

Kompendium
med oppgaver for
MAT-INF 1100

Høsten 2006

Knut Mørken

20. oktober 2006

Innhold

1	Innledning	1
2	Tall og datamaskiner	5
2.1	Naturlige, hele, rasjonale, reelle og komplekse tall	5
2.2	Datamaskiner og heltall	7
2.2.1	Representasjon av heltall	7
2.2.2	Heltallsaritmetikk	8
2.2.3	Vilkårlig store heltall	9
2.3	Datamaskiner og reelle tall	10
2.3.1	Reelle tall på normalisert form, flyttall	11
2.3.2	Addisjon og subtraksjon av flyttall	13
2.3.3	Multiplikasjon og divisjon med flyttall	15
2.3.4	Binær representasjon av flyttall	16
2.3.5	Programmering med flyttall	17
2.3.6	Flyttall med vilkårlig presisjon	19
2.3.7	Regnehastighet	19
2.3.8	Valg av variabelnavn	20
2.4	Absolutt og relativ feil	20
2.4.1	Relativ feil angir antall riktige siffer	21
2.5	Noen ord om objektorientert programmering og matematikk	22
2.6	Konvertering fra desimaltall til binærtall	23
2.6.1	Konvertering av heltall	23
2.6.2	Hvorfor er denne metoden riktig?	24
2.6.3	Konvertering av tall i intervallet $[0, 1]$	25
3	Litt logikk og noen andre småting	33
3.1	Logikk	33
3.1.1	Logiske variable og sammenligninger	33
3.1.2	Grunnleggende logiske operatører	34
3.1.3	Logisk aritmetikk	37
3.1.4	Logikk og mengdelære	39
3.2	Induksjonsbevis og rekursjon	40

4	Følger og differensligninger	45
4.1	Noen forskjellige typer følger	45
4.1.1	Matematiske følger	45
4.1.2	Anvendelser av følger	47
4.1.3	Egenskaper ved følger	48
4.2	Simulering av differensligninger	48
4.3	Generering av pseudotilfeldige tall	54
4.4	Digital lyd	55
4.4.1	Lyd på datamaskin	57
4.4.2	Filtrering av lyd	58
4.4.3	Signalbehandling.	62
5	Funksjoner og kontinuitet	65
5.1	Kontinuitet og beregninger med flyttall	65
5.2	Kontinuitet og plotting av funksjoner	68
5.2.1	Litt om grafikk	69
5.2.2	Plotting av funksjoner	69
5.3	Numerisk løsning av ligninger med halveringsmetoden	71
5.4	Lyd fra funksjoner	74
5.4.1	Modulasjon	77
5.4.2	Musikkskalaer og matematikk	79
6	Derivasjon	83
6.1	Avrundingsfeil og den deriverte	83
6.1.1	Absolutt feil	84
6.1.2	Relativ feil og kondisjonstallet	86
6.2	Numerisk derivasjon	90
6.3	Frekvens som derivert	92
6.4	Newtons metode	92
6.5	Diskret og kontinuerlig kapitalvekst	96
6.5.1	Diskret kapitalvekst	96
6.5.2	Kontinuerlig kapitalvekst	97
7	Integrasjon	103
7.1	Symbolisk integrasjon	103
7.2	Numerisk integrasjon	104
7.2.1	Implementasjon av trapesmetoden	104
7.2.2	Implementasjon av Simpsons metode	107
7.2.3	Valg av metode	109
7.3	Integrasjon og sannsynlighet	109
7.3.1	Hva er sannsynlighet?	109
7.3.2	Stokastiske variable	111
7.3.3	Sannsynlighetstetthet – et motiverende eksempel	112
7.3.4	Sannsynlighetstettheter og kumulative fordelinger	115

7.3.5	Stokastisk simulering	118
8	Differensialligninger	123
8.1	Numerisk løsning av differensialligninger	124
8.1.1	Eulers metode for førsteordens differensialligninger	124
8.1.2	Eulers metode for andreordens differensialligninger	126
8.2	Simulering av fallskjermhopping	128
8.2.1	Utleddning av ligningen for fallskjermhopp	129
8.2.2	Enkle metoder for å lære om modellen	131
8.2.3	Variierende motstandskoeffisient	133
8.2.4	Beregning av hopperens posisjon	133
9	Approksimasjon av funksjoner	139
9.1	Taylor polynomer	139
9.1.1	Konstruksjon av Taylor-polynomer	140
9.1.2	Feilledet	142
9.1.3	Beregning av verdier på polynomer	143
9.2	Interpolasjon og andre approksimasjonsmetoder	144
9.2.1	Interpolasjon med polynomer	145
9.2.2	Andre metoder	148
9.3	Valg av basis er viktig, Bernstein-basisen	149
9.3.1	Et problematisk polynom	150
9.3.2	Noen egenskaper ved Bernstein-basisen	152
9.3.3	Egenskaper ved polynomer på Bernstein-form	153
9.3.4	Sammenlenking av Bernstein-polynomer	157
9.3.5	Beregning av verdier på Bernstein-polynomer	159
9.4	Parametriske kurver	161
9.4.1	Definisjon av parametriske kurver	161
9.4.2	Tangent, hastighet og derivert	164
9.4.3	Anvendelser av parametriske kurver	165
9.5	Bezier-kurver	165
9.6	Tilnærminger til deriverte og integraler	169
9.6.1	Numerisk integrasjon	170
9.6.2	Numerisk derivasjon	172
9.6.3	Feilestimater	173
9.6.4	Generell strategi for å utlede feilestimater	178
10	Flerskala-analyse og kompresjon av lyd	183
10.1	Litt generelt om kompresjon	183
10.1.1	Feilfri kompresjon	183
10.1.2	Toleransekompresjon	184
10.2	Flerskala-analyse med stykkevise lineære funksjoner	185
10.2.1	Stykkevis lineær representasjon av data	185

10.2.2	Oppspalting i en tilnærming og en feilfunksjon	186
10.2.3	Rekonstruksjon fra tilnærming og feilfunksjon	189
10.2.4	Kompresjon	189
10.2.5	Flere dekomposisjoner	190
10.3	Praktisk kompresjon av digital lyd	191
10.3.1	Komprimering og avspilling	191
10.3.2	Samplingsrate	191
10.3.3	Lyd krever 16 bits heltall	191
10.3.4	Datasettet inneholder et like antall punkter	192
10.3.5	Dekomposisjon flere ganger	193
10.3.6	Valg av toleranse	193
10.3.7	Store datasett	193
10.4	Andre anvendelser av flerskala-analyse	194
10.5	Representasjon av stykkevis lineære funksjoner	194

Forord

Sammen med *Kalkulus* av Tom Lindstrøm utgjør dette kompendiet læremidlene i kurset MAT-INF 1100, *Modellering og beregninger*, ved Universitetet i Oslo. Målet med kompendiet er å gi et perspektiv på kalkulus som er fokusert mot beregninger ved hjelp av datamaskin, og dessuten vise litt av hvordan matematikken som gjennomgås i MAT 1100 og MAT-INF 1100 har anvendelser i ulike fagfelt. Både dette kompendiet og undervisningen i MAT 1100 er basert på at studentene kan programmere fra før eller samtidig følger undervisningen i INF 1000 (grunnkurset i programmering ved Institutt for informatikk).

Deler av dette kompendiet har tidligere vært brukt i kurset MAT 100B, og i planleggingen av den første versjonen både av MAT 100B og dette kompendiet høsten 2000 hadde jeg nyttig hjelp av en referansegruppe bestående av Ørnulf Borgan, Sverre Holm, Hans-Petter Langtangen, Ole Christian Lingjærde og Harald Osnes. I tillegg til å være nyttige diskusjonspartnere bidro flere av disse også direkte til kompendiet. Sverre Holm bidro med ideer til deler av stoffet om lyd, og til dette fikk jeg også tips fra Hermann Lia. Seksjonen om stokastisk modellering og sammenhengen mellom integrasjon og sannsynlighetsregning i kapittel 7 ble skrevet av Ørnulf Borgan, og han er også opphavsmann til seksjon 4.3 om generering av tilfeldige tall. Hans Petter Langtangen leverte kjernematerialet til delen om fallskjermhopping i kapittel 8. I tillegg skrev Erik Bølviken hoveddelen av seksjonen om kapitalvekst i kapittel 6.

I MAT-INF 1100 er det plass til mer stoff om beregninger enn i det tidligere MAT 100B, og i høstens versjon av kompendiet kommer det et nytt kapittel om Taylorpolynomer og approksimasjoner med anvendelser innen kompresjon av lyd og representasjon av geometri.

Pål Hermunn Johansen har bidratt med utstrakt og meget kompetent programmeringshjelp, finansiert av Matematisk institutt. Mine nærmeste kolleger Geir Dahl, Tom Lyche og Ragnar Winther har lest de fleste kapitlene og gitt nyttige kommentarer og tips. Geir Ellingsrud, Arne B. Sletsjøe og særlig Tom Lindstrøm, som har undervist de andre MAT 100 variantene, har vært gode støttespillere sammen med administrasjonen ved Matematisk institutt. I administrasjonen vil jeg særlig berømme Helge Galdal som med imponerende iver dro i gang de nye kursvariantene høsten 2000 og Heidi Raude som tålmodig og velvillig har vært støtfanger mot studentene og organisator for våre stadig nye påfunn omkring evalueringsformer. Jeg vil berømme instituttet for satsingen på begynnerundervisningen, og takke for at jeg som utenforstående har fått være med på dette. Takk også til mitt eget institutt, Institutt for informatikk, som alltid har vært et godt hjem, og som meget velvillig har sluppet meg utenfor husets vegger.

Studentene som har fulgt undervisningen i MAT 100B har vært tolerante og overbærende med våre eksperimenter med undervisningsform og innhold. Selv om det sikkert er mange trykkfeil igjen ville det vært enda flere om ikke mange årvåkne studentøyne hadde saumfart teksten og rapportert feil til meg. Framfor alt har mange av dem vært entusiastiske og gitt positive tilbakemeldinger og derved gjort en stor utfordring til en morsom og trivelig oppgave.

Blindern, August 2003

I utgaven av kompendiet for høsten 2005 er det lagt til litt stoff om blant annet konvertering av tall fra 10-tall- til 2-tallsystemet og feilformler for numerisk integrasjon og numerisk løsning av differensialligninger. Dette er inspirert av diskusjoner med min medforeleser Geir Pedersen.

Blindern, August 2005

Utgaven for høsten 2006 inneholder i forhold til forrige utgave bare mindre endringer som retting av trykkfeil og lignende.

Blindern, August 2006