Løsningsforslag for oppgave 11.2.15 i Kalkulus

Knut Mørken

November 15, 2006

Oppgave 11.2.15. La $g(x) = \sqrt[3]{1+x}$.

a) Finn Taylor-polynomet til $g(x)$ av orden 2 om origo.

Løsningsforslag. Vi husker at Taylor polynomet til g av grad k om 0 er gitt ved formelen

$$T_k g(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} f^{(i)}(0).$$

Setter vi $k = 2$ har vi

$$T_2 g(x) = g(0) + xg'(0) + \frac{x^2}{2} g''(0). \tag{1}$$

Vi må derivere g for å finne Taylor-polynomet. Vi finner at

$$\begin{aligned} g(x) &= (1+x)^{1/3}, & g(0) &= 1, \\ g'(x) &= \frac{1}{3}(1+x)^{-2/3}, & g'(0) &= \frac{1}{3}, \\ g''x &= -\frac{2}{9}(1+x)^{-5/3}, & g''(0) &= -\frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Setter vi dette inn i (1) får vi

$$T_2 g(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}. \tag{2}$$

b) Vis at for $x \geq 0$ så er $\left|R_2 g(x)\right| \leq \dfrac{5}{81} x^3$.

Løsningsforslag. Lagranges restleddsformel er gitt ved

$$R_2 g(x) = \frac{x^3}{6} g'''(c)$$

der c er et tall i intervallet $(0, x)$. Den tredjederiverte til g er gitt ved

$$g'''(x) = \frac{10}{27}(1+x)^{-8/3}.$$

Vi har derfor

$$R_2g(x) = \frac{x^3}{6} \cdot \frac{10}{27}(1+c)^{-8/3} = \frac{5x^3}{81}\frac{1}{(1+c)^{8/3}}$$

der c er et tall mellom 0 og x. Vi er bare ute etter en øvre grense for feilen og det finner vi ved å finne maksimum for funksjonen $h(c) = 1/(1+c)^{8/3}$ på intervallet $[0, x]$ (siden $h(c) \geq 0$ for de aktuelle verdiene av c). Vi legger merke til at $(1+c)^{8/3}$ vokser med c når $c \geq 0$, så $1/(1+c)^{8/3}$ må avta med c. Altså er $h(c)$ størst for $c = 0$,

$$\max_{c \in [0,x]} h(c) = h(0) = 1.$$

Dermed har vi

$$\left|R_2g(x)\right| = \left|\frac{5x^3}{81}\frac{1}{(1+c)^{8/3}}\right| \leq \frac{5x^3}{81}.$$

c) Finn $\sqrt[3]{1003}$ med 7 gjeldende desimaler.

Løsningsforslag. Her er det flere mulige strategier som fører fram og vi skal presentere to.

Alternativ 1. Vi legger merke til at

$$\sqrt[3]{1003} = \sqrt[3]{1000+3} = 10\sqrt[3]{1+0.003} = 10g(0.003).$$

Tallet $g(0.003)$ kan vi estimere ved hjelp av Taylor-polynomet T_2g som vi fant i (a). Gjør vi det får vi

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1003} = 10g(0.003) &\approx 10T_2(0.003)\\ &= 10\Big(1 + \frac{0.003}{3} - \frac{0.003^2}{9}\Big) = 10.0099900.\end{aligned}$$

Det gjenstår å sjekke at feilen ikke er for stor. Feilen er fra (b) begrenset av

$$\left|10g(0.003) - 10T_2g(0.003)\right| \leq 10\frac{5}{81}0.003^3 = \frac{5}{3}10^{-8} \leq 2 \cdot 10^{-8}.$$

Med andre ord må det riktige svaret ligge i intervallet

$$10.00998998 \leq \sqrt[3]{1003} \leq 10.00999002.$$

Både øvre og nedre grense avrundes til syv desimaler som desimaltallet 10.0099900. Dette er akkurat tilnærmingen vi beregnet, altså har vi syv riktige desimaler.

Alternativ 2. For å estimere $\sqrt[3]{1003}$ kan vi også justere det vi gjorde i (a) og (b) litt. Vi innfører funksjonen $h(x) = \sqrt[3]{1000+x}$ og finner det kvadratiske Taylorpolynomet til h om 0. Vi har

$$\begin{aligned} h(x) &= (1000+x)^{1/3}, & g(0) &= 10, \\ g'(x) &= \frac{1}{3}(1000+x)^{-2/3}, & g'(0) &= \frac{1}{3}10^{-2}, \\ g''x &= -\frac{2}{9}(1000+x)^{-5/3}, & g''(0) &= -\frac{2}{9}10^{-5}. \end{aligned}$$

Det kvadratiske Taylor-polynomet til h er derfor

$$T_2h(x) = 10 + \frac{1}{3}10^{-2}x - \frac{2}{9}(1000+x)^{-5/3}x^2.$$

En tilnærming til $\sqrt[3]{1003}$ er da gitt ved $T_2h(3) = 10.0099900$.

Følger vi oppskriften i (b) finner vi at feilen i $T_2h(x)$ er gitt ved

$$\left|R_2(x)\right| \leq \frac{5x^3}{81}10^{-8}.$$

Dermed får vi at feilen i vår tilnærming $T_2h(3)$ er begrenset ved

$$\left|R_2(3)\right| \leq \frac{5}{81}10^{-8}3^3 = \frac{5}{3}10^{-8}.$$

Sammenligner vi de to alternativene ser vi at både tilnærmingene og feilestimatene faktisk er nøyaktig like. Med andre ord er dette bare to måter å gjøre de samme beregningene på.