y_p$ er en løsning av den homogene likningen.

$$\begin{aligned}
&z'' + p(x)z' + q(x)z \\
&= (y - y_p)'' + p(x)(y - y_p)' + q(x)(y - y_p) \\
&= y'' + p(x)y' + q(x)y - (y_p'' + p(x)y_p' + q(x)y_p) \\
&= f(x) - f(x) = 0.
\end{aligned}$$

Ukjente koeffisienters metode

Lineær, inhomogen, konstante koeffisienter

$$y'' + py' + qy = f(x).$$

For enkelte former av f gjetter vi på en y_p som likner, men som inneholder koeffisienter som vi bestemmer ved innsetting.
Denne y_p kombineres så med den generelle løsning av den homogene likningen

$y'' + py' + qy = 0.$

Initialbetingelser tilpasses så i $y = y_h + y_p$.

Ukjente koeffisienters metode, forts. 1

Regel 1: $f(x)$ er et polynom.
y_p velges vanligvis som et polynom av samme grad som f
Unntak: $y_h = 1$ er homogenløsning $\Rightarrow$ grad økes med 1.
Er $y_h = x$ også homogenløsning økes graden med 2 (da er $p = q = 0$ og $y'' = f$).

Regel 2: $f(x) = p(x)e^{\alpha x}$, der p er et polynom.
$y_p = Q(x)e^{\alpha x}$ der Q er et polynom av samme grad som p.
Unntak: $e^{\alpha x}$ er homogenløsning $\Rightarrow$ grad økes med 1.
Er $xe^{\alpha x}$ også homogenløsning (α dobbel rot i kar. pol.) $\Rightarrow$ grad økes med 2.

Kalkulus: $e^{\alpha x} = a^x$, der $a = e^\alpha$.

Ukjente koeffisienters metode, forts. 2

Regel 3: $f(x) = p(x)e^{\alpha x}(A\cos bx + B\sin bx)$,
p - polynom.

$y_p = e^{\alpha x}(Q\cos bx + P\sin bx)$ der $Q,\ P$ er polynomer av samme grad som p.
Unntak: $e^{\alpha x}\cos bx$ homogenløsning $\Rightarrow$ grad av $Q,\ P$ økes med 1.

Litt generalisert i forhold til Kalkulus, der $p = 1$.

Nok en variasjon av parameteren*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (INH2).$$

Tillater variable koeffisienter.
Dersom vi kjenner en homogenløsning $u(x)$ kan vi sette inn $y_p = u(x)v(x)$. $\Rightarrow$ ledd faller og

$$v'' + (2\frac{u'}{u} + p)v' = \frac{f}{u} \qquad (VL).$$

Løsning

- $f = 0$ finner en annen homogenløsning. Brukt i *K. kap. 10.4*
- $f \neq 0$ (VL) er en inhomogen, lineær førsteordenslikning for v'. Vi kan bruke formel *K. 10.1.3*

Variasjon av to parametere*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (INH2).$$

To homogenløsning y_1, y_2. Setter inn $y_p = c(x)y_1 + d(x)y_2$. $\Rightarrow$ ledd med nulltederiverte av c og d faller og

$$(c'y_1 + d'y_2)' + c'y_1' + d'y_2' + p(c'y_1 + d'y_2) = f$$

Tidligere $d = 0$ eller $c = 0$; kan istedet velge c, d s.a.

$$c'y_1 + d'y_2 = 0, \quad c'y_1' + d'y_2' = f \Rightarrow$$

$$c' = -\frac{y_2 f}{W}, \quad d' = \frac{y_1 f}{W}.$$

$W = y_1y_2' - y_1'y_2$ – Wronski-determinanten.

Kan overføres til likninger av høyere orden.

Oppsummering

Lineær førsteordenslikning;
$y' + f(x)y = g(x), \quad y(a) = y_0$

$$y = e^{-\int_a^x f(\hat{x})d\hat{x}} \left(\int_a^x g(\hat{x}) e^{\int_a^{\hat{x}} f(t)dt} d\hat{x} + y_a \right).$$

Separabel førsteordenslikning; $q(y)y' = p(x)$

$\int q(y)dy = \int p(x)dx$

Lineær, homogen, andreordenslikning med konst. koeff;
$y'' + py' + qy = 0$

Gjett e^{rx} der $r^2 + pr + q = 0$ (karakteristisk likning).
Tilfeller: 1: to $r \in \mathbb{R}$, 2: en $r \in \mathbb{R}$, 3: to $r \in \mathbb{C}$.

Oppsummering, forts.

Initialverdiproblem andreordenslikning med konst. koeff;
$y'' + py' + qy = 0$, **y(a)=d, y'(a)=h**

Har entydig løsning.

Inhomogen andreordenslikning; $y'' + py' + qy = f(x)$

$$\underset{\text{gen.}}{y} = \underset{\text{part.}}{y_p} + \underset{\text{hom.}}{y_h}$$

y_p finnes med

- Ukjente koeffisienter (p, q konstante)
- Variasjon av parametere (en y_h kjent)

Eksistens er ikke selvsagt*

$y' = 1 + y^2$ for $x \geq 0, \quad y(0) = 1.$

Klassifisering: Ikkelineær, orden 1, separabel.
Eksisterer løsning ?

Separabilitet $\Rightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx = x + C.$

Integrasjon av venstre side:

$\arctan(y) = x + C \quad \Rightarrow y = \tan(x + C)$

Initialbetingelse $\Rightarrow C = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = \tan(x + \frac{\pi}{4})$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} y(x) = \infty$

Løsning eksisterer ikke for $x \geq \frac{\pi}{4}$;
SPONTAN SINGULARITET – mulig i ikkelineær likning.