UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Fredag 7. desember 2007.
Tid for eksamen:	9:00 – 12:00.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Husk å fylle inn kandidatnummer under.

Kandidatnr: ________

Første del av eksamen består av 7 flervalgsoppgaver som teller 4 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen består av tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 6 delspørsmålene 12 poeng. Den totale poengsummen er altså maksimalt 100 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige!

Del 1: Flervalgsoppgaver

Oppgave 1. Koeffisienten foran x^2 i Taylorpolynomet (av grad større enn 1) til fuksjonen $x \cos x$ er

☐ 1 ☐ 1/2 ☐ 2 ☐ 0 ☐ −1/2

Oppgave 2. Uttrykket $Ce^x - 1$, med vilkårlig C, er en løsning av

☐ $y' - y = 0$, $y(0) = 1$

☐ $y' - y = 1$

☐ $y'' + y' = 2e^x$

☐ $y' + 1 - y^2 = 0$

☐ $y' = e^x$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. En av likningene under er separabel. Hvilken ?

☐ $y' + \sin x\, y = x$

☐ $y' + y^2 + x = x^2$

☐ $xy' + e^x y^{1/2} = 0$

☐ $y' + y = \sin x$

☐ $y' + 1/y = 2x$

Oppgave 4. Vi interpolerer funksjonen $f(x) = (1+x)^{-1}$ med polynomer av andre grad i intervallet $[0,1]$ ved å kreve likhet i punktene $x = 0,\ \frac{1}{2},\ 1$. Det interpolerende polynomet kan da skrives

☐ $1 - x + x^2$

☐ $1 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2$

☐ $(x-1)(x-\frac{1}{2})x$

☐ $\frac{1}{2}x + x^2$

☐ $1 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{3}x^2$

Oppgave 5. I standard prosedyre for løsning av den lineære differensiallikningen

$$y' + \tan x\, y = x^2, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

finner vi den integrerende faktoren

☐ $1/\cos x$ ☐ $e^{\cos x}$ ☐ $\sin x$ ☐ $e^{\tan x}$ ☐ $e^{\frac{1}{3}x^2}$

Oppgave 6. I en tekstfil forekommer det tre forskjellige tegn, kodet med en av metodene for representasjon av tekst som vi har i dette kurset. Det viser seg at det ene tegnet blir representert med en byte, det andre med to bytes, det tredje med tre bytes. Hvilket av følgende punkter er riktig?

☐ Tegnene kan ha vært kodet med ASCII

☐ Tegnene kan ha vært kodet med UTF-8

☐ Tegnene kan ha vært kodet med UTF-16

☐ Tegnene kan ha vært kodet med UTF-32

☐ Tegnene kan ha vært kodet med ISO-latin1

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 7. Vi tilnærmer den andrederiverte til funksjonen $f(x)$, i punktet 0, med uttrykket

$$D_2 f(0) = \frac{f(h) - 2f(0) + f(-h)}{h^2}.$$

Vi antar at f er uendelig mange ganger deriverbar. Da er feilen

$$\Big| f''(0) - D_2 f(0) \Big|,$$

begrenset av

☐ $\frac{h^2}{12} \max_{x \in [-h,h]} \big| f''(x) \big|$

☐ $\frac{h^2}{48} \max_{x \in [-h,h]} \big| f^{(4)}(x) \big|$

☐ $\frac{h}{4} \max_{x \in [-h,h]} \big| f''(x) \big|$

☐ $\frac{h^2}{12} \max_{x \in [-h,h]} \big| f^{(4)}(x) \big|$

☐ $\frac{h^4}{8} \max_{x \in [-h,h]} \big| f''(x) \big|$

(Fortsettes på side 4.)

Del 2

Husk at i denne delen må alle svar begrunnes!

Oppgave 1. Løs initialverdiproblemet

$$y'' - 3y' + 2y = e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Oppgave 2. I denne oppgaven skal vi foreta Huffman koding av teksten $\{AACABABABCABADA\}$
Regn ut frekvensene for de fire symbolene i teksten, og sett opp et Huffmantre for symbolene. Skriv til slutt opp Huffmankoden for teksten.

Oppgave 3. Vis ved induksjon

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{for} \quad n \geq 1$$

Oppgave 4. Vi har gitt en differensialligning av andre orden med initialbetingelser

$$y'' - f(x)y' - g(x)y = 0,\ x \geq 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

der f og g er gitte funksjoner. Gjør om denne likningen til et sett av to førsteordenslikninger. Vi skal benytte Eulers midtpunktmetode for dette settet. Beskriv hvordan vi går ett steg fram, for eksempel fra $x = 0$ til $x = h$.

Oppgave 5. Vi er gitt funksjonen $f(x) = \cos(x^2)$.

a) Vis at $(x > 0)$

$$f(x) = T_7 f(x) + R_7 f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{\cos(d)}{24}x^8,$$

der vi har utviklet om punktet $a = 0$ og der $0 \leq d \leq x^2$.
Hint: Du kan bruke Taylorpolynomet til $\cos(t)$.

b) Vi tilnærmer nå integralet $\int_0^h f(x)dx$ der $h > 0$. Vis at feilen ved å erstatte f med $T_7 f$ i integralet er begrenset av

$$\left| \int_0^h f(x)dx - \int_0^h T_7 f(x)dx \right| \leq \frac{h^9}{216}.$$

Vis også at når $h \leq 1$ er feilen minst $\frac{h^9}{432}$.

Lykke til og god jul!