KAPITTEL 1

Innledning

For mange er matematikk det faget som står lengst fra virkeligheten—en utbredt holdning er at matematikk ikke kan brukes til noe. Faktum er at dette er helt feil! Matematikk generelt, og spesielt hovedtemaet i MAT 1100 og MAT-INF 1100, kalkulus, har en mengde anvendelser. Faktisk er det slik at store deler av vårt moderne samfunn rett og slett er utenkelig uten matematikk. Mobiltelefoner og annet kommunikasjonsutstyr er basert på grunnleggende matematisk forståelse, og utvikling av datamaskiner er umulig uten utstrakt bruk av matematikk. På samme måte er store deler av moderne industri helt avhengig av matematikk.

Slike anvendelser av matematikk er videreføringen av tekststykkene som vi kjenner fra skolen. Disse uoppstilte oppgavene der en blir stilt overfor et mystisk problem som så skal løses ved hjelp av matematikk, har vært til glede og inspirasjon for noen, og til fortvilelse for andre. Vi blir stilt overfor et problem fra den virkelige verden, og utfordringen er å få oversatt problemet til matematikk i form av ligninger eller en annen passende *matematisk modell.* Når vi har fått fram den matematiske modellen er neste steg å løse det matematiske problemet. Til slutt må vi tolke løsningen i forhold til det opprinnelige problemet. Denne prosessen kalles *matematisk modellering.* Kort oppsummert består matematisk modellering av:

1. Oversett det gitte problemet til matematikk i form av en matematisk modell (ofte ligninger av et eller annet slag).

2. Løs det matematiske problemet.

3. Tolk løsningen av det matematiske problemet tilbake i rammene til det opprinnelige problemet.

Det er verdt å merke seg at programmering har mange likhetstrekk med matematisk modellering. Når vi skriver et dataprogram er utgangspunktet et 'virkelig' problem som skal løses med programmet vi skriver. For å komme fra problem til program må vi innføre datastrukturer og finne en strategi for å løse problemet. Vi må altså oversette fra det virkelige problemet til en idealisert verden som bare kan eksistere i datamaskinen. Ofte vil vi måtte ty til en eller annen form for matematikk som hjelpemiddel i programmeringsprosessen. Når programmet er ferdig kan det utføres på en maskin og vi kan så tolke resultatene i forhold til det opprinnelige problemet.

Matematikkunnskaper er ofte nyttige når en skal programmere. På den annen side er programmering og datamaskiner ofte nyttige, for ikke å si essensielle, i det meste av matematisk modellering. Dette gjelder særlig i del 2 av modelleringsprosessen som er skissert over. Idag er det bare de aller enkleste matematiske modeller vi kan ha forhåpninger om å analysere og løse med 'papir og blyant'. Ettersom datamaskinene blir kraftigere blir også de matematiske modellene mer kompliserte og gir dermed arbeid til de stadig raskere datamaskinene. Men uansett hvor kraftig datamaskinen er må den programmeres for å kunne løse problemene. I mange tilfeller kan vi benytte standard programmer som andre har skrevet, men ofte vil ikke det bli raskt eller nøyaktig nok, eller det fins ingen programmer eller metoder som løser vårt problem. Utvikling av nye og bedre metoder for å løse ulike matematiske problemer, med tilhørende programvare, er derfor et fagfelt som beskjeftiger mange forskere.

Datamaskinen er også et viktig verktøy i del 3 av modelleringsprosessen. Metoden som løser det matematiske problemet gir ofte en løsning i form av en enorm samling tall. Store tallmengder er vanskelige for oss mennesker å tolke direkte, så i steden kan det være bedre å vise løsningen i form av bilder, lyd, video eller et annet format som passer for det aktuelle problemet som vi modellerer. Hvis vi for eksempel modellerer havbølger er det som regel bedre å få presentert løsningen i form av en video av de kunstige bølgene, enn alle tallene som representerer bølgene. Prosessen å oversette fra tall til bilder, lyd eller video krever igjen matematiske teknikker når det skal gjøres på en datamaskin.

Utviklingen av kraftigere datamaskiner betyr derfor ikke at matematikkstudier og matematikkunnskaper blir overflødige. Tvert i mot, bruken av datamaskiner gir nye anvendelser for matematikk, og det dukker stadig opp nye matematiske utfordringer både i modelleringsfasen, i behovet for nye løsningsmetoder og i tolkningsfasen. En godt kvalifisert fagperson er derfor fortrolig med matematikk og behersker datamaskinen som et naturlig verktøy, samtidig som hun har noe kunnskap om fagområdet som ga opphav til den matematiske modellen.

Det er nesten bare fantasien som setter grenser for hva som kan modelleres ved hjelp av matematikk. Matematiske modeller står sentralt i så ulike fag som biologi, fysikk, meteorologi, informatikk, medisin, økonomi, arkitektur, filmproduksjon, telefoni, musikk og landbruk, bare for å nevne noen. Noen vanlige grunner for å implementere matematiske modeller av fenomener på en datamaskin er:

- Ved å simulere den matematiske modellen på en datamaskin kan en sammenligne simuleringene med virkelige observasjoner for å undersøke om den underliggende teorien er riktig.

- I stedet for å gjøre virkelige eksperimenter kan eksperimentene utføres ved hjelp av en matematisk modell i en datamaskin. Hvis vi for eksempel har en matematisk modell av en oljeplattform og matematiske modeller for oppførselen til havet der plattformen skal plasseres, kan vi se om plattformen tåler de påkjenningene den vil kunne bli utsatt for, allerede før den er bygget. På denne måten kan vi få hjelp til å dimensjonere plattformen riktig.

- Ved hjelp av matematikk kan vi representere informasjon i en datamaskin. I databasert animasjon og filmproduksjon brukes matematiske funksjoner til å representere både geometrien til figurene og banene til kameraene, og for å kunne lagre musikk, bilder og video mest mulig kompakt i en datamaskin lagres ikke 'rådata', men en passende matematisk tilnærming til originalen som kan beskrives med færre parametre (tall) enn den opprinnelige datamengden.

Når alt dette er sagt om anvendelser av matematikk bør det også sies at matematikk er et spennende og levende fag som står godt på egne ben og er en viktig del av vår kultur. Matematikken selv genererer nye matematiske modeller og gir opphav til utfordrende problemer, uavhengig av ulike anvendelser.

Resten av dette kompendiet består av syv kapitler. Kapittel 2 tar for seg hvordan tall representeres i datamaskiner. De fleste reelle tall kan bare representeres med tilnærminger. Dette gir opphav til avrundingsfeil, og bevissthet om hvordan numeriske beregninger innflueres av avrundingsfeil er et tema som går igjen i senere kapitler.

I kapittel 4 er hovedtema anvendelser av matematiske følger. Vi ser litt på numerisk simulering av diffensligninger, generering av tilfeldige tall og behandling av lyd på datamaskiner.

Hovedtema i kapittel 5 er funksjoner. Vi tar for oss definisjonen av kontinuitet og hva den sier om mulighetene for nøyaktig beregning og plotting av funksjoner. Dernest ser vi hvordan vi fra skjæringssetningen i matematikk får en naturlig måte for numerisk bestemmelse av nullpunkter for funksjoner, nemlig halveringsmetoden. Siste tema i kapittel 5 er hvordan vi kan lage lyd fra funksjoner og en liten smakebit på sammenhengen mellom musikk og matematikk.

I kapittel 6 kommer vi til derivasjon. Vi viser hvordan den deriverte av en funksjon gir et mål på funksjonens følsomhet for avrundingsfeil og viser hvordan Newtons metode kan implementeres. Kapitlet avsluttes med en seksjon om kapitalvekst. Vi starter med en beskrivelse basert på følger og en diskret måling av tid. Ved å la tidsstegene gå mot null får vi inn kontinuerlig tid og differensligningene blir til differensialligninger.

Neste tema er integrasjon i kapittel 7. Vi viser først hvordan et par metoder for numerisk integrasjon kan kodes effektivt og ser så litt på hvordan integrasjon er et naturlig verktøy innen sannsynlighetsregning.

Det siste kapitlet tar for seg differensialligninger. Første tema er implementasjon av Eulers metode for numerisk løsning av differensialligninger. Deretter ser vi på et konkret, fysisk problem, nemlig simulering av fallskjermhopping.

En sentral del av kompendiet er modelleringen, som delvis foregår i oppgavene. Modelleringen er konsentrert om fire hovedemner. I kapittel 4 og 5 er det lyd som modelleres ved hjelp av følger, differensligninger og funksjoner, og i kapittel 6 modelleres kapitalvekst ved hjelp av differens- og differensialligninger. I kapittel 8 er det modellering av naturlover som er tema, i dette tilfellet simulering av fallskjermhopping. Modelleringen i kapittel 7 er grunnleggende annerledes i og med at sannsynlighetsbegrepet er sentralt. Det konkrete eksempelet vi ser på er fordelingen av vekt for nyfødte.