Numerisk løsning av differensiallikninger

Eulers metode,
Eulers midtpunktmetode,
Runge Kuttas metode
og
*Taylorrekkeutvikling**

Forelesning uke 46, 2005

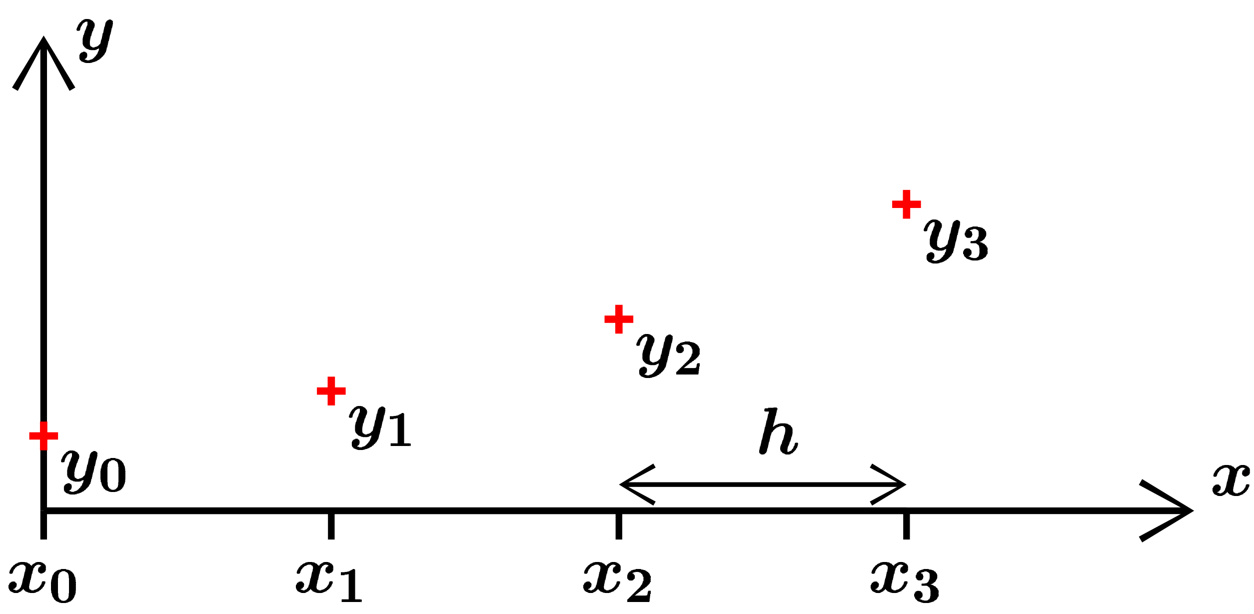
MAT-INF1100

Funksjoner med ubestemte koeffisienter*

Vi tilnærmer løsning $y(x) \approx F(x, a_1, .., a_n)$.
a_i bestemmes slik at feilen blir liten.

Diskretisering

y tilnærmes i diskrete punkter $x_n = nh$: $y(x_n) \approx y_n$. $\Rightarrow$
Funksjonen y representeres (tilnærmes) ved følge (sample).



Eulers metode *(K. 10.8.1)*

Likning: $y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(0) = y_0.$

I punkt $x_n = nh$ tilnærmer vi

$y' \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$,

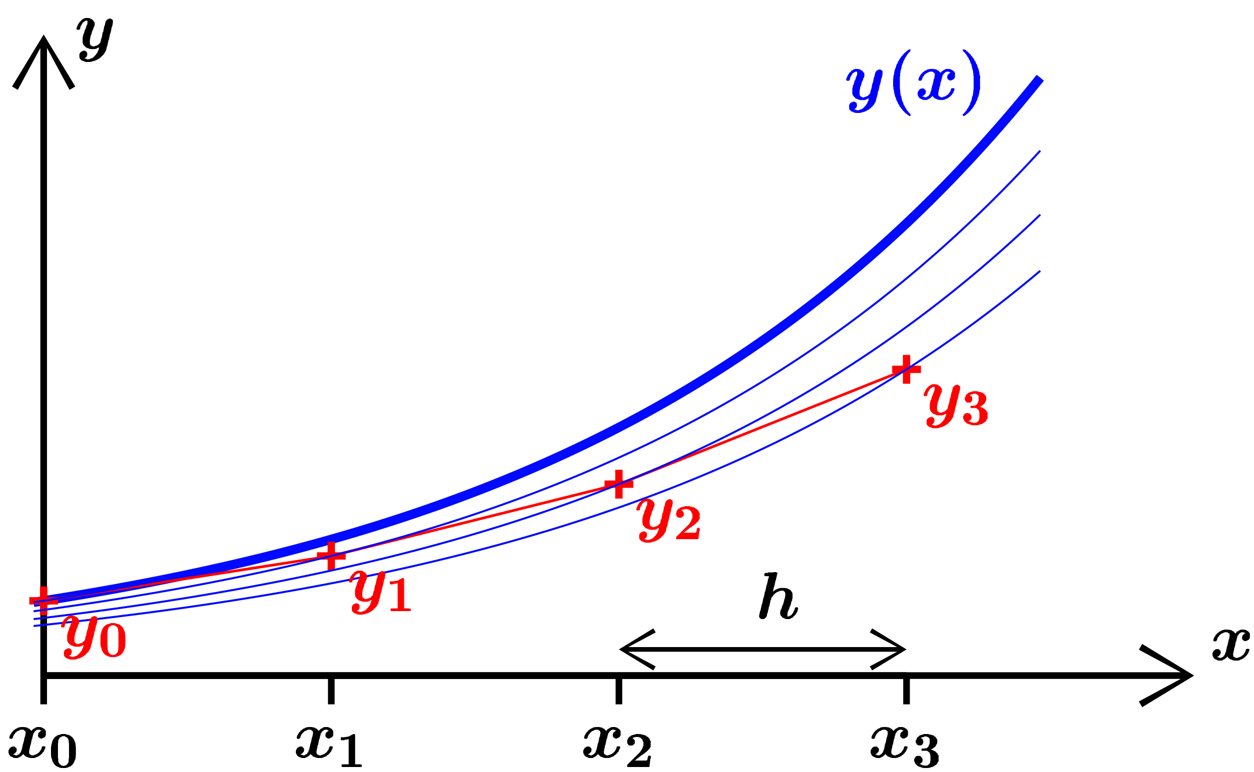
og setter inn i likning for $x = x_n$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_n, y_n) \Rightarrow y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n).$$

“Neste y er forrige y pluss h ganger endringsrate”.
I rekkefølge beregnes y_1, y_2, y_3.....

I Kalkulus skrives formler med $n - 1$ og n; ikke n og $n + 1$.

Eulers metode; geometrisk tolkning



Tynne blå linjer løsninger med ulik $y(0)$.
Numerisk løsning: skritter fram langs tangenter til løsningskurver.
I illustrert tilfelle ($y' = ay$) øker feil systematisk.

Midtpunktmetoder

I Eulers metode bruker vi asymmetrisk formel

$$\frac{y(x_n + h) - y(x_n)}{h} \approx y'(x_n) = f(x_n, y_n).$$

Midtpunktformel

$$\frac{y(x_n + h) - y(x_n)}{h} \approx y'(x_n + \frac{1}{2}h) = ?$$

er mer nøyaktig.
Men hvordan finne uttrykk for høyreside ?

Forsøk 1: midling*

$y'(x_n + \frac{1}{2}h) \approx f(x_n + \frac{1}{2}h, \frac{1}{2}(y_n + y_{n+1}))$,

gir

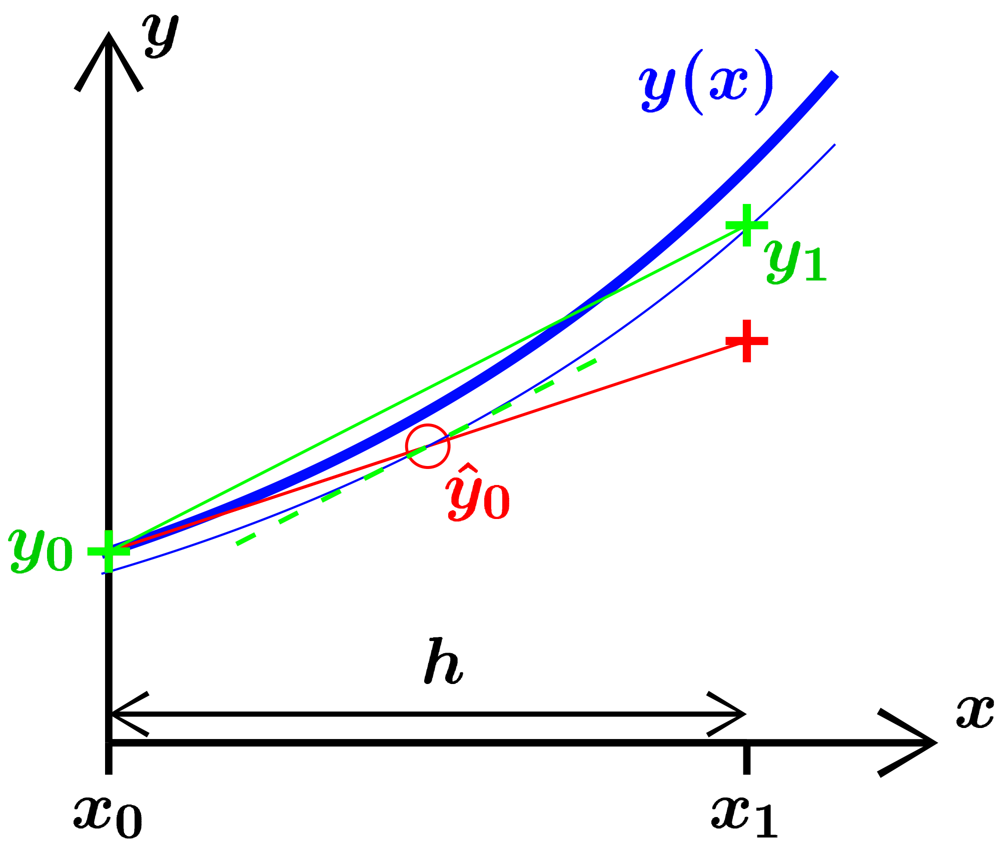
$$\frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} = f(x_n + \frac{1}{2}h, \frac{1}{2}(y_n + y_{n+1})).$$

Likning for y_{n+1}. Mulig å løse, men tungvint.

Forsøk 2: Eulers midtpunktmetode*(K. 10.8.3)*

1. Bruker Eulers metode $\frac{1}{2}h$ fram:
   $\hat{y}_n = y_n + \frac{1}{2}hf(x_n, y_n)$
   Vi kan si: $\hat{y}_n \approx y(x_n + \frac{1}{2}h)$
2. Kvasi-midtpunktformel: $y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{1}{2}h, \hat{y}_n)$

Eulers midpunktmetode; grafisk framstilling



Eksempel: første steg. Eulers metode $\frac{1}{2}h$ fram til $\hat{y}_0$

Stigningsrate i løsningskurve gjennom $(\frac{1}{2}h, \hat{y}_0)$ brukes for å finne y_1.

Eulers metode på enkel likning *(K. 10.8.2)*

Ser på $f(x, y) = ay$ dvs. likning og løsning

$y' = ay, \quad y(0) = y_0 \quad \Rightarrow y_0 e^{ax}.$

Eulers metode gir $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = (1 + ah)y_n.$

y_n bestemmes altså fra *differens*likningen

$y_{n+1} = (1 + ah)y_n,$

med løsning $y_n = (1 + ah)^n y_0 = (1 + \frac{ax_n}{n})^n y_0.$

$$\lim_{n \to \infty} y_n = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{ax_n}{n})^n y_0 = y_0 e^{ax_n}$$

Når $h \to 0$ nærmer numerisk løsning seg den eksakte:
konvergent, likevel unøyaktig.

Sammenlikning av Eulermetoder*

Eulers metode, omskriving av resultat
$y_n = (1 + ah)^n y_0 = K_E^n y_0$

Eulers midtpunktmetode
$y_{n+1} = y_n + ah\hat{y}_n = y_n + ah(y_n + \frac{1}{2}ahy_n) = K_m y_n$,
der $K_m = 1 + ah + \frac{1}{2}(ah)^2$. Da er $y_n = K_m^n y_0$.

I punkter x_n kan eksakt løsning skrives
$y(x_n) = y_0 e^{anh} = y_0(e^{ah})^n = K^n y_0$.

Taylorrekkeutvikling av $K = e^{ah}$

Euler	K_E	$=$	$1 + ah$
E. midtp.	K_m	$=$	$1 + ah + \frac{1}{2}(ah)^2$
Eksakt	K	$=$	$1 + ah + \frac{1}{2}(ah)^2 + \frac{1}{6}(ah)^3 + \ldots$

Runge-Kuttas metode (orden 4); *(K. 10.8.4)* *

$y' = f(x, y), \quad y(0) = y_0$
4 stigningsrater beregnes og midles.

Skritt fra x_n til x_{n+1}

1. $m_1 = f(x_n, y_n)$ (som i Euler)
2. $m_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hm_1)$ (Eulers midt.)
3. $m_3 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hm_2)$
4. $m_4 = f(x_n + h, y_n + hm_3)$
5. Utregning av ny y:
   $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$

Andre indeks på m'ene er sløyfet.
Noen steg, men enkel å kode!
Runge-Kutta metoder er mye brukt

Taylorrekkeutvikling*

Eksempel $y' = e^{xy}$.
Derivasjoner
$y'' = (e^{xy})' = e^{xy}(xy)' = e^{xy}(y + xy')$,
$y''' = (y'')' = e^{xy}(y + xy')^2 + e^{xy}(2y' + xy'')$,
...
Har vi y ved en x kan deriverte av økende orden regnes ut etter tur.

Taylorrekkeutvikling gir

$$y_{n+1} = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_n) + \ldots$$